Mathematics ২০০ নম্বর

১. ধরি, P ও Q বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

প্রথম শর্তমতে, $\tan 60° = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow Q\sin\alpha = \sqrt{3}(P + Q\cos\alpha) \cdots$ (i)

দ্বিতীয় শর্তমতে, P এর স্থলে 2P হলে, $\tan 30° = \frac{Q\sin\alpha}{2P+Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow Q\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(2P + Q\cos\alpha) \cdots$ (ii)

(i) ও **(ii)** হতে, $\sqrt{3}(P + Q\cos\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2P + Q\cos\alpha)$

$\Rightarrow 3P + 3Q\cos\alpha = 2P + Q\cos\alpha$

$\Rightarrow P = -2Q\cos\alpha$

(i) নং এ বসিয়ে, $Q\sin\alpha = \sqrt{3}(-2Q\cos\alpha + Q\cos\alpha) = -\sqrt{3}Q\cos\alpha$

$\Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{3}$

$\therefore \alpha = 120° \ [0° < \alpha < 180°]$

অতএব, বল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ $120°$

২. ধরি, P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ α

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \cdots$ (i)

Q দ্বিগুণ করলে, $4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ\cos\alpha \cdots$ (ii)

Q এর দিক বিপরীত করলে, $4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha \cdots$ (iii)

(i) ও **(iii)** যোগ করে, $5R^2 = 2P^2 + 2Q^2 \cdots$ (iv)

(ii) থেকে 2×**(i)** বিয়োগ করে, $2R^2 = 2Q^2 - P^2 \cdots$ (v)

(v) হতে, $P^2 = 2Q^2 - 2R^2$; **(iv)** এ বসিয়ে, $5R^2 = 4Q^2 - 4R^2 + 2Q^2$

$\Rightarrow 9R^2 = 6Q^2 \Rightarrow Q^2 = \frac{3}{2}R^2$

$\therefore P^2 = 3R^2 - 2R^2 = R^2 \Rightarrow P = R$

$\therefore P^2 : Q^2 : R^2 = 1 : \frac{3}{2} : 1 = 2 : 3 : 2$

$\therefore P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ **(দেখানো হলো)**

আবার, **(i)** নং এ $P = R$ ও $Q = \sqrt{\frac{3}{2}}R$ বসিয়ে, $R^2 = R^2 + \frac{3}{2}R^2 + \sqrt{6}R^2\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \approx 127.76°$

৩. ধরি, P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ α; তাহলে P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ 2α এবং Q ও R এর মধ্যবর্তী কোণ $360° - 3\alpha$

ল্যামির সূত্রানুসারে, $\frac{P}{\sin(360°-3\alpha)} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha}$

$\Rightarrow \frac{P}{-\sin 3\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha}$

দ্বিতীয় ও তৃতীয় অনুপাত হতে, $R = \frac{Q\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2Q\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{R}{2Q} \cdots$ (i)

আবার, প্রথম ও দ্বিতীয় অনুপাত হতে, $P = -\frac{Q\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{Q(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)}{\sin\alpha} = -Q(3 - 4\sin^2\alpha)$

$\Rightarrow P = -Q(4\cos^2\alpha - 1) = Q(1 - 4\cos^2\alpha)$

(i) বসিয়ে, $P = Q\left(1 - \frac{4R^2}{4Q^2}\right) = \frac{Q^2-R^2}{Q}$

$\Rightarrow PQ = Q^2 - R^2$

$\therefore R^2 = Q(Q - P)$ **(প্রমাণিত)**

৪. ধরি, $P = 3\,N$, $Q = 4\,N$, $R = 2\,N$; P ও R এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং P ও Q এর মধ্যবর্তী কোণ β
বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকায় যেকোনো দুইটির লব্ধি তৃতীয়টির সমান ও বিপরীতমুখী
P ও R এর লব্ধির মান = Q হওয়ায়, $Q^2 = P^2 + R^2 + 2PR\cos\alpha$
$\Rightarrow 16 = 9 + 4 + 12\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{4} \cdots$ (i)
P ও Q এর লব্ধির মান = R হওয়ায়, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\beta$
$\Rightarrow 4 = 9 + 16 + 24\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = -\frac{7}{8} \cdots$ (ii)
এখানে, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{1}{16} - 1 = -\frac{7}{8} = \cos\beta$
$\cos\alpha > 0$ বলে $0° < \alpha < 90°$, অর্থাৎ $0° < 2\alpha < 180°$; আবার $0° < \beta < 180°$; এই ব্যবধিতে cos ফাংশন এক-এক
$\therefore \beta = 2\alpha$ (প্রমাণিত)

৫. ধরি, গোলকের কেন্দ্র O; α কোণে নত তলের প্রতিক্রিয়া R_1 এবং β কোণে নত তলের প্রতিক্রিয়া R_2
মসৃণ তলের প্রতিক্রিয়া তলের উপর লম্ব, তাই R_1 ও R_2 কেন্দ্র O গামী; ওজন W ও O গামী
তল দুইটির লম্ব উল্লম্বের সাথে যথাক্রমে α ও β কোণ করে; সুতরাং R_1 ও R_2 এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha + \beta$, R_1 ও W এর মধ্যবর্তী কোণ $180° - \alpha$ এবং R_2 ও W এর মধ্যবর্তী কোণ $180° - \beta$
ল্যামির সূত্রানুসারে, $\frac{R_1}{\sin(180°-\beta)} = \frac{R_2}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$
$\Rightarrow \frac{R_1}{\sin\beta} = \frac{R_2}{\sin\alpha} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$
$\therefore R_1 = \frac{W\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ এবং $R_2 = \frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$
অতএব, α কোণে নত তলের প্রতিক্রিয়া $\frac{W\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ এবং β কোণে নত তলের প্রতিক্রিয়া $\frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

৬. ধরি, বস্তুটি B বিন্দুতে স্থির; B হতে A গামী উল্লম্ব রেখার উপর BD লম্ব
এখানে, $AB = 20\,m$, $BD = 16\,m$
$\therefore AD = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12\,m$
B বিন্দুতে তিনটি বল: ওজন $W = 6\,kg\text{-wt}$ (উল্লম্ব নিচে, AD এর সমান্তরাল), F (অনুভূমিক, DB এর সমান্তরাল) এবং টান T (BA বরাবর)
$\triangle ADB$ এর বাহু তিনটি বল তিনটির সমান্তরাল, তাই বলের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, $\frac{W}{AD} = \frac{F}{DB} = \frac{T}{AB}$
$\Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{F}{16} = \frac{T}{20}$
$\therefore F = \frac{6\times16}{12} = 8\,kg\text{-wt}$ এবং $T = \frac{6\times20}{12} = 10\,kg\text{-wt}$
সুতা উল্লম্বের সাথে θ কোণ করলে, $\cos\theta = \frac{AD}{AB} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.13°$
অতএব, $F = 8\,kg\text{-wt}$, সুতার টান $10\,kg\text{-wt}$ এবং সুতা উল্লম্বের সাথে প্রায় $53.13°$ কোণ উৎপন্ন করে

