Mathematics

২০০ নম্বর

১. পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $A(1, 2)$ এবং উপকেন্দ্র $S(3, 4)$

আমরা জানি, শীর্ষ হতে উপকেন্দ্রের দূরত্ব হলো a

$\therefore a = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a = 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ একক

ধরি, পরাবৃত্তটির নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু $Z(\alpha, \beta)$

শীর্ষবিন্দু A হলো Z এবং S এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \frac{\alpha+3}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = -1$

$\frac{\beta+4}{2} = 2 \Rightarrow \beta = 0$

অর্থাৎ, নিয়ামক রেখার পাদবিন্দু $Z(-1, 0)$

পরাবৃত্তের অক্ষের ঢাল $m_1 = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$

নিয়ামক রেখাটি অক্ষের ওপর লম্ব, তাই এর ঢাল $m_2 = -1$

$Z(-1, 0)$ বিন্দুগামী নিয়ামকের সমীকরণ: $y - 0 = -1(x + 1)$

$\Rightarrow x + y + 1 = 0$

পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, এর ওপরস্থ যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ এর জন্য $SP = PM$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{(x+y+1)^2}{1^2+1^2}$

$\Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16) = (x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y)$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 12x - 16y + 50 = x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$

$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 - 14x - 18y + 49 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $(x-y)^2 - 14x - 18y + 49 = 0$ **(Ans.)**

২. প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 8x$ যার আদর্শ আকার $y^2 = 4(2)x$

এখানে, $a = 2$

সরলরেখার সমীকরণ: $2x - y + 9 = 0$ যার ঢাল $m_1 = 2$

আমরা জানি, কোনো রেখা এবং বক্ররেখার মধ্যবর্তী ন্যূনতম দূরত্ব রেখাটির সমান্তরাল ঐ বক্ররেখার স্পর্শক বরাবর হয়।

$2x - y + 9 = 0$ রেখার সমান্তরাল যেকোনো স্পর্শকের ঢাল $m = 2$ হবে।

পরাবৃত্তের ক্ষেত্রে, ঢাল m বিশিষ্ট স্পর্শকের সমীকরণ: $y = mx + \frac{a}{m}$

মান বসিয়ে পাই, $y = 2x + \frac{2}{2}$

$\Rightarrow y = 2x + 1$

$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0$

এটি হলো প্রদত্ত পরাবৃত্তের সেই স্পর্শক যা প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল।

এখন, ন্যূনতম দূরত্ব হবে সমান্তরাল রেখাদ্বয় $2x - y + 9 = 0$ এবং $2x - y + 1 = 0$ এর মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব।

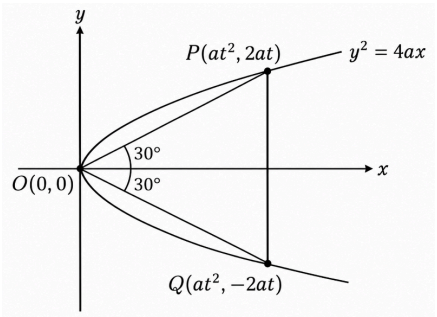
ন্যূনতম দূরত্ব, $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\Rightarrow d = \frac{|9-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$

$\Rightarrow d = \frac{8}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ ন্যূনতম দূরত্ব $\frac{8}{\sqrt{5}}$ একক। **(Ans.)**

৩. ধরি, পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু $O(0, 0)$ তে অবস্থিত। সমবাহু ত্রিভুজের অপর দুটি শীর্ষবিন্দু হলো P এবং Q। প্রতিসামতার কারণে P ও Q বিন্দুদ্বয় **x**-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম হবে।
ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, -2at)$



