Mathematics ২০০ নম্বর

১. **১০**

পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $A(-2, 3)$ এবং উপকেন্দ্র $S(1, 7)$।
আমরা জানি, শীর্ষ হতে উপকেন্দ্রের দূরত্ব হলো a।
$a = \sqrt{(1-(-2))^2 + (7-3)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
ধরি, পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখার ওপর উপকেন্দ্র থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু $Z(\alpha, \beta)$। শীর্ষবিন্দু A হলো Z এবং S এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore \frac{\alpha+1}{2} = -2 \Rightarrow \alpha = -5$
$\frac{\beta+7}{2} = 3 \Rightarrow \beta = -1$
অর্থাৎ, নিয়ামক রেখার ওপর উপকেন্দ্র থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু $Z(-5, -1)$
পরাবৃত্তের অক্ষের ঢাল $m_1 = \frac{7-3}{1-(-2)} = \frac{4}{3}$
নিয়ামক রেখাটি অক্ষের ওপর লম্ব, তাই এর ঢাল $m_2 = -\frac{3}{4}$
$Z(-5, -1)$ বিন্দুগামী নিয়ামকের সমীকরণ: $y-(-1) = -\frac{3}{4}(x-(-5))$
$\Rightarrow 4y + 4 = -3x - 15$
$\Rightarrow 3x + 4y + 19 = 0$
পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, এর ওপরস্থ যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ এর জন্য $SP = PM$
$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-7)^2 = \frac{(3x+4y+19)^2}{3^2+4^2}$
$\Rightarrow 25(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 14y + 49) = (9x^2 + 16y^2 + 361 + 24xy + 114x + 152y)$
$\Rightarrow 25x^2 + 25y^2 - 50x - 350y + 1250 = 9x^2 + 16y^2 + 24xy + 114x + 152y + 361$
$\Rightarrow 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 164x - 502y + 889 = 0$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $(4x - 3y)^2 - 164x - 502y + 889 = 0$ **(Ans.)**

২. **১০**

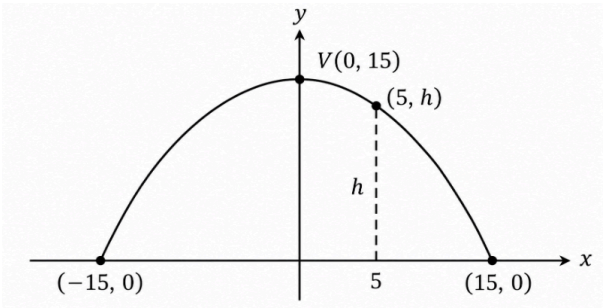
প্রদত্ত পরাবৃত্ত $x^2 = 12y \Rightarrow x^2 = 4(3)y$
এখানে, $a = 3$
সরলরেখার সমীকরণ: $x - y - 11 = 0$
$\Rightarrow y = x - 11$, যার ঢাল $m_1 = 1$
প্রদত্ত সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে ছেদ করে না।
আমরা জানি, কোনো রেখা এবং পরাবৃত্তের মধ্যবর্তী ন্যূনতম দূরত্ব রেখাটির সমান্তরাল ঐ পরাবৃত্তের স্পর্শক বরাবর হয়।
$x - y - 11 = 0$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের ঢাল $m = 1$ হবে।
$x^2 = 4ay$ পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে, ঢাল m বিশিষ্ট স্পর্শকের সমীকরণ: $y = mx - am^2$
মান বসিয়ে পাই, $y = (1)x - 3(1)^2$
$\Rightarrow y = x - 3$
$\Rightarrow x - y - 3 = 0$
এটি হলো প্রদত্ত পরাবৃত্তের সেই স্পর্শক যা প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল।
এখন, ন্যূনতম দূরত্ব হবে সমান্তরাল রেখাদ্বয় $x - y - 11 = 0$ এবং $x - y - 3 = 0$ এর মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব।
ন্যূনতম দূরত্ব, $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
$\Rightarrow d = \frac{|-11-(-3)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$
$\Rightarrow d = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$
$\therefore$ ন্যূনতম দূরত্ব $4\sqrt{2}$ একক। **(Ans.)**

৩. **১০**

ধরি, উপকেন্দ্রগামী যেকোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $P(x_1, y_1)$।
আমরা জানি, $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হলে, জ্যা-এর সমীকরণ হয় $T = S_1$ এখানে $T = yy_1 - 2a(x + x_1)$ এবং $S_1 = y_1^2 - 4ax_1$
সুতরাং, জ্যা-এর সমীকরণ:
$yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$
যেহেতু জ্যা-টি উপকেন্দ্র দিয়ে অতিক্রম করে, তাই এটি পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র $S(a, 0)$ বিন্দু দিয়ে যাবে।
জ্যা-এর সমীকরণে $x = a$ এবং $y = 0$ বসিয়ে পাই:
$(0)y_1 - 2a(a + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$
$\Rightarrow -2a^2 - 2ax_1 = y_1^2 - 4ax_1$
$\Rightarrow y_1^2 = 4ax_1 - 2ax_1 - 2a^2$
$\Rightarrow y_1^2 = 2ax_1 - 2a^2$
$\Rightarrow y_1^2 = 2a(x_1 - a)$
সঞ্চারপথের সমীকরণ পেতে (x_1, y_1) কে (x, y) দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই:
$y^2 = 2a(x - a)$ **(Proved)**

৪. ১০

ধরি, প্রক্ষেপকটির অনুভূমিক পাল্লার মধ্যবিন্দুটি মূলবিন্দু $O(0, 0)$ এবং সর্বোচ্চ বিন্দুটি (শীর্ষ) y-অক্ষের ওপর অবস্থিত।
তাহলে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $V(0, 15)$
যেহেতু প্রক্ষেপকটির গতিপথ একটি পরাবৃত্ত এবং এটি নিচের দিকে উন্মুক্ত, এর সমীকরণ হবে:
$x^2 = -4a(y - 15)$

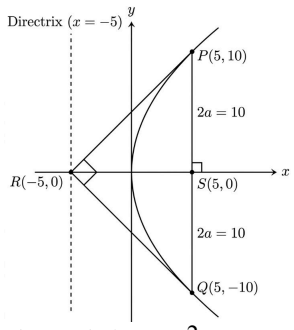


প্রক্ষেপকটির অনুভূমিক পাল্লা **30** মিটার হওয়ায়, মূলবিন্দু হতে এর নিক্ষেপণ ও পতন বিন্দুর দূরত্ব = **15** মিটার।
অর্থাৎ, পরাবৃত্তাকার গতিপথটি **x**-অক্ষকে $(-15, 0)$ (নিক্ষেপণ বিন্দু) এবং $(15, 0)$ (পতন বিন্দু) তে ছেদ করবে।
সমীকরণটি $(15, 0)$ বিন্দুগামী হওয়ায়:
$(15)^2 = -4a(0 - 15)$
$\Rightarrow 225 = 60a$
$\Rightarrow 4a = \frac{225}{15} = 15$
$\therefore$ পরাবৃত্তটির সমীকরণ: $x^2 = -15(y - 15)$
এখন, মধ্যবিন্দু হতে অনুভূমিকভাবে **5** মিটার দূরে প্রক্ষেপকটির উচ্চতা h হলে, পরাবৃত্তের ওপর অবস্থিত বিন্দুটি হবে $(5, h)$।
বিন্দুটি দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ করে পাই:
$5^2 = -15(h - 15)$
$\Rightarrow 25 = -15h + 225$
$\Rightarrow 15h = 200$
$\Rightarrow h = \frac{200}{15} = \frac{40}{3}$
$\therefore$ প্রক্ষেপকটির নির্ণেয় উচ্চতা $\frac{40}{3}$ মিটার বা প্রায় **13.33** মিটার। **(Ans.)**

৫. ১০

ধরি, পরাবৃত্ত $y^2 = 12x$ এর ওপরস্থ নির্ণেয় বিন্দুটি (x_1, y_1)।
সুতরাং, $y_1^2 = 12x_1$
পরাবৃত্তের সমীকরণকে **x**-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই:
$2y\frac{dy}{dx} = 12 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}$
(x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল, $m = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}} = -\frac{y_1}{6}$
$\therefore (x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ:
$y - y_1 = -\frac{y_1}{6}(x - x_1)$
প্রশ্নমতে, এই অভিলম্বটি $(15, 0)$ বিন্দুগামী। সমীকরণে $x = 15$ এবং $y = 0$ বসিয়ে পাই:
$0 - y_1 = -\frac{y_1}{6}(15 - x_1)$
$\Rightarrow y_1 = \frac{y_1}{6}(15 - x_1)$
$\Rightarrow y_1\left(1 - \frac{15-x_1}{6}\right) = 0$
এখান থেকে আমরা দুটি শর্ত পাই:
হয় $y_1 = 0$, অথবা, $1 - \frac{15-x_1}{6} = 0$
$y_1 = 0$ হলে, $y_1^2 = 12x_1$ হতে পাই $x_1 = 0$। একটি বিন্দু $(0, 0)$
আবার, $1 - \frac{15-x_1}{6} = 0$
$\Rightarrow 6 = 15 - x_1$
$\Rightarrow x_1 = 9$
$x_1 = 9$ হলে, $y_1^2 = 12x_1$ হতে পাই:
$y_1^2 = 12(9) = 108$
$\Rightarrow y_1 = \pm\sqrt{108} = \pm 6\sqrt{3}$
অপর বিন্দুগুলো হলো $(9, \pm 6\sqrt{3})$
$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুগুলো হলো $(0, 0)$ এবং $(9, \pm 6\sqrt{3})$ **(Ans.)**