৭. এখানে, $CA^2 + AB^2 = 64 + 36 = 100 = BC^2$, তাই $\triangle ABC$ সমকোণী এবং $\angle BAC = 90°$
A এর সাপেক্ষে ভ্রামক শূন্য, তাই F এর ক্রিয়ারেখা A বিন্দুগামী। ধরি, F ও AB এর মধ্যবর্তী কোণ θ
B হতে F এর ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব = $AB\sin\theta = 6\sin\theta$; ভ্রামক ঘড়ির কাঁটার দিকে, তাই $-F \cdot 6\sin\theta = -36$
$\Rightarrow F\sin\theta = 6 \cdots$ (i)
C হতে লম্ব দূরত্ব = $AC\sin(90° - \theta) = 8\cos\theta$; ভ্রামক ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে, তাই $F \cdot 8\cos\theta = 64$
$\Rightarrow F\cos\theta = 8 \cdots$ (ii)
(i) ও **(ii)** এর বর্গ যোগ করে, $F^2 = 36 + 64 = 100$
$\therefore F = 10$ একক
(i) কে **(ii)** দ্বারা ভাগ করে, $\tan\theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
আবার, $\triangle ABC$ এ $\tan\angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$; যেহেতু $\tan\theta \cdot \tan\angle B = 1$, তাই $\theta + \angle B = 90°$, অর্থাৎ ক্রিয়ারেখা BC এর উপর লম্ব
অতএব, $F = 10$ একক, যা A বিন্দুগামী হয়ে AB এর সাথে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণে BC এর উপর লম্বভাবে BC এর দিকে ক্রিয়া করে

৮. ধরি, A ও B বিন্দুতে খুঁটির ঊর্ধ্বমুখী প্রতিক্রিয়া R_A ও R_B
সুষম দণ্ডের ওজন মধ্যবিন্দুতে, অর্থাৎ A হতে 2 m দূরে ক্রিয়া করে
উল্লম্ব বলের সাম্যে, $R_A + R_B = 140 + 60 = 200$ kg-wt $\cdots$ (i)
A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে, $R_B \times 4 = 140 \times 1 + 60 \times 2 = 260$
$\Rightarrow R_B = 65$ kg-wt
(i) হতে, $R_A = 200 - 65 = 135$ kg-wt
অতএব, চাপ যথাক্রমে A তে 135 kg-wt ও B তে 65 kg-wt

৯. ধরি, দণ্ড AB = 2L; A প্রান্তে কবজা এবং B প্রান্ত দেয়ালে। মধ্যবিন্দুতে ওজন W খাড়া নিচে এবং B তে দেয়ালের প্রতিক্রিয়া R অনুভূমিক
B এর উচ্চতা = $2L\sin\theta$ এবং ওজনের রেখা হতে A এর লম্ব দূরত্ব = $L\cos\theta$
A এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে, $R \cdot 2L\sin\theta = W \cdot L\cos\theta$
$\Rightarrow R = \frac{W\cot\theta}{2}$
কবজার প্রতিক্রিয়া S এর অনুভূমিক উপাংশ $X = R = \frac{W\cot\theta}{2}$ এবং উল্লম্ব উপাংশ $Y = W$
$\therefore S = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\frac{W^2\cot^2\theta}{4} + W^2} = \frac{W}{2}\sqrt{4 + \cot^2\theta}$
S অনুভূমিকের সাথে α কোণ করলে, $\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{2W}{W\cot\theta} = 2\tan\theta$
$\therefore \alpha = \tan^{-1}(2\tan\theta)$
অতএব, কবজার প্রতিক্রিয়া $\frac{W}{2}\sqrt{4 + \cot^2\theta}$ এবং এটি অনুভূমিকের সাথে $\tan^{-1}(2\tan\theta)$ কোণ উৎপন্ন করে

১০. W = 1000 N, r = OC = 20 cm, h = 10 cm; প্রতিবন্ধকের কিনারা C; O হতে C গামী অনুভূমিক রেখার উপর OE লম্ব
OE = r − h = 10 cm, $CE = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$ cm
উপক্রম অবস্থায় ভূমির প্রতিক্রিয়া শূন্য; C এর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে, $F\cos 30° \times OE + F\sin 30° \times CE = W \times CE$
$\Rightarrow F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 + F \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 1000 \times 10\sqrt{3}$
$\Rightarrow 10\sqrt{3}F = 10000\sqrt{3}$
$\therefore F_{min} = 1000$ N
প্রতিক্রিয়া R এর উপাংশ: অনুভূমিক $R_x = F\cos 30° = 500\sqrt{3}$ N (পিছনের দিকে), উল্লম্ব $R_y = W - F\sin 30° = 500$ N (উপরের দিকে)
$\therefore R = \sqrt{(500\sqrt{3})^2 + 500^2} = 1000$ N
$\tan\phi = \frac{R_y}{R_x} = \frac{500}{500\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = 30°$
অতএব, $F_{min} = 1000$ N এবং প্রতিক্রিয়া R = 1000 N, যা CO বরাবর অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে ক্রিয়াশীল

১১. ধরি, প্রথম জাহাজ O হতে উত্তরে এবং দ্বিতীয় জাহাজ B (OB = 10 km) হতে পশ্চিমে চলে
t ঘণ্টা পর জাহাজদ্বয়ের অবস্থান A′ ও B′ হলে, OA′ = 15t, OB′ = 10 − 20t
OA′ ⊥ OB′, তাই দূরত্ব x হলে, $x^2 = (15t)^2 + (10 - 20t)^2$
$\Rightarrow x^2 = 625t^2 - 400t + 100$
$\frac{d(x^2)}{dt} = 1250t - 400 = 0$
$\Rightarrow t = \frac{400}{1250} = 0.32$ h = 19.2 min
$\frac{d^2(x^2)}{dt^2} = 1250 > 0$, তাই এটি ন্যূনতম
$x^2_{min} = 625(0.32)^2 - 400(0.32) + 100 = 64 - 128 + 100 = 36$
$\Rightarrow x_{min} = 6$ km
অতএব, 19.2 min পর জাহাজ দুইটি নিকটতম হবে এবং তখন দূরত্ব 6 km

১২. নৌকার বেগ $v = 5\,\text{kmh}^{-1}$, স্রোতের বেগ $u = 3\,\text{kmh}^{-1}$, প্রস্থ $d = 500\,\text{m} = 0.5\,\text{km}$
ন্যূনতম সময়ে পার হতে নৌকাকে পাড়ের লম্ব বরাবর চালাতে হয়
$t_1 = \frac{d}{v} = \frac{0.5}{5} = 0.1\,\text{h} = 6\,\text{min}$
ন্যূনতম পথে পার হতে লব্ধি বেগ পাড়ের লম্ব বরাবর হতে হয়; তখন লব্ধি বেগ $= \sqrt{v^2 - u^2} = \sqrt{25 - 9} = 4\,\text{kmh}^{-1}$
$t_2 = \frac{0.5}{4} = 0.125\,\text{h} = 7.5\,\text{min}$
$\therefore$ সময়ের পার্থক্য $= t_2 - t_1 = 7.5 - 6 = 1.5\,\text{min}$
প্রথম নৌকা ভাটিতে সরে যায় $= ut_1 = 3 \times 0.1 = 0.3\,\text{km} = 300\,\text{m}$

১৩. ধরি, মোট দূরত্ব s, সর্বোচ্চ বেগ V এবং তিন অংশের সময় যথাক্রমে t_1, t_2, t_3; ট্রেনটি স্থির অবস্থা হতে শুরু করে এবং স্থির অবস্থায় থামে
v–t লেখচিত্রের নিচের ক্ষেত্রফল = দূরত্ব
১ম অংশ: $\frac{s}{4} = \frac{1}{2}V\,t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{s}{2V}$
২য় অংশ: $\frac{s}{2} = V\,t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{s}{2V}$
৩য় অংশ: $\frac{s}{4} = \frac{1}{2}V\,t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{s}{2V}$
মোট সময় $T = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3s}{2V}$
গড়বেগ $\bar{v} = \frac{s}{T} = \frac{2V}{3}$
$\therefore \bar{v} : V = 2 : 3$