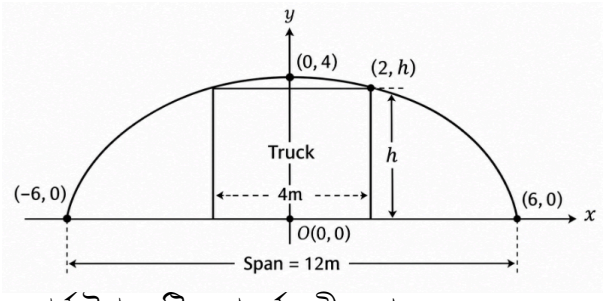
যেহেতু $\triangle OPQ$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ, এর প্রতিটি কোণ $60°$
পরাবৃত্তটির অক্ষ **(x-অক্ষ)** ত্রিভুজটির $\angle POQ$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
$\therefore \angle POx = \frac{60°}{2} = 30°$
OP রেখার ঢাল, $\tan 30° = \frac{2at-0}{at^2-0} = \frac{2}{t}$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{t}$
$\Rightarrow t = 2\sqrt{3}$
ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর দৈর্ঘ্য, OP এর সমান।
$OP = \sqrt{(at^2 - 0)^2 + (2at - 0)^2} = a\sqrt{t^4 + 4t^2}$
$t = 2\sqrt{3}$ বসিয়ে পাই,
$OP = a\sqrt{(2\sqrt{3})^4 + 4(2\sqrt{3})^2} = a\sqrt{144 + 4(12)} = a\sqrt{144 + 48} = a\sqrt{192} = 8\sqrt{3}a$
$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $8\sqrt{3}a$ একক। **(Ans.)**

৪. ধরি, স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু $P(x, y)$।
প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 8x$-কে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2$
পরাবৃত্তের যেকোনো স্পর্শকের সমীকরণ: $y = mx + \frac{a}{m}$
$\Rightarrow y = mx + \frac{2}{m}$
$\Rightarrow m^2x - my + 2 = 0$
এটি m-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যার মূলদ্বয় m_1 এবং m_2 ঐ ছেদবিন্দুগামী দুটি স্পর্শকের ঢাল নির্দেশ করে।
মূলদ্বয়ের যোগফল, $m_1 + m_2 = \frac{y}{x}$
মূলদ্বয়ের গুণফল, $m_1m_2 = \frac{2}{x}$
শর্তমতে, স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ
আমরা জানি, $\tan\theta = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$
বর্গ করে পাই,
$\tan^2\theta = \frac{(m_1-m_2)^2}{(1+m_1m_2)^2} = \frac{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}{(1+m_1m_2)^2}$
মান বসিয়ে পাই,
$\tan^2\theta = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-4\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}$
$\Rightarrow \tan^2\theta = \frac{\frac{y^2-8x}{x^2}}{\frac{(x+2)^2}{x^2}}$
$\Rightarrow \tan^2\theta = \frac{y^2-8x}{(x+2)^2}$
$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $(x + 2)^2 \tan^2\theta = y^2 - 8x$ **(Ans.)**
$x = 0$ হলে একটি স্পর্শক $x = 0$ এবং অপরটির ঢাল $\frac{2}{y}$। সেক্ষেত্রেও $4\tan^2\theta = y^2$, যা নির্ণীত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।
বিশেষ ক্ষেত্রে, স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $m_1m_2 = -1$
$\Rightarrow \frac{2}{x} = -1 \Rightarrow x = -2$; অর্থাৎ, ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নিয়ামক রেখা $x + 2 = 0$।

৫. প্রথম পরাবৃত্ত: $y^2 = 8x$ একে $y^2 = 4ax$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2$
এই পরাবৃত্তের যেকোনো স্পর্শকের সমীকরণ: $y = mx + \frac{2}{m}$
দ্বিতীয় পরাবৃত্ত: $x^2 = -8y$
যদি এই রেখাটি দ্বিতীয় পরাবৃত্তেরও স্পর্শক হয়, তবে এটি দ্বিতীয় পরাবৃত্তের সমীকরণকে সিদ্ধ করবে এবং প্রাপ্ত দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হবে (নিশ্চায়ক শূন্য হবে)।
y-এর মান $x^2 = -8y$ এ বসিয়ে পাই:
$x^2 = -8\left(mx + \frac{2}{m}\right)$
$\Rightarrow x^2 + 8mx + \frac{16}{m} = 0$
স্পর্শক হওয়ার শর্তমতে, এই সমীকরণের নিশ্চায়ক $D = 0$ হবে।
$\therefore (8m)^2 - 4(1)\left(\frac{16}{m}\right) = 0$
$\Rightarrow 64m^2 - \frac{64}{m} = 0$
$\Rightarrow m^2 - \frac{1}{m} = 0$
$\Rightarrow m^3 = 1$
$\Rightarrow m = 1$ (বাস্তব মূল)
$m = 1$ মানটি স্পর্শকের সমীকরণে বসালে নির্ণেয় সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়:
$y = 1(x) + \frac{2}{1}$
$\Rightarrow x - y + 2 = 0$
$\therefore$ সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ: $x - y + 2 = 0$ **(Ans.)**