৬. **১০**



প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 20x \Rightarrow y^2 = 4(5)x$
এখানে, $a = 5$
আমরা জানি, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হলো $(a, 2a)$ এবং $(a, -2a)$
সুতরাং প্রান্তবিন্দুদ্বয়: $P(5, 10)$ এবং $Q(5, -10)$
আমরা জানি, উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরাবৃত্তের নিয়ামক রেখা এবং অক্ষের ছেদবিন্দুতে পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।
নিয়ামক রেখা: $x = -5$ এবং অক্ষ: $y = 0$
অতএব, স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু $R(-5, 0)$
গঠিত ত্রিভুজটি হলো $\triangle PQR$
এই ত্রিভুজের ভূমি হলো উপকেন্দ্রিক লম্ব PQ
ভূমির দৈর্ঘ্য $PQ = 4a = 4(5) = 20$ একক
ত্রিভুজের উচ্চতা হলো ছেদবিন্দু $R(-5, 0)$ হতে উপকেন্দ্রিক লম্ব $x = 5$ এর লম্ব দূরত্ব।
উচ্চতা $h = 5 - (-5) = 10$ একক। (অথবা $2a = 10$)
$\therefore \triangle PQR$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা
$= \frac{1}{2} \times 20 \times 10 = 100$ বর্গ একক। **(Ans.)**

৭. ১০

যেহেতু পরাবৃত্তটির অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল, এর সমীকরণটিকে আমরা নিম্নলিখিত আকারে ধরতে পারি:

$y = ax^2 + bx + c$

পরাবৃত্তটি $(0, 0)$ বিন্দুগামী। এতে বসিয়ে পাই,

$0 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 0$

পরাবৃত্তটি $(2, 2)$ বিন্দুগামী এবং $c = 0$ বসিয়ে পাই,

$2 = a(2)^2 + b(2) \Rightarrow 4a + 2b = 2 \Rightarrow 2a + b = 1$

পরাবৃত্তটি $(-4, 4)$ বিন্দুগামী।

$4 = a(-4)^2 + b(-4) \Rightarrow 16a - 4b = 4 \Rightarrow 4a - b = 1$

এখন এই দুই সমীকরণ সমাধান করে পাই: $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

a, b, c এর মান বসালে পাই:

$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

$\Rightarrow x^2 + x - 3y = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + x - 3y = 0$ **(Ans.)**

৮. ১০

ধরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (যেখানে $a > b$)

আমরা জানি, নিয়ামক রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \frac{2a}{e}$

শর্তমতে, $\frac{2a}{e} = 32 \Rightarrow \frac{a}{e} = 16$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= 2ae$

শর্তমতে, $2ae = 8 \Rightarrow ae = 4$

এই দুই সমীকরণ গুণ করে পাই:

$\left(\frac{a}{e}\right) \times (ae) = 16 \times 4$

$\Rightarrow a^2 = 64$

$\Rightarrow a = 8$

$ae = 4$ হতে e এর মান বের করি:

$e = \frac{4}{a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সূত্র হতে আমরা জানি,

$b^2 = a^2(1 - e^2)$

$\Rightarrow b^2 = 64\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 64 \times \frac{3}{4} = 48$

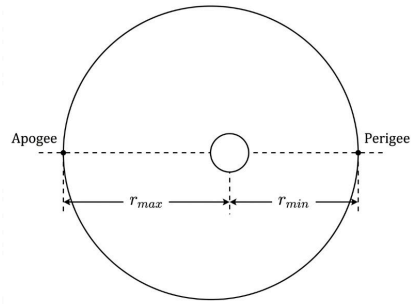
উপবৃত্তটির সমীকরণে মান বসিয়ে পাই:

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ **(Ans.)**

৯. ১০

ধরি, উপবৃত্তাকার কক্ষপথের বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক a এবং উৎকেন্দ্রিকতা e।
ফোকাসে পৃথিবীর কেন্দ্র অবস্থিত। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6400$ কি.মি.
পৃথিবীর কেন্দ্র হতে উপগ্রহটির সর্বনিম্ন দূরত্ব (পেরিজী) হবে:
r_{min} = R+ সর্বনিম্ন উচ্চতা = 6400 + 400 = 6800 কি.মি.
আমরা জানি, ফোকাস থেকে নিকটবর্তী শীর্ষের দূরত্ব $a - ae$
$a - ae = 6800$

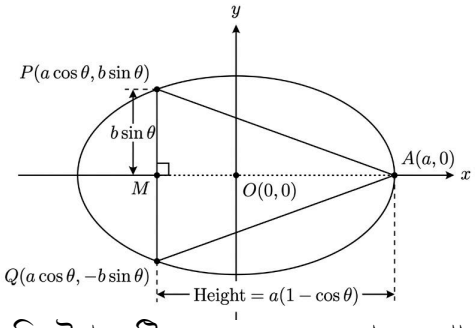


একইভাবে, পৃথিবীর কেন্দ্র হতে উপগ্রহটির সর্বোচ্চ দূরত্ব (অ্যাপোজী) হবে:
r_{max} = R+ সর্বোচ্চ উচ্চতা = 6400 + 2400 = 8800 কি.মি.
ফোকাস থেকে দূরবর্তী শীর্ষের দূরত্ব $a + ae$
$\therefore a + ae = 8800$
এই দুই সমীকরণ যোগ করে পাই:
$2a = 6800 + 8800 = 15600 \Rightarrow a = 7800$
বিয়োগ করে পাই:
$2ae = 8800 - 6800 = 2000 \Rightarrow ae = 1000$
a এর মান বসিয়ে পাই:
$7800e = 1000 \Rightarrow e = \frac{1000}{7800} = \frac{5}{39} \approx 0.128$
$\therefore$ কক্ষপথটির উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{5}{39}$ বা প্রায় 0.128 **(Ans.)**

১০. **১০**

প্রদত্ত উপবৃত্ত: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
এখানে $a^2 = 4, b^2 = 3$
প্রদত্ত রেখা: $2x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -2x + 4$
রেখাটির ঢাল $m_1 = -2$
যেহেতু স্পর্শকগুলো এই রেখার ওপর লম্ব, তাই স্পর্শকের ঢাল হবে:
$m = \frac{-1}{m_1} = \frac{1}{2}$
উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$
মান বসিয়ে পাই, $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{4\left(\frac{1}{4}\right) + 3}$
$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{1 + 3}$
$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{4}$
$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x \pm 2$
$\Rightarrow 2y = x \pm 4$
$\Rightarrow x - 2y \pm 4 = 0$
$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকগুলোর সমীকরণ: $x - 2y \pm 4 = 0$ **(Ans.)**

১১. **১০**



ধরি, উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের ধনাত্মক প্রান্তবিন্দু A(a, 0) যা ত্রিভুজটির শীর্ষ।
সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফলে অপর দুটি শীর্ষ বৃহৎ অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।
ধরি, বিন্দুগুলো P (a cos θ, b sin θ) এবং Q(a cos θ, −b sin θ)
এই সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির ভূমি হলো PQ রেখাংশ।
ভূমির দৈর্ঘ্য = 2b sin θ
ত্রিভুজের উচ্চতা হলো A(a, 0) হতে PQ এর লম্ব দূরত্ব।
উচ্চতা = a − a cos θ = a(1 − cos θ)
ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, S = $\frac{1}{2}$× ভূমি × উচ্চতা
S = $\frac{1}{2}$(2b sin θ)a(1 − cos θ) = ab sin θ(1 − cos θ)
ক্ষেত্রফল সর্বোচ্চ হওয়ার জন্য $\frac{dS}{d\theta} = 0$ হতে হবে।
$\frac{dS}{d\theta}$ = ab[cos θ(1 − cos θ) + sin θ(sin θ)] = 0
⇒ cos θ − cos^2 θ + sin^2 θ = 0
⇒ cos θ − cos^2 θ + 1 − cos^2 θ = 0
⇒ 2 cos^2 θ − cos θ − 1 = 0
⇒ (2 cos θ + 1)(cos θ − 1) = 0
cos θ = 1 ⇒ θ = 0 **(ত্রিভুজ গঠিত হবে না)**
∴ cos θ = $-\frac{1}{2}$ ⇒ sin θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(যেহেতু ক্ষেত্রফল ধনাত্মক)**
সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল $S_{max} = ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$
$S_{max} = ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$
∴ সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ab বর্গ একক। **(Ans.)**

১২. **১০**

প্রদত্ত সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে পরিণত করি:

$4x^2 - 24x + 9y^2 + 36y + 36 = 0$

$\Rightarrow 4(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 4y) = -36$

$\Rightarrow 4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 + 4y + 4) = -36 + 36 + 36$

$\Rightarrow 4(x-3)^2 + 9(y+2)^2 = 36$

$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

এটি $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ আকারের, যেখানে $X = x - 3, Y = y + 2$