১৪. সাইকেলের প্রাথমিক অবস্থানকে মূলবিন্দু ধরি। t সময় পর, সাইকেলের অবস্থান $x_c = 24t$
বাসের অবস্থান $x_b = 40 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 = 40 + 2t^2$
মিলিত হলে $x_c = x_b$: $24t = 40 + 2t^2$
$\Rightarrow t^2 - 12t + 20 = 0$
$\Rightarrow (t - 2)(t - 10) = 0$
$\therefore t = 2\,\text{s}$ এবং $t = 10\,\text{s}$; অর্থাৎ যাত্রা শুরুর 2 s পর সাইকেল বাসকে অতিক্রম করে এবং 10 s পর বাস পুনরায় সাইকেলকে ধরে ফেলে
$2 < t < 10$ এ ব্যবধান $D = x_c - x_b = 24t - 40 - 2t^2$
$\frac{dD}{dt} = 24 - 4t = 0 \Rightarrow t = 6\,\text{s}$ (তখন উভয়ের বেগ সমান) এবং $\frac{d^2D}{dt^2} = -4 < 0$
$D_{max} = 24 \times 6 - 40 - 2 \times 36 = 144 - 40 - 72 = 32\,\text{m}$
অতএব, সাইকেল আরোহী বাস থেকে সর্বোচ্চ 32 m এগিয়ে থাকবে

১৫. ধরি, মোট পতনকাল T এবং উচ্চতা H
পাথরটি T সময়ে $H = \frac{1}{2}gT^2$ এবং $(T - t)$ সময়ে $\frac{1}{2}g(T - t)^2$ দূরত্ব অতিক্রম করে
শর্তমতে, $h = \frac{1}{2}gT^2 - \frac{1}{2}g(T - t)^2 = gTt - \frac{1}{2}gt^2$
$\Rightarrow T = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{gt} = \frac{h}{gt} + \frac{t}{2}$ (দেখানো হলো)
$h = 78.4\,\text{m}$, $t = 2\,\text{s}$ হলে, $T = \frac{78.4}{9.8 \times 2} + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5\,\text{s}$
$\therefore H = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 = 122.5\,\text{m}$

১৬. প্রথম কণার বৃহত্তম উচ্চতা $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{200^2}{2 \times 9.8} = \frac{100000}{49} \approx 2040.82\,\text{m}$
সেখানে পৌঁছানোর সময় $t_1 = \frac{u}{g} = \frac{200}{9.8} = \frac{1000}{49} \approx 20.41\,\text{s}$
দ্বিতীয় কণা 10 s পরে ছাড়া হয়, তাই H উচ্চতায় পৌঁছাতে এর সময় $t_2 = t_1 - 10 = \frac{1000}{49} - 10 = \frac{510}{49} \approx 10.41\,\text{s}$
দ্বিতীয় কণার নিক্ষেপ বেগ u' হলে, $H = u't_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$
$\Rightarrow u' = \frac{H}{t_2} + \frac{1}{2}gt_2 = \frac{100000}{510} + 4.9 \times \frac{510}{49} = 196.08 + 51$
$\therefore u' \approx 247.08\,\text{ms}^{-1}$

১৭. প্রক্ষেপকের গতিপথের সমীকরণ, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$

$u = 22\,ms^{-1}$, $\alpha = 45°$, $x = 45\,m$ বসিয়ে, $y = 45 \times 1 - \frac{9.8\times45^2}{2\times22^2\times\frac{1}{2}} = 45 - \frac{19845}{484}$

$\Rightarrow y \approx 45 - 41.00 = 4.0\,m$

অর্থাৎ দেয়ালের অবস্থানে পাথরটি ভূমি হতে মাত্র প্রায় $4\,m$ উচ্চতায় থাকে, যা $20\,m$ অপেক্ষা অনেক কম

আনুভূমিক পাল্লা $R = \frac{u^2}{g} = \frac{484}{9.8} \approx 49.4\,m > 45\,m$, তাই পাথরটি দেয়ালে পৌঁছানোর আগে মাটিতে পড়ে না

অতএব, পাথরটি দেয়াল অতিক্রম করবে না; এটি ভূমি হতে প্রায় $4\,m$ উচ্চতায় দেয়ালে আঘাত করবে

১৮. ধরি, নিক্ষেপ বেগ u এবং একটি নিক্ষেপ কোণ θ; পাল্লা $R = \frac{u^2\sin2\theta}{g}$

$\sin2\theta = \sin(180° - 2\theta) = \sin2(90° - \theta)$, তাই একই পাল্লার অপর নিক্ষেপ কোণ $(90° - \theta)$

$h = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$, $h' = \frac{u^2\sin^2(90°-\theta)}{2g} = \frac{u^2\cos^2\theta}{2g}$

$\therefore hh' = \frac{u^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{4g^2}$

$\Rightarrow \sqrt{hh'} = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{2g}$

$\Rightarrow 4\sqrt{hh'} = \frac{2u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin2\theta}{g} = R$

$\therefore R = 4\sqrt{hh'}$ **(দেখানো হলো)**

১৯. $h = 9.8\,km = 9800\,m$; বস্তুটির প্রাথমিক বেগ উড়োজাহাজের বেগের সমান ও অনুভূমিক: $u = 360\,kmh^{-1} = 100\,ms^{-1}$; উল্লম্ব আদিবেগ শূন্য

উল্লম্ব গতি: $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\times9800}{9.8}} = \sqrt{2000} \approx 44.72\,s$

অনুভূমিক দূরত্ব $x = ut = 100 \times 44.72 \approx 4472.14\,m$

সরল দূরত্ব $AB = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{(4472.14)^2 + 9800^2} \approx 10772.19\,m$

অতএব, বস্তুটি $44.72\,s$ পর ভূমিতে পড়বে, খাড়া নিচের বিন্দু হতে $4472.14\,m$ দূরে এবং ছেড়ে দেওয়ার বিন্দু হতে সরল দূরত্ব $10772.19\,m$

২০. বস্তুটি স্থির থাকায় এর উপর বলের সাম্যে, রশির টান $T = 51g$

পুলি মসৃণ ও রশি হালকা, তাই বালকের দিকেও টান T

বালকের ত্বরণ a হলে, $4.9 = 0 + \frac{1}{2}a(4)^2 \Rightarrow a = \frac{4.9}{8} = 0.6125\,ms^{-2}$ **(উপরের দিকে)**

বালকের ভর m হলে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুসারে, $T - mg = ma$

$\Rightarrow m = \frac{T}{g+a}$

$\therefore m = \frac{51\times9.8}{9.8+0.6125} = \frac{499.8}{10.4125} = 48\,kg$

Physics ২০০ নম্বর

২১. **(ক)**

এখানে, $k = 2.4\,radm^{-1}$ এবং $\omega = 7.2 \times 10^8\,rads^{-1}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2.4} = 2.62\,m$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7.2\times10^8}{2\pi} = 1.15 \times 10^8\,Hz$

$v = \frac{\omega}{k} = \frac{7.2\times10^8}{2.4} = 3 \times 10^8\,ms^{-1}$

(খ)

এখানে, $E_0 = 5.4\,Vm^{-1}$

$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{5.4}{3\times10^8} = 1.8 \times 10^{-8}\,T$

তরঙ্গ $+x$ দিকে চলমান এবং $\vec{E} \parallel \hat{j}$, তাই $\vec{E} \times \vec{B} \parallel \hat{i}$ হতে হবে

যেহেতু $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, সুতরাং $\vec{B} \parallel \hat{k}$

অতএব, $\vec{B} = 1.8 \times 10^{-8}\sin(2.4x - 7.2 \times 10^8 t)\,\hat{k}\,T$

(গ)

$I = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{5.4\times1.8\times10^{-8}}{2\times4\pi\times10^{-7}} = 0.0387\ \mathrm{Wm^{-2}}$

$u = \frac{I}{c} = \frac{0.0387}{3\times10^8} = 1.29\times10^{-10}\ \mathrm{Jm^{-3}}$

২২. (ক)

$\beta = \frac{\lambda D}{a} = \frac{560\times10^{-9}\times1.25}{0.5\times10^{-3}} = 1.4\ \mathrm{mm}$

$\sin\theta_5 = \frac{5\lambda}{a} = \frac{5\times560\times10^{-9}}{0.5\times10^{-3}} = 5.6\times10^{-3}$