এবং $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3, b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$ (যেহেতু $a > b$, বৃহৎ অক্ষ **x**-অক্ষ বরাবর)

i. কেন্দ্র: $X = 0 \Rightarrow x = 3$ এবং $Y = 0 \Rightarrow y = -2$

$\therefore$ কেন্দ্র $(3, -2)$

ii. উৎকেন্দ্রিকতা: $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

iii. উপকেন্দ্রদ্বয়: $X = \pm ae$ এবং $Y = 0$

$x - 3 = \pm 3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{5}$

$y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $(3 \pm \sqrt{5}, -2)$

$\therefore$ কেন্দ্র $(3, -2)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{5}}{3}$ এবং উপকেন্দ্রদ্বয় $(3 \pm \sqrt{5}, -2)$ **(Ans.)**

১৩. **১০**

উপবৃত্তের ওপরস্থ θ_1 এবং θ_2 উৎকেন্দ্রিক কোণ বিশিষ্ট বিন্দু দুটি হলো যথাক্রমে $P(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$ এবং $Q(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$।

প্রশ্নমতে, P ও Q বিন্দুগামী সংযোজক রেখাটি উপকেন্দ্র $S(ae, 0)$ দিয়ে যায়।

অর্থাৎ P, S এবং Q বিন্দু তিনটি সমরেখ।

সুতরাং, সমরেখতার শর্ত অনুসারে নিচের নির্ণায়কটি শূন্য হবে:

$$\begin{vmatrix} a(\cos\theta_1 - e) & b\sin\theta_1 \\ a(\cos\theta_2 - e) & b\sin\theta_2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (\cos\theta_1 - e)\sin\theta_2 = (\cos\theta_2 - e)\sin\theta_1$

$\Rightarrow \sin\theta_1\cos\theta_2 - e\sin\theta_1 = \sin\theta_2\cos\theta_1 - e\sin\theta_2$

$\Rightarrow \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 = e(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$

$\Rightarrow \sin(\theta_1 - \theta_2) = e(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$

$\Rightarrow 2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} = e\left(2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$

যেহেতু P ও Q ভিন্ন দুটি বিন্দু, তাই $\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \neq 0$

$\Rightarrow \cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} = e\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

$\Rightarrow e = \frac{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$

$\Rightarrow \frac{e-1}{e+1} = \frac{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} - \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$

$\Rightarrow \frac{e-1}{e+1} = \frac{2\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}}{2\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}}$

$\Rightarrow \frac{e-1}{e+1} = \tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2}$

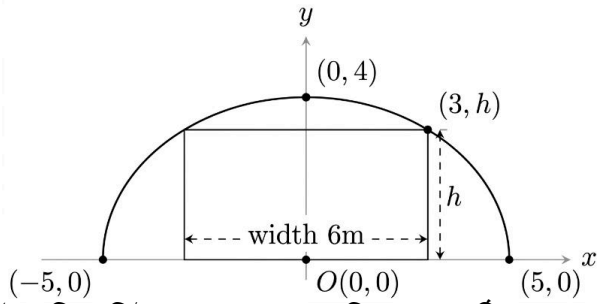
$\therefore \tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2} = \frac{e-1}{e+1}$ **(Ans.)**

১৪. **১০**

ধরি, সুড়ঙ্গটির ভূমির মধ্যবিন্দুটি মূলবিন্দু $O(0, 0)$ এবং ভূমি **x**-অক্ষ বরাবর অবস্থিত।
সুড়ঙ্গটির সর্বাধিক প্রস্থ (বৃহৎ অক্ষ) $2a = 10 \Rightarrow a = 5$ মিটার
কেন্দ্র হতে এর সর্বোচ্চ উচ্চতা (অর্ধ-ক্ষুদ্র অক্ষ) $b = 4$ মিটার
যেহেতু এটি একটি আধা-উপবৃত্তাকার সুড়ঙ্গ, এর সমীকরণ হবে:

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \ (y \geq 0)$



ট্রাকটি **6** মিটার চওড়া এবং এটি সুড়ঙ্গের ঠিক মাঝখান দিয়ে প্রবেশ করবে।
অর্থাৎ, ট্রাকটি **x**-অক্ষে $x = -3$ থেকে $x = 3$ পর্যন্ত স্থান দখল করবে।
ট্রাকটি নিরাপদে পার হওয়ার জন্য এর সর্বোচ্চ উচ্চতা সুড়ঙ্গের $x = 3$ বিন্দুতে থাকা উচ্চতার সমান বা তার চেয়ে কম হতে হবে।
উপবৃত্তের সমীকরণে $x = 3$ বসিয়ে পাই:

$\frac{3^2}{25} + \frac{h^2}{16} = 1$

$\Rightarrow \frac{9}{25} + \frac{h^2}{16} = 1$

$\Rightarrow \frac{h^2}{16} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

$\Rightarrow h^2 = \frac{256}{25}$

$\Rightarrow h = \frac{16}{5} = 3.2$

$\therefore$ ট্রাকটির সর্বোচ্চ উচ্চতা **3.2** মিটার হতে পারবে।

উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

$\Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 0.6$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$ মিটার

$\therefore$ ট্রাকের সর্বোচ্চ উচ্চতা **3.2** মি., উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{3}{5}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য **6.4** মি. **(Ans.)**

১৫. **১০**

দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 10, 0)$।
সুতরাং, অধিবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং আড় অক্ষ **x**-অক্ষ বরাবর।
ধরি, নির্ণেয় সমীকরণ- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm c, 0)$ হতে পাই, $c = 10$
অধিবৃত্তটির অসমতট রেখাদ্বয়ের সমীকরণ: $y = \pm\frac{b}{a}x$
প্রদত্ত $3x \pm 4y = 0$ হতে, $\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3a}{4}$
আমরা জানি, $c^2 = a^2 + b^2$
$\Rightarrow 100 = a^2 + \frac{9a^2}{16} = \frac{25a^2}{16}$
$\Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$ এবং $b = 6$
$a^2 = 64$ এবং $b^2 = 36$ বসালে নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ:
$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$
উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$
নিয়ামক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ: $x = \pm\frac{a}{e}$
$\Rightarrow x = \pm\frac{8}{\frac{5}{4}} = \pm\frac{32}{5}$
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 36}{8} = 9$ একক।
$\therefore$ সমীকরণ $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{5}{4}$, নিয়ামক রেখাদ্বয় $x = \pm\frac{32}{5}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য **9** একক। **(Ans.)**

১৬. **১০**

প্রদত্ত সমীকরণ: $5x^2 - 4y^2 - 20x + 16y - 16 = 0$
$\Rightarrow 5(x^2 - 4x) - 4(y^2 - 4y) = 16$
$\Rightarrow 5(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 - 4y + 4) = 16 + 20 - 16$
$\Rightarrow 5(x-2)^2 - 4(y-2)^2 = 20$
$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$
এটি $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ আকারের সমীকরণ।
এখানে, কেন্দ্র $(h, k) = (2, 2)$ এবং $a = 2, b = \sqrt{5}$
অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$
শীর্ষবিন্দুদ্বয় $(h \pm a, k) = (2 \pm 2, 2) \Rightarrow (0, 2)$ এবং $(4, 2)$
উপকেন্দ্রদ্বয় $(h \pm c, k) = (2 \pm 3, 2) \Rightarrow (-1, 2)$ এবং $(5, 2)$।
সমীকরণ হতে অসমতট রেখাদ্বয়ের সমীকরণ:
$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 0$
$\Rightarrow y - 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 2)$
অনুবন্ধী অধিবৃত্তের আড় অক্ষ মূল অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ বরাবর হবে।
$\therefore$ অনুবন্ধী অধিবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{(y-2)^2}{5} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$
$\therefore$ নির্ণেয় কেন্দ্র $(2, 2)$, শীর্ষবিন্দু $(0, 2), (4, 2)$, উপকেন্দ্র $(-1, 2), (5, 2)$ এবং অসমতট $y - 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 2)$ **(Ans.)**

১৭. **১০**

প্রদত্ত অধিবৃত্ত $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

P $\left(5, \frac{9}{4}\right)$ বিন্দুর জন্য, $\frac{5^2}{16} - \frac{(9/4)^2}{9} = \frac{25}{16} - \frac{9}{16} = 1$

অর্থাৎ, P বিন্দুটি অধিবৃত্তের ওপর অবস্থিত।

আমরা জানি, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:

$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{5x}{16} - \frac{(\frac{9}{4})y}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ: $5x - 4y - 16 = 0$

প্রদত্ত সমীকরণটিকে **x**-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই:

$\frac{2x}{16} - \frac{2y}{9}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{9x}{16y}$

P বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $m_1 = \frac{9(5)}{16(\frac{9}{4})} = \frac{5}{4}$

$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $m_2 = -\frac{4}{5}$

অভিলম্বের সমীকরণ: $y - \frac{9}{4} = -\frac{4}{5}(x - 5)$

$\Rightarrow 16x + 20y - 125 = 0$

স্পর্শক $5x - 4y - 16 = 0$ রেখাটি **x**-অক্ষকে $\left(\frac{16}{5}, 0\right)$ এবং **y**-অক্ষকে $(0, -4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \frac{16}{5} \times 4 = \frac{32}{5}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

১৮. **১০**

ধরি, দুটি স্পর্শকের ছেদবিন্দু $P(h, k)$ এবং তাদের ঢাল যথাক্রমে m_1, m_2।

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের ঢাল m বিশিষ্ট বাস্তব স্পর্শকের সমীকরণ:

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

যেহেতু স্পর্শকটি $P(h, k)$ বিন্দুগামী,

$k = mh \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$\Rightarrow (k - mh)^2 = a^2m^2 - b^2$

$\Rightarrow (h^2 - a^2)m^2 - 2hkm + (k^2 + b^2) = 0$

এই সমীকরণের মূলদ্বয়ই স্পর্শকদ্বয়ের ঢাল।

$\therefore m_1m_2 = \frac{k^2+b^2}{h^2-a^2}$

স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়ায় $m_1m_2 = -1$

$\Rightarrow \frac{k^2+b^2}{h^2-a^2} = -1$

$\Rightarrow k^2 + b^2 = a^2 - h^2$

$\Rightarrow h^2 + k^2 = a^2 - b^2$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথ: $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ **(Proved)**

প্রদত্ত বিশেষ ক্ষেত্রে, $a^2 = 25$ এবং $b^2 = 9$।

$\therefore x^2 + y^2 = 25 - 9 = 16$; অর্থাৎ, কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ **4** একক বিশিষ্ট বৃত্ত। **(Ans.)**

১৯. **১০**

ধরি, $S(c, 0)$ বিন্দুগামী যেকোনো বাস্তব ছেদজ্যার মধ্যবিন্দু $M(x_1, y_1)$।
অধিবৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
আমরা জানি, জ্যার মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হলে জ্যার সমীকরণ $T = S_1$।
এখানে, $T = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1$ এবং $S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1$
$\therefore$ জ্যার সমীকরণ: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$
প্রশ্নমতে, জ্যাটি উপকেন্দ্র $S(c, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে।
এই সমীকরণে $x = c, y = 0$ বসালে পাই:
$\frac{cx_1}{a^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$
$\Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{cx_1}{a^2} = 0$
(x_1, y_1) এর স্থলে (x, y) বসিয়ে পাই:
$\therefore$ সঞ্চারপথের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{cx}{a^2} = 0$
বিশেষ ক্ষেত্রে, $a = 3, b = 2$ এবং $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{\sqrt{13}x}{9} = 0$
$\Rightarrow 4x^2 - 9y^2 - 4\sqrt{13}x = 0$ **(Ans.)**
বাস্তব জ্যার মধ্যবিন্দুর জন্য প্রাপ্ত বক্ররেখার কেবল প্রযোজ্য অংশই সঞ্চারপথ।

২০. **১০**

প্রদত্ত সমকোণী অধিবৃত্ত: $xy = 16$
ধরি, নির্ণেয় জ্যার মধ্যবিন্দু $M(x_1, y_1) = (5, 5)$
আমরা জানি, কোনো জ্যার মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হলে জ্যার সমীকরণ $T = S_1$
এখানে, $T = \frac{xy_1 + x_1y}{2} - 16$ এবং $S_1 = x_1y_1 - 16$
$\Rightarrow xy_1 + x_1y = 2x_1y_1$
$\Rightarrow 5x + 5y = 2(5)(5)$
$\therefore$ জ্যার সমীকরণ: $x + y = 10$
এই সমীকরণ হতে $y = 10 - x$। এই মান $xy = 16$ এ বসিয়ে পাই:
$x(10 - x) = 16$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$
$\Rightarrow (x - 2)(x - 8) = 0$
$\therefore x = 2$ অথবা $x = 8$
নির্ণেয় প্রান্তবিন্দুদ্বয় $P(2, 8)$ এবং $Q(8, 2)$
$xy = 16$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $xy_1 + x_1y = 32$
$P(2, 8)$ বিন্দুতে: $8x + 2y = 32 \Rightarrow 4x + y = 16$
$Q(8, 2)$ বিন্দুতে: $2x + 8y = 32 \Rightarrow x + 4y = 16$
এই দুই সমীকরণ বিয়োগ করে পাই, $3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y$
প্রথম সমীকরণে $x = y$ বসালে, $5x = 16 \Rightarrow x = y = \frac{16}{5}$
$\therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু $\left(\frac{16}{5}, \frac{16}{5}\right)$ **(Ans.)**

Physics ২০০ নম্বর

২১. **১০**

আমরা জানি, $T \propto \sqrt{L}$
ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য, $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$
এখানে, $\frac{\Delta L}{L} = -0.03$
$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2} \times (-0.03) = -0.015 = -1.5\%$
দৈর্ঘ্য কমলে দোলনকাল কমে, সুতরাং ঘড়িটি দ্রুত চলবে (সময় বেশি দেখাবে)।
একদিনে $= 24 \times 3600 = 86400\,s$
একদিনে সময় লাভ $= 1.5\% \times 86400\,s = 0.015 \times 86400\,s = 1296\,s = 21.6$ মিনিট (প্রায় 21 মিনিট 36 সেকেন্ড)
অতএব, ঘড়িটি একদিনে প্রায় 21.6 মিনিট লাভ করবে।

২২. **১০**

এখানে, $L = 1.5\,m$, $A = 2 \times 10^{-6}\,m^2$, $Y = 2 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$, $\Delta L = 1.5\,mm = 1.5 \times 10^{-3}\,m$
আমরা জানি, $\Delta L = \frac{FL}{AY}$
সুতরাং, $F = \frac{AY\Delta L}{L}$
$F = \frac{(2\times10^{-6})\times(2\times10^{11})\times(1.5\times10^{-3})}{1.5} = 400\,N$
অতএব, প্রয়োজনীয় বল 400 N।

২৩. **১০**

এখানে, $r = 1 \times 10^{-3}\,m$, $\rho = 7800\,kgm^{-3}$, $\sigma = 900\,kgm^{-3}$, $v = 0.05\,ms^{-1}$, $g = 9.8\,ms^{-2}$
স্টোকসের সূত্র অনুযায়ী প্রান্তিক বেগ, $v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$
সুতরাং, $\eta = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{v}$
$\eta = \frac{2}{9} \times \frac{(1\times10^{-3})^2\times(7800-900)\times9.8}{0.05} = \frac{2}{9} \times \frac{10^{-6}\times6900\times9.8}{0.05} \approx 0.3005\,Pas$
অতএব, তেলের সান্দ্রতা সহগ প্রায় 0.30 Pas।

২৪. **১০**

এখানে, $P = 5000\,Pa$, $r = 1 \times 10^{-3}\,m$, $L = 2\,m$, $\eta = 1 \times 10^{-3}\,Pas$, $\rho = 1000\,kgm^{-3}$, $Q = 8 \times 10^{-7}\,m^3s^{-1}$, $g = 9.8\,ms^{-2}$
(ক) প্রবাহ না থাকলে ($Q = 0$) পাম্পের পুরো চাপ কেবল একটি স্থির তরল স্তম্ভকে সমতুল্য করত।
$P = \rho g H_{max}$
$H_{max} = \frac{P}{\rho g} = \frac{5000}{1000\times9.8} \approx 0.510\,m$
(খ) প্রবাহ থাকায় পাম্পের সরবরাহকৃত চাপের একটি অংশ অনুভূমিক নলে সান্দ্র ক্ষতি পূরণে ব্যয় হয় এবং অবশিষ্ট চাপ উলম্ব নলের পানির স্তম্ভকে সমতুল্য করে।
পোয়াজোই সূত্র অনুযায়ী অনুভূমিক নলে সান্দ্র চাপ ক্ষয়, $\Delta P_{visc} = \frac{8\eta LQ}{\pi r^4}$
$\Delta P_{visc} = \frac{8\times10^{-3}\times2\times8\times10^{-7}}{\pi\times(10^{-3})^4} = \frac{1.28\times10^{-8}}{\pi\times10^{-12}} \approx 4074\,Pa$
উলম্ব নলের গোড়ায় অবশিষ্ট (কার্যকর) চাপ, $P_{eff} = P - \Delta P_{visc} = 5000 - 4074 \approx 926\,Pa$
এই চাপ উলম্ব তরল স্তম্ভকে সমতুল্য করে, $P_{eff} = \rho g H$
$H = \frac{P_{eff}}{\rho g} = \frac{926}{1000\times9.8} \approx 0.0945\,m$
অতএব, (ক) $H_{max} \approx 0.510\,m$; (খ) $H \approx 0.0945\,m$। প্রবাহ থাকায় পানি সর্বোচ্চ সম্ভাব্য উচ্চতার তুলনায় অনেক কম উচ্চতায় ওঠে, কারণ চাপের প্রায় 81.5% ($\frac{4074}{5000}$) অনুভূমিক নলে সান্দ্র বাধা অতিক্রম করতেই ব্যয় হয়ে যায়।

২৫. **১০**

এখানে, $m = 0.4\,kg$, $A = 0.25\,m$, $x = 0.15\,m$ দূরত্বে গতিশক্তি $KE = 0.2\,J$, প্রাথমিক দশা $\phi = \frac{\pi}{6}$
ধরি, সরণের সমীকরণ $x = A\sin(\omega t + \phi)$
গতিশক্তি, $KE = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$
$0.2 = \frac{1}{2} \times 0.4 \times \omega^2 \times (0.25^2 - 0.15^2) = 0.2\omega^2(0.0625 - 0.0225) = 0.2\omega^2 \times 0.04 = 0.008\omega^2$
$\omega^2 = \frac{0.2}{0.008} = 25$
$\omega = 5\,rads^{-1}$
সুতরাং, $x = 0.25\sin\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)\,m$
বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$; এখানে $A\omega = 0.25 \times 5 = 1.25\,ms^{-1}$
বেগের সমীকরণ: $v = 1.25\cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)\,ms^{-1}$
ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$; এখানে $A\omega^2 = 0.25 \times 25 = 6.25\,ms^{-2}$
ত্বরণের সমীকরণ: $a = -6.25\sin\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)\,ms^{-2}$