$\theta_5 = 0.321°$

(খ)

পঞ্চম অন্ধকার ডোরার অবস্থান $x_D = \left(4+\frac{1}{2}\right)\beta = 4.5\beta$

দ্বিতীয় উজ্জ্বল ডোরার অবস্থান $x_B = 2\beta$

দূরত্ব $= 4.5\beta - 2\beta = 2.5\beta = 2.5\times1.4 = 3.5\ \mathrm{mm}$

(গ)

$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{1.96\times10^{-6}}{560\times10^{-9}} = 3.5$

পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$ এর বিজোড় গুণিতক, সুতরাং অন্ধকার ডোরা (চতুর্থ অন্ধকার ডোরা) গঠিত হবে

দশা পার্থক্য $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta = 2\pi\times3.5 = 7\pi$

২৩. (ক)

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{5\times10^{14}} = 600\ \mathrm{nm}$

$a = \frac{\lambda D}{\beta} = \frac{600\times10^{-9}\times1.5}{0.6\times10^{-3}} = 1.5\ \mathrm{mm}$

(খ)

এখানে, $\Delta D = 0.3\ \mathrm{m}$

$\Delta\beta = \frac{\lambda\Delta D}{a} = \frac{600\times10^{-9}\times0.3}{1.5\times10^{-3}} = 0.12\ \mathrm{mm}$

অতএব, ডোরা ব্যবধান 0.12 mm হ্রাস পাবে

(গ)

$\beta' = \frac{\beta}{\mu} = \frac{0.6}{1.2} = 0.5\ \mathrm{mm}$

ডোরার সংখ্যা $\propto \frac{1}{\beta}$

$n' = 30\times\frac{\beta}{\beta'} = 30\times1.2 = 36$টি

২৪. (ক)

$I = I_0\cos^2\frac{\phi}{2}$

$\frac{I_0}{2} = I_0\cos^2\frac{\phi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\phi = \frac{\pi}{2}$, সুতরাং পথ পার্থক্য $\Delta = \frac{\lambda}{4}$

$x = \frac{\Delta D}{a} = \frac{\lambda D}{4a} = \frac{540\times10^{-9}\times1.2}{4\times0.6\times10^{-3}} = 0.27\ \mathrm{mm}$

(খ)

$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{6} = \frac{\pi}{3}$

$I = I_0\cos^2\frac{\pi}{6} = I_0\times\frac{3}{4} = \frac{3}{4}I_0$

(গ)

ধরি, প্রথম চিড়ের তীব্রতা $I_1 = I$

প্রশ্নমতে, দ্বিতীয় চিড়ের তীব্রতা $I_2 = I - 0.75I = 0.25I$

$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{\frac{1}{0.25}} = 2$

$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{(a_1+a_2)^2}{(a_1-a_2)^2} = \frac{(2+1)^2}{(2-1)^2} = 9:1$

২৫. (ক)

$(\mu - 1)t = n\lambda$

$t = \frac{n\lambda}{\mu - 1} = \frac{4 \times 600 \times 10^{-9}}{1.5 - 1} = 4.8\,\mu m$

(খ)

$\beta = \frac{\lambda D}{a} = \frac{600 \times 10^{-9} \times 1.0}{0.4 \times 10^{-3}} = 1.5\,mm$

সরণ $= n\beta = 4 \times 1.5 = 6\,mm$

ডোরা ব্যবধান $\beta = \frac{\lambda D}{a}$ এর মধ্যে পাতের কোনো রাশি নেই, তাই ডোরা ব্যবধান অপরিবর্তিত (1.5 mm) থাকে

(গ)

$(\mu' - 1)t = 3\lambda$

$\mu' = 1 + \frac{3\lambda}{t} = 1 + \frac{3 \times 600 \times 10^{-9}}{4.8 \times 10^{-6}} = 1.375$

২৬. (ক)

$x_1 = \frac{\lambda D}{a} = \frac{600 \times 10^{-9} \times 1.2}{0.2 \times 10^{-3}} = 3.6\,mm$

কেন্দ্রীয় চরমের প্রস্থ $= 2x_1 = 2 \times 3.6 = 7.2\,mm$

(খ)

দ্বিতীয় গৌণ চরমের শর্ত: $a \sin\theta = \frac{5\lambda}{2}$

$\sin\theta = \frac{5 \times 600 \times 10^{-9}}{2 \times 0.2 \times 10^{-3}} = 7.5 \times 10^{-3}$

$\theta = 0.43°$

(গ)

তৃতীয় গৌণ চরমের অবস্থান $x = \frac{7\lambda D}{2a} = \frac{7 \times 600 \times 10^{-9} \times 1.2}{2 \times 0.2 \times 10^{-3}} = 12.6\,mm$

প্রথম অবমের অবস্থান $x_1 = 3.6\,mm$

দূরত্ব $= 12.6 - 3.6 = 9\,mm$

তরলে $\lambda' = \frac{\lambda}{1.5}$, তাই প্রস্থ $= \frac{7.2}{1.5} = 4.8\,mm$

২৭. (ক)

$N = 6000\,cm^{-1} = 6 \times 10^5\,m^{-1}$

$d = \frac{1}{N} = \frac{1}{6 \times 10^5} = 1.67 \times 10^{-6}\,m$

$\sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{d} = \frac{2 \times 500 \times 10^{-9}}{1.67 \times 10^{-6}} = 0.6$

$\theta_2 = 36.87°$

(খ)

$n_{max} < \frac{d}{\lambda} = \frac{1.67 \times 10^{-6}}{500 \times 10^{-9}} = 3.33$

অতএব, সর্বোচ্চ ক্রম $n_{max} = 3$

মোট চরম $= 2 \times 3 + 1 = 7$টি

(গ)

$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2 \times 589.0 \times 10^{-9}}{1.67 \times 10^{-6}}\right) = 44.975°$

$\theta' = \sin^{-1}\left(\frac{2 \times 589.6 \times 10^{-9}}{1.67 \times 10^{-6}}\right) = 45.033°$

$\Delta\theta = \theta' - \theta = 0.058°$

২৮. (ক)

$I_1 = \frac{I_0}{2} = \frac{100}{2} = 50\ \mathrm{Wm^{-2}}$

$I_2 = I_1 \cos^2 60° = 50 \times \frac{1}{4} = 12.5\ \mathrm{Wm^{-2}}$

P_2 ও P_3 এর অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ $= 90° - 60° = 30°$

$I_3 = I_2 \cos^2 30° = 12.5 \times \frac{3}{4} = 9.375\ \mathrm{Wm^{-2}}$

(খ)

P_1 ও P_3 এর অক্ষ পরস্পর লম্ব

$I = I_1 \cos^2 90° = 50 \times 0 = 0$

অতএব, নির্গত তীব্রতা শূন্য, কারণ P_1 থেকে নির্গত সমবর্তিত আলোর কম্পন P_3 এর অক্ষের সাথে লম্ব

(গ)

ধরি, P_2 এর অক্ষ P_1 এর সাথে θ কোণে আনত

$I = \frac{I_0}{2} \cos^2\theta \cos^2(90° - \theta) = \frac{I_0}{2} \cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\theta$

I সর্বোচ্চ হয় যখন $\sin 2\theta = 1$, অর্থাৎ $\theta = 45°$

$I_{max} = \frac{I_0}{8} = \frac{100}{8} = 12.5\ \mathrm{Wm^{-2}}$

২৯. (ক)

$\mu = \tan\theta_p = \tan 56.3° = 1.5$

$r = 90° - \theta_p = 90° - 56.3° = 33.7°$

(খ)

$\sin\theta_c = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{1.5}$

$\theta_c = 41.8°$

প্রমাণ: $\csc\theta_c = \frac{1}{\sin\theta_c} = \mu$ এবং $\tan\theta_p = \mu$

অতএব, $\tan\theta_p = \csc\theta_c$

(গ)