২৬. **১০**

এখানে, $h = 6\,cm = 0.06\,m$, $r = 0.5\,mm = 5 \times 10^{-4}\,m$, $P_{max} = 888\,Pa$, $\rho = 1000\,kgm^{-3}$, $g = 9.8\,ms^{-2}$
নলের মুখে বুদ্বুদ তৈরি করতে প্রয়োজনীয় গেজ চাপ দুটি অংশের সমষ্টি: **(i)** তরলের গভীরতার কারণে হাইড্রোস্ট্যাটিক চাপ ρgh এবং **(ii)** বুদ্বুদের বক্রতার কারণে অতিরিক্ত চাপ $\frac{2T}{r}$ (তরলে নিমজ্জিত বায়ুর বুদ্বুদের একটি মাত্র তল থাকে, তাই $\frac{4T}{r}$ নয়, $\frac{2T}{r}$)
সর্বোচ্চ চাপ তখনই প্রয়োজন হয় যখন বুদ্বুদ ঠিক অর্ধগোলাকার হয়, অর্থাৎ বক্রতার ব্যাসার্ধ নলের ব্যাসার্ধ r-এর সমান হয় (বক্রতার ব্যাসার্ধের সর্বনিম্ন মান)।
সুতরাং, $P_{max} = \rho gh + \frac{2T}{r}$
$\rho gh = 1000 \times 9.8 \times 0.06 = 588\,Pa$
বা, $\frac{2T}{r} = P_{max} - \rho gh = 888 - 588 = 300\,Pa$
বা, $T = \frac{300 \times r}{2} = \frac{300 \times 5 \times 10^{-4}}{2} = 0.075\,Nm^{-1}$
অতএব, তরলের পৃষ্ঠটান $0.075\,Nm^{-1}$।

২৭. **১০**

ধরি, কণা দুটির সরণ $x_1 = A\sin(\omega t + \phi_1)$ এবং $x_2 = A\sin(\omega t + \phi_2)$; অতিক্রমের মুহূর্তে কোণ দুটি $\theta_1 = \omega t + \phi_1$ ও $\theta_2 = \omega t + \phi_2$
অতিক্রমের মুহূর্তে $x_1 = x_2 = \frac{A}{4}$, সুতরাং $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \frac{1}{4}$
কণা দুটি বিপরীত দিকে চলায় তাদের বেগ $(A\omega\cos\theta)$ বিপরীতমুখী, তাই কোণ দুটি সম্পূরক: $\theta_2 = \pi - \theta_1$
দশা পার্থক্য, $\delta = \theta_2 - \theta_1 = \pi - 2\theta_1 = \pi - 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$
$\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14.48°$
$\delta = 180° - 2 \times 14.48° = 180° - 28.96° = 151.04°$
অতএব, দশা পার্থক্য প্রায় $151.04°$।

২৮. **১০**

ধরি, সিরিজ সমবায়ের তুল্য স্প্রিং ধ্রুবক k_s
$k_s = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2} = \frac{50 \times 75}{50+75} = \frac{3750}{125} = 30\,Nm^{-1}$
এই সিরিজ সমবায় k_3 স্প্রিং-এর সাথে সমান্তরালে যুক্ত, তাই তুল্য ধ্রুবক $k_{eq} = k_s + k_3$
$k_{eq} = 30 + 100 = 130\,Nm^{-1}$
দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{130}} = 2\pi \times 0.1961 \approx 1.23\,s$
অতএব, দোলনকাল প্রায় $1.23\,s$।

২৯. **১০**

এখানে, $T = 2\,s$, $g = 9.8\,ms^{-2}$, ববের ঘনত্ব $\rho_b = 7500\,kgm^{-3}$, তরলের ঘনত্ব $\rho_l = 1000\,kgm^{-3}$, নিমজ্জিত ভগ্নাংশ $f = 0.5$

ধরি, ববের আয়তন V ও ভর $m = V\rho_b$

নিমজ্জিত অংশ থেকে ঊর্ধ্বমুখী প্লবতা বল, $F_b = fV\rho_l g$

কার্যকর অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = g\left(1 - f\frac{\rho_l}{\rho_b}\right)$

$g' = 9.8 \times \left(1 - 0.5 \times \frac{1000}{7500}\right) = 9.8 \times (1 - 0.06667) = 9.8 \times 0.93333 \approx 9.147\,ms^{-2}$

যেহেতু $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, $T' = T\sqrt{\frac{g}{g'}}$

$T' = 2 \times \sqrt{\frac{9.8}{9.147}} = 2 \times 1.0352 \approx 2.070\,s$

অতএব, নতুন দোলনকাল প্রায় $2.070\,s$।

৩০. **১০**

এখানে, $T = 3 \times 10^{-2}\,Nm^{-1}$, $r_1 = 1\,cm = 10^{-2}\,m$, $r_2 = 2\,cm = 2 \times 10^{-2}\,m$

ধরি, মিলিত বুদ্বুদের ব্যাসার্ধ R

চূড়ান্ত আয়তন = প্রাথমিক আয়তনের সমষ্টি ($V_f = V_1 + V_2$), তাই বায়ুমণ্ডলের বিরুদ্ধে বা অনুকূলে নিট কাজ $P_0(V_f - V_1 - V_2) = 0$; অর্থাৎ বায়ুমণ্ডলীয় চাপের অবদান বাতিল হয়ে যায়।

সুতরাং শক্তি সংরক্ষণ থেকে, প্রাথমিক পৃষ্ঠশক্তি = চূড়ান্ত পৃষ্ঠশক্তি + নির্গত তাপ Q

$R = (r_1^3 + r_2^3)^{1/3} = (1^3 + 2^3)^{1/3}\,cm = 9^{1/3}\,cm \approx 2.08\,cm = 2.08 \times 10^{-2}\,m$

সাবানের বুদ্বুদের দুটি তল থাকায় প্রাথমিক পৃষ্ঠশক্তি, $E_1 = 2T \times 4\pi(r_1^2 + r_2^2)$

$E_1 = 2 \times 3 \times 10^{-2} \times 4\pi \times \left((0.01)^2 + (0.02)^2\right) = 2 \times 3 \times 10^{-2} \times 4\pi \times 5 \times 10^{-4} \approx 3.770 \times 10^{-4}\,J$

চূড়ান্ত পৃষ্ঠশক্তি, $E_2 = 2T \times 4\pi R^2 = 2 \times 3 \times 10^{-2} \times 4\pi \times (2.08 \times 10^{-2})^2 \approx 3.262 \times 10^{-4}\,J$

নির্গত তাপ, $Q = E_1 - E_2 \approx 3.770 \times 10^{-4} - 3.262 \times 10^{-4} \approx 5.08 \times 10^{-5}\,J$

অতএব, মিলনের ফলে নির্গত তাপ প্রায় $5.08 \times 10^{-5}\,J$।

৩১. **১০**

এখানে, $L = 2\,m$, $A = 1 \times 10^{-6}\,m^2$, $Y = 2 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$, $m = 5\,kg$, $h = 0.1\,m$, $g = 9.8\,ms^{-2}$

তারকে একটি স্প্রিং-এর মতো ধরা যায় যার বল ধ্রুবক $k = \frac{AY}{L}$

$k = \frac{1 \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{11}}{2} = 1 \times 10^5\,Nm^{-1}$

ধরি, সর্বোচ্চ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি δ; বস্তুটি $(h + \delta)$ দূরত্ব নামার পর ক্ষণিকের জন্য স্থির হয়, তখন বেগ শূন্য।

শক্তি সংরক্ষণ সূত্র অনুযায়ী, $mg(h + \delta) = \frac{1}{2}k\delta^2$

বা, $\frac{k}{2}\delta^2 - mg\delta - mgh = 0$

মান বসিয়ে, $50000\delta^2 - 49\delta - 4.9 = 0$ (এখানে $mg = 5 \times 9.8 = 49\,N$, $mgh = 4.9\,J$)

দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করে, $\delta = \frac{49 + \sqrt{49^2 + 4 \times 50000 \times 4.9}}{2 \times 50000} = \frac{49 + \sqrt{982401}}{100000} \approx \frac{49 + 991.16}{100000} \approx 0.0104\,m = 10.4\,mm$

স্থিতিশীলভাবে (ধীরে ধীরে) একই ভর ঝুলালে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $\delta_{static} = \frac{mg}{k} = \frac{49}{10^5} = 4.9 \times 10^{-4}\,m = 0.49\,mm$

তুলনা: $\frac{\delta}{\delta_{static}} = \frac{10.4}{0.49} \approx 21.2$; অর্থাৎ আকস্মিক (ধাক্কাজনিত) লোডিংয়ে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি স্থিতিশীল লোডিংয়ের তুলনায় প্রায় 21.2 গুণ বেশি।

সর্বোচ্চ পীড়ন $= \frac{k\delta}{A} = \frac{10^5 \times 0.0104}{1 \times 10^{-6}} \approx 1.04 \times 10^9\,Nm^{-2}$

অতএব, সর্বোচ্চ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি প্রায় $10.4\,mm$, যা স্থিতিশীল ক্ষেত্রের ($0.49\,mm$) চেয়ে প্রায় 21.2 গুণ বেশি।

৩২. **১০**

এখানে, $A = 5$, $\omega = 2\pi\ \text{rads}^{-1}$, $\phi = \frac{\pi}{6}$
ধরি, $\theta = \omega t + \phi$
বেগ, $v = -A\omega \sin\theta$ এবং ত্বরণ, $a = -A\omega^2 \cos\theta$
প্রশ্নমতে, $|v| = |a|$
বা, $|\tan\theta| = \omega = 2\pi \approx 6.2832$
সুতরাং, $\tan^{-1}(6.2832) = 80.96° = 1.4130\ \text{rad}$
$\theta = n\pi \pm 1.4130\ \text{rad}$, যেখানে n পূর্ণসংখ্যা
আবার, $t = \frac{\theta-\phi}{\omega} = \frac{\theta-\frac{\pi}{6}}{2\pi}$, যেখানে $\frac{\pi}{6} = 0.5236\ \text{rad}$
$n = 0$ এবং (+) চিহ্নের জন্য, $\theta = 1.4130\ \text{rad}$; $t = \frac{1.4130-0.5236}{6.2832} \approx 0.1415\ \text{s}$
$n = 1$ এবং (−) চিহ্নের জন্য, $\theta = \pi - 1.4130 = 1.7286\ \text{rad}$; $t = \frac{1.7286-0.5236}{6.2832} \approx 0.1918\ \text{s}$
অতএব, প্রথম দুটি সময় $t \approx 0.1415\ \text{s}$ এবং $t \approx 0.1918\ \text{s}$।

৩৩. **১০**

এখানে, $d = 0.2\ \text{mm} = 2 \times 10^{-4}\ \text{m}$, $T = 7.2 \times 10^{-2}\ \text{Nm}^{-1}$, $\theta = 0°$, $\rho = 1000\ \text{kgm}^{-3}$, $g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$
সমান্তরাল পাত দুটির ক্ষেত্রে মেনিসকাস একটি অর্ধ-বৃত্তাকার সিলিন্ডারের মতো হয়; বক্রতা শুধু পাত দুটির মধ্যবর্তী দিকে থাকে, অন্য দিকে (পাতের দৈর্ঘ্য বরাবর) কোনো বক্রতা থাকে না।
তাই মেনিসকাসের অতিরিক্ত চাপ $\frac{T}{R}$ (একমুখী বক্রতা, গোলকের $\frac{2T}{R}$-এর বদলে), যেখানে $R = \frac{d}{2\cos\theta}$ হলো মেনিসকাসের বক্রতার ব্যাসার্ধ
চাপের ভারসাম্য থেকে, $\rho g h = \frac{T}{R} = \frac{2T\cos\theta}{d}$
$h = \frac{2T\cos\theta}{\rho g d} = \frac{2\times7.2\times10^{-2}\times1}{1000\times9.8\times2\times10^{-4}} = \frac{0.144}{1.96} \approx 0.0735\ \text{m} = 7.35\ \text{cm}$
তুলনা: ব্যাসার্ধ $r = d = 2 \times 10^{-4}\ \text{m}$ বিশিষ্ট বৃত্তাকার কৈশিক নলে মেনিসকাসের অতিরিক্ত চাপ $\frac{2T\cos\theta}{r}$, তাই $h_{tube} = \frac{2T\cos\theta}{\rho g r}$
$h_{tube} = \frac{2\times7.2\times10^{-2}\times1}{1000\times9.8\times2\times10^{-4}} \approx 0.0735\ \text{m} = 7.35\ \text{cm}$
অতএব, পাত দুটির মধ্যে পানি 7.35 cm উচ্চতায় ওঠে এবং $r = d$ ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার নলেও একই উচ্চতা (7.35 cm) পাওয়া যায়; অর্থাৎ $\frac{h_{plates}}{h_{tube}} = 1$।

৩৪. **১০**

এখানে, $Y = 2 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}$, $K = 1.6 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}$
প্রথম সম্পর্ক থেকে, $Y = 3K(1 - 2\sigma)$
বা, $1 - 2\sigma = \frac{Y}{3K} = \frac{2\times10^{11}}{3\times1.6\times10^{11}} = \frac{2}{4.8} \approx 0.4167$
বা, $2\sigma = 1 - 0.4167 = 0.5833$
$\sigma = 0.2917$
এবার দ্বিতীয় সম্পর্ক থেকে, $Y = 2\eta(1 + \sigma)$, সুতরাং $\eta = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$
$\eta = \frac{2\times10^{11}}{2\times1.2917} = \frac{2\times10^{11}}{2.5833} \approx 7.74 \times 10^{10}\ \text{Nm}^{-2}$
অতএব, পয়সনের অনুপাত $\sigma \approx 0.2917$ এবং দৃঢ়তা গুণাংক $\eta \approx 7.74 \times 10^{10}\ \text{Nm}^{-2}$।

৩৫. **১০**

এখানে, $\eta = 1 \times 10^{-3}\ \text{Pas}$, $r = 0.5\ \text{mm} = 5 \times 10^{-4}\ \text{m}$, $L = 20\ \text{cm} = 0.2\ \text{m}$, $\Delta P = 2000\ \text{Pa}$
পোয়াজোই সূত্র অনুযায়ী, $Q = \frac{\pi\Delta P r^4}{8\eta L}$
$Q = \frac{\pi\times2000\times(5\times10^{-4})^4}{8\times1\times10^{-3}\times0.2} = \frac{\pi\times2000\times6.25\times10^{-14}}{1.6\times10^{-3}} \approx 2.454 \times 10^{-7}\ \text{m}^3\text{s}^{-1}$
গড় বেগ, $v = \frac{Q}{\pi r^2}$
$v = \frac{2.454\times10^{-7}}{\pi\times(5\times10^{-4})^2} = \frac{2.454\times10^{-7}}{7.854\times10^{-7}} \approx 0.3125\ \text{ms}^{-1}$
অতএব, আয়তনিক প্রবাহের হার $\approx 2.454 \times 10^{-7}\ \text{m}^3\text{s}^{-1}$ এবং প্রবাহের গড় বেগ $\approx 0.3125\ \text{ms}^{-1}$।

৩৬. **১০**

এখানে, $t = 6$ ঘণ্টা $= 6 \times 3600 = 21600\,s$, $\Delta t = 20\,s$, $R = 6400\,km$

পর্বতের চূড়ায় g হ্রাস পায়: $g_h = \frac{gR^2}{(R+h)^2} \approx g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ [$h \ll R$]

যেহেতু $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, তাই $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta g}{g}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2h}{R} = \frac{h}{R}$

দোলনকাল $\frac{h}{R}$ ভগ্নাংশ বৃদ্ধি পাওয়ায় t সময়ে ঘড়ির সময়ের পার্থক্য Δt হলে, $\frac{h}{R} = \frac{\Delta t}{t}$

$\frac{h}{R} = \frac{20}{21600} = 9.259 \times 10^{-4}$

$h = 9.259 \times 10^{-4} \times 6400\,km \approx 5.93\,km$

অতএব, পাহাড়ের উচ্চতা প্রায় $5.93\,km$।

৩৭. **১০**

এখানে, $L = 2\,m$, $A = 1.5 \times 10^{-6}\,m^2$, $F = 300\,N$, $\Delta L = 2\,mm = 2 \times 10^{-3}\,m$

ইয়ং গুণাঙ্ক, $Y = \frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{FL}{A\Delta L}$

$Y = \frac{300 \times 2}{(1.5 \times 10^{-6}) \times (2 \times 10^{-3})} = \frac{600}{3 \times 10^{-9}} = 2.0 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$

অতএব, তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক $2.0 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$।

৩৮. **১০**

ধরি, কেন্দ্র থেকে r দূরত্বে পাথরটির ভর m

এই বিন্দুতে কেবল r ব্যাসার্ধের গোলকের ভর অভিকর্ষ বল প্রয়োগ করে; সেই গোলকের ভর $M_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g(r) = \frac{GM_r}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho r$

পাথরটির ত্বরণ কেন্দ্রের দিকে, অর্থাৎ $a = -\frac{4}{3}\pi G\rho\, r$; এটি $a = -\omega^2 r$ আকারের সরল ছন্দিত গতির সমীকরণ

$\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho$

দোলনকাল, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$

এখানে, $G\rho = 6.674 \times 10^{-11} \times 5500 = 3.671 \times 10^{-7}$

$\frac{3\pi}{G\rho} = \frac{9.4248}{3.671 \times 10^{-7}} \approx 2.567 \times 10^7$

$T = \sqrt{2.567 \times 10^7} \approx 5067\,s \approx 84.5$ মিনিট

অতএব, দোলনকাল প্রায় $5067\,s$ (প্রায় 84.5 মিনিট)।

৩৯. **১০**

এখানে, $T = 2\,s$, $T' = 2.0025\,s$, $R = 6371\,km$

ধরি, পর্বতের উচ্চতা h

সমুদ্রপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ g এবং চূড়ায় $g' = \frac{gR^2}{(R+h)^2}$

যেহেতু $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, অর্থাৎ $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, তাই $\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$

সুতরাং, $\frac{\Delta T}{T} = \frac{T'-T}{T} = \frac{h}{R}$

$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2.0025-2}{2} = \frac{0.0025}{2} = 0.00125$