$\tan\theta_p' = \frac{\mu}{\mu_w} = \frac{1.5}{\frac{4}{3}} = 1.125$

$\theta_p' = 48.4°$

$v = \frac{c}{\mu} = \frac{3\times10^8}{1.5} = 2 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}}$

৩০. (ক)

উজ্জ্বলের শর্ত: $2\mu t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$

$t_1 = \frac{\lambda}{4\mu} = \frac{600}{4\times1.33} = 112.8\ \mathrm{nm}$

$t_2 = \frac{3\lambda}{4\mu} = \frac{3\times600}{4\times1.33} = 338.3\ \mathrm{nm}$

(খ)

অন্ধকারের শর্ত: $2\mu t = m\lambda$

$t = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{600}{2\times1.33} = 225.6\ \mathrm{nm}$

(গ)

এখানে, $2\mu t = 2 \times 1.33 \times 450 = 1197\ \mathrm{nm}$

উজ্জ্বলের শর্ত: $1197 = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$, অর্থাৎ $\lambda = \frac{2394}{2m-1}\ \mathrm{nm}$

$m = 1, 2, 3, 4$ এর জন্য $\lambda = 2394,\ 798,\ 478.8,\ 342\ \mathrm{nm}$

দৃশ্যমান পরিসরে কেবল 478.8 nm তীব্রতম হবে

অন্ধকারের শর্ত: $1197 = m\lambda$, অর্থাৎ $\lambda = \frac{1197}{m}\ \mathrm{nm}$

$m = 1, 2, 3$ এর জন্য $\lambda = 1197,\ 598.5,\ 399\ \mathrm{nm}$

399 nm দৃশ্যমান সীমার (400 nm) সামান্য নিচে, সুতরাং দৃশ্যমান পরিসরে কেবল 598.5 nm অনুপস্থিত থাকবে

৩১. **(ক)**

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-0.6^2} = 0.8$

$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 80 \times 0.8 = 64\,m$

$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{0.8} = 1.25$ দিন

(খ)

$t_0 = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 20 \times 0.8 = 16$ বছর

নভোচারীর বয়স = 25 + 16 = 41 বছর

(গ)

সুড়ঙ্গের কাঠামোয়: যানের দৈর্ঘ্য 64 m, যা সুড়ঙ্গের 70 m এর চেয়ে কম, তাই যান সম্পূর্ণ ভেতরে থাকতে পারে

নভোচারীর কাঠামোয়: সুড়ঙ্গের দৈর্ঘ্য $70 \times 0.8 = 56$ m, যা যানের 80 m এর চেয়ে কম, তাই যান সম্পূর্ণ ভেতরে থাকতে পারে না

যুগপৎতা আপেক্ষিক বলে দুটি সিদ্ধান্তই নিজ নিজ কাঠামোয় সঠিক

৩২. **(ক)**

$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{0.96} = 12.5$ বছর

$\sqrt{1-0.96^2} = 0.28$

$t_0 = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 12.5 \times 0.28 = 3.5$ বছর

(খ)

$L = d\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 12 \times 0.28 = 3.36$ আলোকবর্ষ

$t_0 = \frac{L}{v} = \frac{3.36}{0.96} = 3.5$ বছর, যা **(ক)** এর ফলের সাথে মিলে যায়

(গ)

পৃথিবীর ভাইয়ের বয়স = $30 + 2 \times 12.5 = 55$ বছর

নভোচারীর বয়স = $30 + 2 \times 3.5 = 37$ বছর

বয়সের পার্থক্য = $55 - 37 = 18$ বছর

৩৩. **(ক)**

$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = 0 \Rightarrow v = \frac{c^2\Delta t}{\Delta x}$

$v = \frac{9\times10^{16}\times3}{6\times10^8} = 4.5 \times 10^8\ ms^{-1}$

এখানে $v > c$, তাই এমন কোনো কাঠামো সম্ভব নয়

(খ)

$c\Delta t = 3 \times 10^8 \times 3 = 9 \times 10^8$ m, যা $\Delta x = 6 \times 10^8$ m এর চেয়ে বড়

আলো এই সময়ে দূরত্বটি অতিক্রম করতে পারে, তাই কার্যকারণ সম্পর্ক সম্ভব

এ কারণে কোনো কাঠামোয় ঘটনা দুটি যুগপৎ হয় না এবং তাদের ক্রমও উল্টায় না

(গ)

$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)$

ধরি, $v = \beta c$; এখানে $\frac{\Delta x}{c} = \frac{6\times10^8}{3\times10^8} = 2$ s

প্রশ্নমতে, $2 = \frac{3-2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

বা, $2\sqrt{1-\beta^2} = 3 - 2\beta$

বর্গ করে, $4 - 4\beta^2 = 9 - 12\beta + 4\beta^2$

বা, $8\beta^2 - 12\beta + 5 = 0$

নিশ্চায়ক = $144 - 160 = -16$, যা ঋণাত্মক

অতএব, β এর কোনো বাস্তব মান নেই, তাই 2 s ব্যবধান পরিমাপ করা সম্ভব নয়

ন্যূনতম সময় ব্যবধান = $\sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} = 2.24$ s

৩৪. (ক)

ধরি, **A** এর দিক ধনাত্মক; তাহলে **B** এর বেগ পৃথিবীর সাপেক্ষে $-0.8c$ এবং **A** এর বেগ $v_A = 0.9c$

$u_{BA} = \frac{u_B - v_A}{1 - \frac{u_B v_A}{c^2}} = \frac{-0.8c - 0.9c}{1 - (-0.8)(0.9)} = \frac{-1.7c}{1.72}$

$u_{BA} = -0.9884c$, অর্থাৎ মান $0.9884c$

(খ)

$\sqrt{1 - 0.9884^2} = 0.1521$

$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{5}{0.1521} = 32.88\,\text{min}$

(গ)

$L = L_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 120 \times 0.1521 = 18.25\,\text{m}$

$t = \frac{L}{u} = \frac{18.25}{0.9884 \times 3 \times 10^8} = 6.15 \times 10^{-8}\,\text{s}$

৩৫. (ক)

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.6^2}} = 1.25$

$m = \gamma m_0 = 1.25 \times 9.1 \times 10^{-31} = 1.14 \times 10^{-30}\,\text{kg}$

শতকরা বৃদ্ধি $= \frac{m - m_0}{m_0} \times 100 = (1.25 - 1) \times 100 = 25\%$

(খ)

$E = \gamma E_0 = 1.25 \times 0.511 = 0.6388\,\text{MeV}$

$K = E - E_0 = 0.6388 - 0.511 = 0.1278\,\text{MeV}$

নিউটনীয়: $K_N = \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2} \times 0.6^2 E_0 = 0.18 \times 0.511 = 0.0920\,\text{MeV}$

আপেক্ষিক গতিশক্তি নিউটনীয় মানের চেয়ে বেশি

(গ)

$V = \frac{K}{e} = \frac{0.1278 \times 10^6\,\text{eV}}{e} = 1.278 \times 10^5\,\text{V}$

$p = \gamma m_0 v = 1.25 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 0.6 \times 3 \times 10^8 = 2.05 \times 10^{-22}\,\text{kgms}^{-1}$

$pc = \gamma\beta E_0 = 1.25 \times 0.6 \times 0.511 = 0.3832\,\text{MeV}$

$p^2c^2 + E_0^2 = 0.3832^2 + 0.511^2 = 0.1468 + 0.2611 = 0.4079\,\text{MeV}^2$

$E^2 = 0.6388^2 = 0.4081\,\text{MeV}^2$

অতএব, $E^2 = p^2c^2 + E_0^2$ সম্পর্কটি সঠিক

৩৬. (ক)

$E = Pt = 800 \times 10^6 \times 365 \times 86400 = 2.52 \times 10^{16}\,\text{J}$