$h = 0.00125 \times 6371\,km \approx 7.96\,km$

অতএব, পর্বতের উচ্চতা প্রায় $7.96\,km$।

৪০. **১০**

ধরি, ব্লকের সরণ x এবং প্রতিটি স্প্রিং গতিপথের সাথে θ কোণে আছে।
ক্ষুদ্র সরণের জন্য প্রতিটি স্প্রিং বরাবর প্রসারণ (বা সংকোচন) $\approx x\cos\theta$
সুতরাং স্প্রিং দুটির বল যথাক্রমে $k_1 x\cos\theta$ ও $k_2 x\cos\theta$ এবং গতিপথ বরাবর এদের উপাংশ $(k_1 x\cos\theta)\cos\theta$ ও $(k_2 x\cos\theta)\cos\theta$
মোট প্রত্যানয়ন বল, $F = (k_1 + k_2)x\cos^2\theta$
তুল্য ধ্রুবক, $k_{eff} = (k_1 + k_2)\cos^2\theta$
গতির সমীকরণ, $m\ddot{x} = -k_{eff}x$
$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \cos\theta\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$
এখানে, $k_1 + k_2 = 150 + 250 = 400\,\text{Nm}^{-1}$, $m = 1\,\text{kg}$, $\theta = 45°$
$\omega = \cos 45° \times \sqrt{\frac{400}{1}} = 0.7071 \times 20 \approx 14.14\,\text{rads}^{-1}$
অতএব, কৌণিক কম্পাঙ্ক প্রায় $14.14\,\text{rads}^{-1}$।

Chemistry ২০০ নম্বর

৪১. **১০**

P: $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3051}{419} \approx 7.3$ (বিশাল লাফ) ⇒ যোজনী ইলেকট্রন ১টি, গ্রুপ ১
Q: $\frac{E_3}{E_2} = \frac{4912}{1145} \approx 4.3$ (বিশাল লাফ) ⇒ যোজনী ইলেকট্রন ২টি, গ্রুপ ২
R: $\frac{E_5}{E_4} = \frac{16091}{4356} \approx 3.7$ (বিশাল লাফ) ⇒ যোজনী ইলেকট্রন ৪টি, গ্রুপ ১৪
S: প্রথম ৫টি মানে কোনো বিশাল লাফ নেই ($\frac{E_5}{E_4} = \frac{6273}{4956} \approx 1.3$) ⇒ যোজনী ইলেকট্রন কমপক্ষে ৫টি, গ্রুপ ১৫ (বা তার বেশি)

৪২. **১০**

এখানে, $l = 0, n = 4$ ⇒ শেষ ইলেকট্রন 4s উপস্তরে
$E_2 \rightarrow E_3$-এ লাফ ⇒ যোজনী ইলেকট্রন সংখ্যা = 2
$4s^2$ হলে যোজনী ইলেকট্রন সংখ্যা = 2 ✓
ইলেকট্রন বিন্যাস: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$
পারমাণবিক সংখ্যা, $Z = 20$ (Ca, ক্যালসিয়াম)
সর্বোচ্চ জারণ সংখ্যা = +2

৪৩. **১০**

প্রতি মোল Mg-কে Mg^{2+}-এ রূপান্তরের শক্তি = $E_1 + E_2$
$= 738 + 1451 = 2189\,\text{kJmol}^{-1}$
এখানে, 250 g Mg-এর মোল সংখ্যা, $n = \frac{250}{24} \approx 10.42\,\text{mol}$
সুতরাং, মোট শক্তি = $\frac{250}{24} \times 2189 \approx 22802\,\text{kJ}$
অতএব, মোট শক্তি $\approx 22.8 \times 10^3\,\text{kJ}$

৪৪. **১০**

Mg → Al ডিপ = $738 - 578 = 160\,\text{kJmol}^{-1}$
P → S ডিপ = $1012 - 1000 = 12\,\text{kJmol}^{-1}$
২য় পর্যায়ে, Be → B ডিপ = $899 - 801 = 98\,\text{kJmol}^{-1}$ এবং N → O ডিপ = $1402 - 1314 = 88\,\text{kJmol}^{-1}$
তুলনা: ৩য় পর্যায়ের Mg → Al ডিপ (160) ২য় পর্যায়ের Be → B ডিপ (98) অপেক্ষা বড়, কিন্তু ৩য় পর্যায়ের P → S ডিপ (12) ২য় পর্যায়ের N → O ডিপ (88) অপেক্ষা অনেক ছোট।
কারণ: Mg → Al-এ নতুন ইলেকট্রন কম অনুপ্রবেশকারী 3p উপস্তরে প্রবেশ করে এবং $3s^2$ দ্বারা স্ক্রিনড হয়, তাই ডিপ বড়। P → S-এ বড় আকারের 3p উপস্তরে আন্তঃইলেকট্রনিক বিকর্ষণ তুলনামূলক কম প্রকট, তাই ডিপ অনেক ছোট।

৪৫. **১০**

এখানে, $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1.9y}{y} = 1.9$ (স্বাভাবিক)
$\frac{I_3}{I_2} = \frac{2.9y}{1.9y} \approx 1.53$ (স্বাভাবিক)
$\frac{I_4}{I_3} = \frac{15.2y}{2.9y} \approx 5.24$ (বিশাল লাফ)
সুতরাং, যোজনী ইলেকট্রন সংখ্যা = 3, গ্রুপ ১৩
আবার, $y = I_1 = 1086\,kJmol^{-1}$
অতএব, $I_4 = 15.2 \times 1086 \approx 16507\,kJmol^{-1}$

৪৬. **১০**

K^+ বিন্যাস: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 = [Ar]$ (সম্পূর্ণ নিষ্ক্রিয় গ্যাস কাঠামো)
Ca^+ বিন্যাস: $[Ar]4s^1$ (একক ইলেকট্রন)
K^+ থেকে ২য় ইলেকট্রন অপসারণ করতে হলে সম্পূর্ণ স্থিতিশীল নিষ্ক্রিয় গ্যাস কাঠামো ভাঙতে হয়, যা অত্যন্ত শক্তি-সাপেক্ষ।
Ca^+-এর একক $4s^1$ ইলেকট্রন তুলনামূলক সহজে অপসারিত হয়।
অতএব, $E_2(K) = 3051 \gg E_2(Ca) = 1145\,kJmol^{-1}$

৪৭. **১০**

১. ইলেকট্রন আসক্তি একটি বিচ্ছিন্ন গ্যাসীয় পরমাণুতে একক ইলেকট্রন যোগের নিট শক্তি — F-এর অতি ক্ষুদ্র 2p উপস্তরে আন্তঃইলেকট্রনিক বিকর্ষণ প্রকট, Cl-এর 3p উপস্তরে কম।
২. তড়িৎ ঋণাত্মকতা বন্ধনে শেয়ারকৃত ইলেকট্রন জোড়ের প্রতি পরমাণুর আকর্ষণ ক্ষমতা — এখানে F-এর ক্ষুদ্র আকার ও উচ্চ Z_{eff} প্রাধান্য পায়।
৩. তাই দুটি ভিন্ন সংজ্ঞাগত প্রেক্ষাপটে F ও Cl-এর আপেক্ষিক ক্রম ভিন্ন হয়।

৪৮. **১০**

১. Mn-এর $3d^5$ উপস্তর অর্ধপূর্ণ (৫টি একক ইলেকট্রন) এবং $4s^2$ পূর্ণ — হুন্ডের নিয়ম অনুসারে সর্বোচ্চ বিনিময় শক্তি ও প্রতিসাম্যের কারণে এই বিন্যাস অতিরিক্ত স্থিতিশীল।
২. নতুন ইলেকট্রন প্রবেশ করালে হয় 3d-এর অর্ধপূর্ণ প্রতিসাম্য ভাঙতে হবে, নয়তো উচ্চতর শক্তির 4p উপস্তরে ঢুকতে হবে; উভয় ক্ষেত্রেই আন্তঃইলেকট্রনিক বিকর্ষণ বাড়ে এবং শক্তি নির্গমন কম হয়।
৩. এটি N ($2p^3$)-এর মতোই একই কারণে ব্যতিক্রমী — শুধু p-ব্লকের বদলে d-ব্লকে প্রযোজ্য, যা দেখায় অর্ধপূর্ণ-উপস্তর স্থিতিশীলতার নীতি p ও d উভয় ব্লকেই কাজ করে।

৪৯. **১০**

Co^{2+}: $[Ar]3d^7$ (৩টি একক ইলেকট্রন)
Co^{3+}: $[Ar]3d^6$ (৪টি একক ইলেকট্রন, একটি জোড়)
Fe-এর ক্ষেত্রে Fe^{3+} ($3d^5$) অর্ধপূর্ণ প্রতিসাম্য অর্জন করায় Fe^{2+} ($3d^6$) অপেক্ষা স্থিতিশীল।
কিন্তু Co^{3+} ($3d^6$) কোনো বিশেষ প্রতিসাম্য অর্জন করে না, বরং একটি ইলেকট্রন জোড় থাকায় কিছুটা বিকর্ষণ থাকে; ফলে তৃতীয় আয়নীকরণ শক্তি বিনিময় শক্তির কোনো লাভ দ্বারা পূরণ হয় না।
তাই সরল জলীয় দ্রবণে Co^{2+} তুলনামূলক স্থিতিশীল এবং Co^{3+} তীব্র জারক (শক্তিশালী লিগ্যান্ডযুক্ত জটিল যৌগে অবশ্য Co^{3+} স্থিতিশীল হতে পারে)।