$m = \frac{E}{c^2} = \frac{2.52 \times 10^{16}}{9 \times 10^{16}} = 0.28\,\text{kg}$

(খ)

$Q = ms\Delta T = 2 \times 4200 \times (80 - 20) = 5.04 \times 10^5\,\text{J}$

$\Delta m = \frac{Q}{c^2} = \frac{5.04 \times 10^5}{9 \times 10^{16}} = 5.6 \times 10^{-12}\,\text{kg}$

(গ)

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = \frac{1}{0.6}$

শক্তি সংরক্ষণ: $M_0c^2 = 2\gamma m_0 c^2$

$M_0 = \frac{2 \times 2}{0.6} = 6.67\,\text{kg}$

গতিশক্তিতে রূপান্তরিত ভর $= M_0 - 2m_0 = 6.67 - 4 = 2.67\,\text{kg}$

৩৭. (ক)

ঢাল $= \frac{h}{e} = \frac{6.14-2.0}{2.5\times10^{15}-1.5\times10^{15}} = 4.14 \times 10^{-15}$ Vs

$h = 4.14 \times 10^{-15} \times 1.6 \times 10^{-19} = 6.624 \times 10^{-34}$ Js

(খ)

$V_s = \frac{h}{e}(f - f_0)$

$2.0 = 4.14 \times 10^{-15} \left(1.5 \times 10^{15} - f_0\right)$

$f_0 = 1.02 \times 10^{15}$ Hz

$\phi = hf_0 = 4.14 \times 10^{-15} \times 1.02 \times 10^{15} = 4.21$ eV

(গ)

আইনস্টাইনের সমীকরণ: $eV_s = hf - \phi$, অর্থাৎ $V_s = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}$

ঢাল $\frac{h}{e}$ একটি সর্বজনীন ধ্রুবক, যা ধাতুর ওপর নির্ভর করে না

অতএব, ভিন্ন ধাতুর লেখচিত্র একই ঢালবিশিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখা হবে, কেবল f অক্ষের ছেদবিন্দু (f_0) ভিন্ন হবে

সুতরাং দুটি ধাতুর লেখচিত্রের ঢাল ভিন্ন হতে পারে না

৩৮. (ক)

$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.626\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{532\times10^{-9}} = 3.74 \times 10^{-19}$ J

$E = \frac{3.74\times10^{-19}}{1.6\times10^{-19}} = 2.34$ eV

$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.626\times10^{-34}}{532\times10^{-9}} = 1.25 \times 10^{-27}$ kgms^{-1}

(খ)

$n = \frac{P}{E} = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{5\times10^{-3}}{3.74\times10^{-19}} = 1.34 \times 10^{16}$ s^{-1}

(গ)

$I = 0.005\, n\, e = 0.005 \times 1.34 \times 10^{16} \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.07 \times 10^{-5}$ A

$K_{max} = E - \phi = 2.34 - 2.0 = 0.34$ eV $= 0.34 \times 1.6 \times 10^{-19}$ J

$v_{max} = \sqrt{\frac{2K_{max}}{m}} = \sqrt{\frac{2\times0.34\times1.6\times10^{-19}}{9.1\times10^{-31}}} = 3.43 \times 10^{5}$ ms^{-1}

৩৯. (ক)

$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \frac{6.626\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\times3\times10^{8}}(1 - \cos 90°) = 2.43 \times 10^{-12}$ m

$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 0.04 + 0.00243 = 0.04243$ nm

$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1.9878\times10^{-25}}{4.243\times10^{-11}} = 4.685 \times 10^{-15}$ J $= 29.28$ keV

(খ)

$K = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 4.970 \times 10^{-15} - 4.685 \times 10^{-15} = 2.84 \times 10^{-16}$ J

$K = \frac{2.84\times10^{-16}}{1.6\times10^{-19}} = 1777$ eV

(গ)

ধরি, ইলেকট্রন আপতিত ফোটনের দিকের সাথে ϕ কোণে এবং ফোটন 90° কোণে বিক্ষিপ্ত হয়

আপতিত দিক বরাবর: $\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos 90° + p\cos\phi = p\cos\phi$

লম্ব দিক বরাবর: $0 = \frac{h}{\lambda'}\sin 90° - p\sin\phi$

ভাগ করে, $\tan\phi = \frac{\frac{h}{\lambda'}}{\frac{h}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{0.04}{0.04243} = 0.9427$

$\phi = 43.3°$, ফোটনের বিপরীত পাশে

৪০. (ক)

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mqV}}$

$\lambda_p = \frac{6.626\times10^{-34}}{\sqrt{2\times1.67\times10^{-27}\times1.6\times10^{-19}\times1000}} = 9.06\times10^{-13}\,m$

(খ)

$\frac{\lambda_p}{\lambda_\alpha} = \sqrt{\frac{m_\alpha q_\alpha}{m_p q_p}} = \sqrt{\frac{4m_p\times2e}{m_p\times e}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

(গ)

সংঘর্ষের পর প্রথম কণার বেগ $v_1 = \frac{m-3m}{m+3m}v = -\frac{v}{2}$

দ্বিতীয় কণার বেগ $v_2 = \frac{2m}{m+3m}v = \frac{v}{2}$

ভরবেগের মান $p_1 = m\times\frac{v}{2} = \frac{mv}{2}$ এবং $p_2 = 3m\times\frac{v}{2} = \frac{3mv}{2}$

$\lambda \propto \frac{1}{p}$, সুতরাং $\lambda_1 : \lambda_2 = p_2 : p_1 = 3 : 1$

Chemistry

২০০ নম্বর

৪১. একই T, P ও V -তে সকল গ্যাসের মোল সংখ্যা n সমান

ধরি, শূন্য পাত্রের ভর = w g এবং প্রতিটি গ্যাসের মোল সংখ্যা = n

মিথেনের ক্ষেত্রে, $w + 16n = 51.20$ **...(i)**

অক্সিজেনের ক্ষেত্রে, $w + 32n = 53.60$ **...(ii)**

(ii) − (i) থেকে, $16n = 2.40$

$\therefore n = 0.15\,mol$

আবার, $w = 51.20 - 16\times0.15 = 48.80\,g$

অজ্ঞাত গ্যাসের ভর = $49.40 - 48.80 = 0.60\,g$

$\therefore M = \frac{0.60}{0.15} = 4\,gmol^{-1}$

নিষ্ক্রিয় গ্যাস ও $M = 4$ হওয়ায় গ্যাসটি হিলিয়াম **(He)**

৪২. **(ক)** এখানে, $P = \frac{650}{760}\times101325 = 86659.5\,Pa$

আমরা জানি, $P = \frac{1}{3}\rho C^2$

$\therefore \rho = \frac{3P}{C^2} = \frac{3\times86659.5}{(515.0)^2} = 0.9802\,kgm^{-3}$

(খ) এখানে, $T = 27 + 273 = 300\,K$

আমরা জানি, $C = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

$\therefore M = \frac{3RT}{C^2} = \frac{3\times8.314\times300}{(515.0)^2} = 0.02821\,kgmol^{-1} = 28.2\,gmol^{-1}$

আণবিক ভর ≈ 28 হওয়ায় গ্যাসটি নাইট্রোজেন **(N_2)**

৪৩. বিক্রিয়া অনুসারে, $O_2 \equiv 4Na_2S_2O_3$

আমরা জানি, $DO = \frac{M\times V\times8\times1000}{V_s}$ ppm **(এখানে V ও V_s উভয়ই mL এককে এবং V_s = নমুনার আয়তন)**

প্রাথমিক $DO = \frac{0.0125\times P\times8\times1000}{250} = 0.4P$ ppm

5 দিন পর $DO = \frac{0.0125\times7.2\times8\times1000}{250} = 2.88$ ppm

প্রশ্নমতে, $BOD = 0.4P - 2.88 \le 6$

বা, $0.4P \le 8.88$

বা, $P \le 22.2$

অতএব, P এর সর্বোচ্চ মান 22.2 mL

৪৪. **(ক)** এখানে, $V = 150\,L = 0.150\,m^3$, $T = 60 + 273 = 333\,K$, $n = 1200\,mol$
আমরা জানি, $P = \frac{nRT}{V}$
$\therefore P = \frac{1200\times8.314\times333}{0.150} = 2.215 \times 10^7\,Pa = 22.15\,MPa$
$22.15\,MPa > 20\,MPa$
অতএব, সিলিন্ডারটি নিরাপদ নয়
(খ) প্রশ্নমতে, $P_{max} = 20\,MPa = 20 \times 10^6\,Pa$
$\therefore n_{max} = \frac{P_{max}V}{RT} = \frac{20\times10^6\times0.150}{8.314\times333} = 1083.6\,mol$
অতএব, সর্বোচ্চ $1083.6\,mol\ N_2$ নিরাপদে রাখা যাবে

৪৫. এখানে, ব্যাসার্ধ $r = 0.01\,cm = 1.0 \times 10^{-4}\,m$
আয়তন $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.1416 \times (1.0 \times 10^{-4})^3 = 4.189 \times 10^{-12}\,m^3$
$T = \frac{5}{9}(99.5 - 32) + 273.15 = 310.65\,K$
$P = 0.98 \times 101325 = 99298.5\,Pa$
আমরা জানি, $n = \frac{PV}{RT}$
$\therefore n = \frac{99298.5\times4.189\times10^{-12}}{8.314\times310.65} = 1.610 \times 10^{-10}\,mol$
O_2 এর মোল $= 0.13 \times 1.610 \times 10^{-10} = 2.094 \times 10^{-11}\,mol$
O_2 অণুর সংখ্যা $= 2.094 \times 10^{-11} \times 6.023 \times 10^{23} = 1.261 \times 10^{13}$ টি
অতএব, একটি অ্যালভিওলাসে O_2 অণুর সংখ্যা 1.261×10^{13} টি

৪৬. **(ক)** এখানে, $T_1 = 27 + 273 = 300\,K$, $P_1 = 180\,kPa$
আয়তন স্থির, তাই $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$
গলনাঙ্ক $T_2 = 1700\,K$ এ চাপ হতো, $P_2 = 180 \times \frac{1700}{300} = 1020\,kPa$
$1020\,kPa > 900\,kPa$
অতএব, সিলিন্ডারটি গলার আগেই বিস্ফোরিত হবে
(খ) বিস্ফোরণের সময় $P_2 = 900\,kPa$
$\therefore T_2 = T_1 \times \frac{P_2}{P_1} = 300 \times \frac{900}{180} = 1500\,K$
অতএব, বিস্ফোরণের তাপমাত্রা $1500\,K$ **(**$= 1227°C$**)**

৪৭. **(ক)** এখানে, $n_{N_2} = \frac{1.80}{28} = 0.06429\,mol$, $T = 30 + 273.15 = 303.15\,K$, $V = 2.0\,L$
আমরা জানি, $p_{N_2} = \frac{nRT}{V}$
$\therefore p_{N_2} = \frac{0.06429\times0.0821\times303.15}{2.0} = 0.8000\,atm$
$= 0.8000 \times 760 = 608.0\,mm(Hg)$
(খ) $x_{N_2} = \frac{p_{N_2}}{P} = \frac{608.0}{760} = 0.800$
অতএব, N_2 এর মোল ভগ্নাংশ 0.800

৪৮. **(ক)** ধরি, প্রাথমিক আয়তন V_1, তাহলে $V_2 = 0.6V_1$
বয়েলের সূত্রানুসারে, $P_1V_1 = P_2V_2$
$\therefore P_2 = \frac{750\times V_1}{0.6V_1} = 1250\,mm(Hg)$
চাপ বৃদ্ধি $= 1250 - 750 = 500\,mm(Hg)$
(খ) এখানে, $T_1 = 300\,K$, $T_2 = 87 + 273 = 360\,K$
আমরা জানি, $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$
$V_2 = 0.6V_1$ হওয়ায়, $P_2 = 750 \times \frac{360}{300} \times \frac{1}{0.6} = 1500\,mm(Hg)$
চাপ বৃদ্ধি $= 1500 - 750 = 750\,mm(Hg)$
অতএব, **(ক)** তে চাপ $500\,mm(Hg)$ এবং **(খ)** তে চাপ $750\,mm(Hg)$ বৃদ্ধি করতে হবে

৪৯. **(ক)** এখানে, $M_{N_2O} = 44$, $M_{NO_2} = 46$, $T_{NO_2} = 100 + 273.15 = 373.15\,K$

শর্তমতে, $\sqrt{\frac{3RT_1}{M_1}} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M_2}}$

বা, $\frac{T_1}{M_1} = \frac{T_2}{M_2}$

$\therefore T_{N_2O} = 373.15 \times \frac{44}{46} = 356.93\,K = 83.78°C$

(খ) $C = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3\times8.314\times373.15}{0.046}} = 449.8\,ms^{-1}$

অতএব, N_2O গ্যাসের তাপমাত্রা $83.78°C$ এবং সাধারণ বর্গমূল গড় বর্গবেগ $449.8\,ms^{-1}$

৫০. এখানে, $P_1 = 100.5\,kPa$, $T_1 = 25 + 273.15 = 298.15\,K$, $T_2 = -20 + 273.15 = 253.15\,K$

আমরা জানি, $\rho = \frac{PM}{RT}$

ঘনত্ব স্থির হলে $\frac{P}{T}$ স্থির, অর্থাৎ $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$

$\therefore P_2 = 100.5 \times \frac{253.15}{298.15} = 85.33\,kPa$

প্রমাণ চাপ $= 101.325\,kPa$

$\therefore$ পার্থক্য $= 101.325 - 85.33 = 15.99\,kPa$

অতএব, পর্বতশৃঙ্গে চাপ $85.33\,kPa$, যা প্রমাণ চাপ অপেক্ষা $15.99\,kPa$ কম

৫১. বিক্রিয়া: $Zn + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2$

$1.2\,N\ H_2SO_4 = 0.6\,M$ (কারণ H_2SO_4 এর তুল্য সংখ্যা 2)

H_2SO_4 এর মোল $= 0.6 \times 2.0 = 1.2\,mol$

Zn এর মোল $= \frac{50}{65.4} = 0.7645\,mol$

বিক্রিয়ায় $1\,mol\ Zn$ এর জন্য $1\,mol\ H_2SO_4$ লাগে; Zn কম থাকায় এটিই সীমিতকারী বিক্রিয়ক

$\therefore n_{H_2} = 0.7645\,mol$

এখানে, $P = \frac{750}{760}\,atm$, $T = 30 + 273.15 = 303.15\,K$

$\therefore V = \frac{nRT}{P} = \frac{0.7645\times0.0821\times303.15}{\frac{750}{760}} = 19.28\,L$

অতএব, উৎপন্ন শুষ্ক H_2 গ্যাসের আয়তন $19.28\,L$

৫২. আমরা জানি, $PV = nRT$

P ও V একই হওয়ায় $n_1T_1 = n_2T_2$

এখানে, $n_{He} = \frac{0.20}{4} = 0.05\,mol$, $T_{He} = 280\,K$, $T_X = 320\,K$

$\therefore n_X = n_{He} \times \frac{T_{He}}{T_X} = 0.05 \times \frac{280}{320} = 0.04375\,mol$

$M_X = \frac{2.80}{0.04375} = 64.0\,gmol^{-1}$

SO_2 এর আণবিক ভর 64, SO_3 এর 80 এবং Cl_2 এর 71

সুতরাং, অজ্ঞাত গ্যাসটি SO_2

৫৩. **(ক)** মোট আয়তন $V = 4 + 6 = 10\,m^3$

$P = \frac{P_1V_1+P_2V_2}{V_1+V_2} = \frac{120\times4+80\times6}{10} = 96.0\,kPa$