৫০. **১০**

নীতি ১ (ব্যতিক্রম, S > O): ২য় পর্যায়ের O-এর ক্ষুদ্র 2p উপস্তরে উচ্চ ইলেকট্রন ঘনত্বজনিত আন্তঃইলেকট্রনিক বিকর্ষণের কারণে O-এর আসক্তি প্রত্যাশার চেয়ে কম।
নীতি ২ (স্বাভাবিক প্রবণতা, S > Se): O-এর ব্যতিক্রম কাটিয়ে ওঠার পর, গ্রুপ ১৬-এ নিচে নামলে ব্যাসার্ধ ও স্ক্রিনিং বৃদ্ধির কারণে ইলেকট্রন আসক্তি ধীরে ধীরে হ্রাস পায়।

৫১. **১০**

নিষ্ক্রিয় জোড় প্রভাব: ভারী মৌলে অভ্যন্তরীণ d ও f ইলেকট্রনের দুর্বল স্ক্রিনিং এবং আপেক্ষিকতাজনিত সংকোচনের কারণে বহিঃস্থ ns^2 ইলেকট্রন জোড় নিউক্লিয়াসের দ্বারা দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ থাকে।
ফলে ns^2 ইলেকট্রন বন্ধন গঠনে অংশ নিতে অনিচ্ছুক হয়, শুধু np ইলেকট্রনগুলোই বন্ধনে ব্যবহৃত হয়— এতে +2 জারণ সংখ্যা তৈরি হয়।
C, Si-এর মতো হালকা মৌলে ns^2 ইলেকট্রন সহজেই sp^3 সংকরণে অংশ নেয়, তাই +4 জারণ সংখ্যাই প্রধান; অপরদিকে Pb-এ +2 অবস্থা +4 অপেক্ষা বেশি স্থিতিশীল।

৫২. **১০**

প্রোটন সংখ্যা: $N = 7, O = 8, F = 9, Na = 11, Mg = 12, Al = 13$
$\frac{Z}{e}$: $N^{3-} = \frac{7}{10} = 0.70$; $O^{2-} = \frac{8}{10} = 0.80$; $F^- = \frac{9}{10} = 0.90$; $Na^+ = \frac{11}{10} = 1.10$; $Mg^{2+} = \frac{12}{10} = 1.20$; $Al^{3+} = \frac{13}{10} = 1.30$
$\frac{Z}{e}$ যত কম, ব্যাসার্ধ তত বড়।
অতএব, ব্যাসার্ধের ক্রম (অবরোহী): $N^{3-} > O^{2-} > F^- > Na^+ > Mg^{2+} > Al^{3+}$

৫৩. **১০**

গ্রুপিং: $(1s^2)(2s^22p^6)(3s^23p^4)$
একই গ্রুপে অবশিষ্ট ইলেকট্রন = 5, প্রতিটি 0.35: $5 \times 0.35 = 1.75$
$(n-1)$ শেলে ইলেকট্রন = 8টি, প্রতিটি 0.85: $8 \times 0.85 = 6.80$
$(n-2)$ শেলে ইলেকট্রন = 2টি, প্রতিটি 1.00: $2 \times 1.00 = 2.00$
$\sigma = 1.75 + 6.80 + 2.00 = 10.55$
অতএব, $Z_{eff} = Z - \sigma = 16 - 10.55 = 5.45$

৫৪. **১০**

স্বাভাবিক প্রত্যাশা: গ্রুপে নিচে নামলে ব্যাসার্ধ বাড়ে ও E_1 কমে, তাই $E_1(Ga) < E_1(Al)$ হওয়ার কথা।
কিন্তু Al থেকে Ga-তে যাওয়ার সময় $3d^{10}$ উপস্তর পূর্ণ হয়; এই 3d ইলেকট্রনগুলো যোজনী 4p ইলেকট্রনের ওপর তুলনামূলক দুর্বল স্ক্রিনিং প্রদান করে।
ফলে Ga-এর প্রকৃত Z_{eff} প্রত্যাশার চেয়ে বেশি বেড়ে যায়।
এই অতিরিক্ত Z_{eff} বৃদ্ধি সাধারণ ব্যাসার্ধ-বৃদ্ধিজনিত E_1 হ্রাসকে প্রায় সম্পূর্ণরূপে বাতিল করে দেয়, তাই $E_1(Ga) \approx E_1(Al)$।

৫৫. **১০**

Cl^- (17p, 18e): $\frac{Z}{e} = \frac{17}{18} \approx 0.944$
K^+ (19p, 18e): $\frac{Z}{e} = \frac{19}{18} \approx 1.056$
পার্থক্য = $\frac{19-17}{18} \approx 0.111$
S^{2-} (16p, 18e): $\frac{Z}{e} = \frac{16}{18} \approx 0.889$
Ca^{2+} (20p, 18e): $\frac{Z}{e} = \frac{20}{18} \approx 1.111$
পার্থক্য = $\frac{20-16}{18} \approx 0.222$
অতএব, S^{2-} ও Ca^{2+} জোড়ার $\frac{Z}{e}$ পার্থক্য (0.222) Cl^- ও K^+ জোড়ার (0.111) ঠিক দ্বিগুণ— তাই S^{2-} ও Ca^{2+} জোড়ায় ব্যাসার্ধের পার্থক্য বেশি হবে।

৫৬. **১০**

ধরি, সংকোচন না ঘটলে Ta-এর প্রত্যাশিত ব্যাসার্ধ = r_{Nb}+ স্বাভাবিক গ্রুপ-বৃদ্ধি
= 146 + 15 = 161 pm
প্রকৃত Ta-এর ব্যাসার্ধ = 146 pm
অতএব, ল্যান্থানাইড সংকোচনের কারণে "হারানো" ব্যাসার্ধ = 161 − 146 = 15 pm
এই 15 pm সংকোচনই ১৪টি 4f ইলেকট্রনের দুর্বল স্ক্রিনিং-জনিত অতিরিক্ত Z_{eff} বৃদ্ধির পরিমাণগত ফলাফল।

৫৭. **১০**

$ZnO + H_2SO_4 \rightarrow ZnSO_4 + H_2O$ (ZnO ক্ষারক হিসেবে আচরণ করে)
$ZnO + 2NaOH \rightarrow Na_2ZnO_2 + H_2O$ (সোডিয়াম জিঙ্কেট; ZnO অম্ল হিসেবে আচরণ করে)
অনুরূপভাবে, $Al_2O_3 + 2NaOH \rightarrow 2NaAlO_2 + H_2O$
কারণ: Zn^{2+} ও Al^{3+} উভয়ই ক্ষুদ্র আকার ও উচ্চ চার্জ ঘনত্বের কারণে উচ্চ পোলারায়ন ক্ষমতাসম্পন্ন, ফলে $M-O$ বন্ধন যথেষ্ট সমযোজী চরিত্র লাভ করে— এই মধ্যবর্তী চরিত্রই উভধর্মী আচরণের জন্য প্রয়োজনীয়।

৫৮. **১০**

Al^{3+}-এর হাইড্রেশন এনথালপি সবচেয়ে ঋণাত্মক ($-4680\,kJmol^{-1}$), যা নির্দেশ করে উচ্চ চার্জ ঘনত্বের কারণে এটি সবচেয়ে বেশি জলের অণু শক্তভাবে ধরে রাখে।
উচ্চ চার্জ সাধারণত বেশি পরিবাহিতার দিকে নিয়ে যায়, কিন্তু অত্যধিক হাইড্রেশনের ফলে হাইড্রেটেড আয়নের কার্যকর ব্যাসার্ধ অনেক বড় হয়ে যায় এবং আয়নের গতিশীলতা তীব্রভাবে হ্রাস পায়।
এই দুই বিপরীতমুখী প্রভাবের ফলে Al^{3+}-এর পরিবাহিতা চার্জের অনুপাতে প্রত্যাশিত মানের চেয়ে কম বৃদ্ধি পায়।

৫৯. **১০**

VO (+2): ক্ষারীয়
V_2O_3 (+3): ক্ষারীয়
VO_2 (+4): উভধর্মী
V_2O_5 (+5): উভধর্মী, তবে অম্লীয় প্রবণতা প্রধান (তবে Mn_2O_7-এর মতো তীব্র নয়)
Mn-এর সিরিজেও একই প্যাটার্ন: MnO (+2) ক্ষারীয়, Mn_2O_3 (+3) ক্ষারীয়, MnO_2 (+4) উভধর্মী, Mn_2O_7 (+7) তীব্র অম্লীয়।
যেকোনো ট্রানজিশন ধাতুর জারণ সংখ্যা বাড়লে একই নীতি কাজ করে— চার্জ ঘনত্ব বৃদ্ধি → সমযোজী চরিত্র বৃদ্ধি → অম্লীয়তা বৃদ্ধি।

৬০. **১০**

চার্জ ঘনত্ব: $\phi(Li^+) = \frac{1}{76} = 0.01316\,pm^{-1}$; $\phi(Na^+) = \frac{1}{102} = 0.00980\,pm^{-1}$
Li^+-এর উচ্চতর চার্জ ঘনত্ব একে অধিক তীব্রভাবে হাইড্রেটেড করে তোলে, ফলে জলীয় দ্রবণে এর হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধ Na^+-এর হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধকে ছাড়িয়ে যায়।
স্টোকসের সূত্র অনুসারে, আয়নের গতিশীলতা (ফলে পরিবাহিতা) হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতিক; তাই বড় হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধযুক্ত Li^+-এর পরিবাহিতা কম হয়।