অতএব, মিশ্রণের চাপ $96.0\,kPa$

(খ) এখানে, $T_1 = 300\,K$, $T_2 = 87 + 273 = 360\,K$

আয়তন স্থির, তাই $P' = P \times \frac{T_2}{T_1} = 96.0 \times \frac{360}{300} = 115.2\,kPa$

মোল অনুপাত $n_{N_2} : n_{O_2} = 120 \times 4 : 80 \times 6 = 480 : 480 = 1 : 1$

$\therefore p_{N_2} = p_{O_2} = \frac{115.2}{2} = 57.6\,kPa$

অতএব, মোট চাপ $115.2\,kPa$ এবং প্রতিটি গ্যাসের আংশিক চাপ $57.6\,kPa$

৫৪. সর্বোচ্চ আয়তন $V_{max} = 3.0 \times \frac{4}{3} = 4.0\ dm^3$

(ক) এখানে, $V_1 = 3.0\ dm^3$, $T_1 = 7 + 273 = 280\ K$, $T_2 = 77 + 273 = 350\ K$

চার্লসের সূত্রানুসারে, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

$\therefore V_2 = 3.0 \times \frac{350}{280} = 3.75\ dm^3$

$3.75\ dm^3 < 4.0\ dm^3$

অতএব, বেলুনটি ফাটবে না

(খ) $V_2 = V_{max} = 4.0\ dm^3$ হলে বেলুনটি ফাটবে

$\therefore T_2 = T_1 \times \frac{V_2}{V_1} = 280 \times \frac{4.0}{3.0} = 373.3\ K = 100.3°C$

অতএব, ন্যূনতম 100.3°C তাপমাত্রায় বেলুনটি ফেটে যাবে

৫৫. **(ক)** $n = \frac{48}{32} = 1.5\ mol$

ভ্যান্ডার ওয়ালস সমীকরণ: $\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$

মান বসিয়ে, $\left(P + \frac{2.25a}{V^2}\right)(V - 1.5b) = 1.5RT$

a হলো আন্তঃআণবিক আকর্ষণজনিত চাপ সংশোধন ধ্রুবক; এর মান যত বেশি, আন্তঃআণবিক আকর্ষণ তত বেশি

b হলো অণুর নিজস্ব আয়তনজনিত আয়তন সংশোধন ধ্রুবক; এটি এক মোল গ্যাসের অণুগুলোর মোট নিজস্ব আয়তনের চার গুণের সমান

(খ) এখানে, $n = 1.5\ mol$, $V = 2.0\ L$, $T = 300\ K$

$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$

$\frac{nRT}{V - nb} = \frac{1.5 \times 0.0821 \times 300}{2.0 - 1.5 \times 0.0318} = \frac{36.945}{1.9523} = 18.924\ atm$

$\frac{an^2}{V^2} = \frac{1.36 \times (1.5)^2}{(2.0)^2} = 0.765\ atm$

$\therefore P = 18.924 - 0.765 = 18.159\ atm$

অতএব, ভ্যান্ডার ওয়ালস সমীকরণ অনুসারে চাপ 18.159 atm

৫৬. **(ক)** এখানে, $d = 1.30\ gdm^{-3}$, $P = 95\ kPa$, $T = 30 + 273.15 = 303.15\ K$, $R = 8.314\ dm^3 kPa mol^{-1} K^{-1}$

আমরা জানি, $M = \frac{dRT}{P}$

$\therefore M = \frac{1.30 \times 8.314 \times 303.15}{95} = 34.49\ gmol^{-1}$

(খ) 1 g গ্যাসের মোল $= \frac{1}{34.49}\ mol$

অণুর সংখ্যা $= \frac{1}{34.49} \times 6.023 \times 10^{23} = 1.746 \times 10^{22}$ টি

৫৭. **(ক)** এখানে, $V = 2.0\ dm^3 = 2000\ cm^3$

বয়েলের সূত্রানুসারে, $p = \frac{P_1V_1}{V}$

$p_{O_2} = \frac{150 \times 200}{2000} = 15.0\ kPa$

$p_{N_2} = \frac{120 \times 250}{2000} = 15.0\ kPa$

$p_{He} = \frac{90 \times 400}{2000} = 18.0\ kPa$

ডাল্টনের সূত্রানুসারে, $P = 15.0 + 15.0 + 18.0 = 48.0\ kPa$

(খ) $x_{He} = \frac{p_{He}}{P} = \frac{18.0}{48.0} = 0.375$

অতএব, মোট চাপ 48.0 kPa এবং He এর মোল ভগ্নাংশ 0.375

৫৮. **(ক)** নিঃসরণ হার $r_{HC} = \frac{300}{15} = 20.00\ mLmin^{-1}$

$r_{O_2} = \frac{234.5}{10} = 23.45\ mLmin^{-1}$

গ্রাহামের সূত্রানুসারে, $\frac{r_{O_2}}{r_{HC}} = \sqrt{\frac{M_{HC}}{M_{O_2}}}$

$\therefore M_{HC} = M_{O_2} \times \left(\frac{r_{O_2}}{r_{HC}}\right)^2 = 32 \times \left(\frac{23.45}{20.00}\right)^2 = 43.99 \approx 44$

(খ) C_nH_{2n+2} এর আণবিক ভর $= 12n + 2n + 2 = 14n + 2$

প্রশ্নমতে, $14n + 2 = 44$

বা, $n = 3$

অতএব, আণবিক সংকেত C_3H_8 (প্রোপেন)

৫৯. (ক) H_2SO_4 এ S এর জারণ মান +6 এবং 2 টি অ-হাইড্রক্সিল O (অর্থাৎ 2 টি S = O) আছে
H_2SO_3 এ S এর জারণ মান +4 এবং 1 টি অ-হাইড্রক্সিল O আছে
কেন্দ্রীয় পরমাণুর জারণ মান ও অ-হাইড্রক্সিল O পরমাণুর সংখ্যা বাড়লে O − H বন্ধন থেকে ইলেকট্রন ঘনত্ব বেশি সরে যায়, ফলে H^+ সহজে বিযোজিত হয়
আবার, অনুবন্ধী ক্ষারক HSO_4^- অনুনাদে বেশি স্থিতিশীল হয়
অতএব, $H_2SO_4 > H_2SO_3$ অর্থাৎ H_2SO_4 অধিক শক্তিশালী এসিড
(খ) HNO_3 এ N এর জারণ মান +5 ও 2 টি অ-হাইড্রক্সিল O; HNO_2 এ N এর জারণ মান +3 ও 1 টি অ-হাইড্রক্সিল O
সুতরাং, HNO_3 এর অম্লশক্তি HNO_2 অপেক্ষা বেশি, অর্থাৎ অম্লশক্তি: $HNO_3 > HNO_2$

৬০. (ক) $2SO_2 + O_2 \rightarrow 2SO_3$
$SO_3 + H_2O \rightarrow H_2SO_4$
$SO_2 + H_2O \rightarrow H_2SO_3$
$4NO_2 + O_2 + 2H_2O \rightarrow 4HNO_3$
উৎপন্ন H_2SO_4 ও HNO_3 বৃষ্টির পানিতে মিশে পানির pH কে 5.6 এর নিচে নামিয়ে আনে; একেই এসিড বৃষ্টি বলে
(খ) চূর্ণ চুনাপাথরের ($CaCO_3$) স্লারি ফ্লু-গ্যাসে স্প্রে করা হয়
$CaCO_3 + SO_2 \rightarrow CaSO_3 + CO_2$
বাতাসের অক্সিজেনে জারিত হয়ে, $2CaSO_3 + O_2 + 4H_2O \rightarrow 2CaSO_4 \cdot 2H_2O$
উপজাত জিপসাম ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$) সিমেন্ট ও প্লাস্টার শিল্পে ব্যবহৃত হয়