৬. যেহেতু পরাবৃত্তটির অক্ষ y-অক্ষের সমান্তরাল, এর সমীকরণটিকে আমরা নিম্নলিখিত আকারে ধরতে পারি:
$y = ax^2 + bx + c$
পরাবৃত্তটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী। এতে বসিয়ে পাই,
$1 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 1$
পরাবৃত্তটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী এবং $c = 1$ বসিয়ে পাই,
$0 = a(1)^2 + b(1) + 1 \Rightarrow a + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -a - 1$
পরাবৃত্তটি $(2, 2)$ বিন্দুগামী,
$2 = a(2)^2 + b(2) + 1 \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = 1$
এখন $b = -a - 1$ মানটি বসাই:
$4a + 2(-a - 1) = 1$
$\Rightarrow 4a - 2a - 2 = 1$
$\Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$
a এর মান বসিয়ে পাই,
$b = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$
a, b, c এর মান বসালে পাই:
$y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$
$\Rightarrow 2y = 3x^2 - 5x + 2$
$\Rightarrow 3x^2 - 5x - 2y + 2 = 0$
$\therefore$ নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ: $3x^2 - 5x - 2y + 2 = 0$ **(Ans.)**

৭. ধরি, রাস্তার মধ্যবিন্দুটি হলো মূলবিন্দু $O(0, 0)$
যেহেতু ওভারপাসটি একটি অর্ধ-উপবৃত্তাকার, তাই উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষ **(Major axis)** ভূমি বরাবর এবং ক্ষুদ্র অক্ষ **(Minor axis)** উলম্ব বরাবর অবস্থিত।
দেওয়া আছে, ওভারপাসটির মোট প্রস্থ **(span) 12** মিটার।
$2a = 12 \Rightarrow a = 6$
কেন্দ্রে সর্বোচ্চ উচ্চতা **4** মিটার।
$b = 4$



সম্পূর্ণ উপবৃত্তটির আদর্শ সমীকরণ:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
ট্রাকটির প্রস্থ **4** মিটার এবং এটি একদম মাঝখান দিয়ে (কেন্দ্র বরাবর) যাবে।
ফলে, ট্রাকের দুই ধার **(edge) y**-অক্ষ থেকে উভয় দিকে $\frac{4}{2} = 2$ মিটার দূরে থাকবে।
অর্থাৎ, ট্রাকের প্রান্তবিন্দুগুলোর জন্য $x = 2$ এবং $x = -2$ হবে।
ট্রাকটি ওভারপাস পার হওয়ার সময় যেন ছাদ স্পর্শ না করে, তাই ট্রাকের উচ্চতা h এর মানটি $x = 2$ বিন্দুতে ওভারপাসের উচ্চতার সমান বা তার থেকে কম হতে হবে।
সমীকরণে $x = 2$ বসিয়ে পাই:
$\frac{2^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
$\Rightarrow \frac{4}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
$\Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
$\Rightarrow \frac{y^2}{16} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
$\Rightarrow y^2 = \frac{16 \times 8}{9} = \frac{128}{9}$
$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{128}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$
দশমিকে মান: $y \approx \frac{8 \times 1.414}{3} \approx 3.77$ মিটার।
$\therefore$ ট্রাকটির সর্বোচ্চ অনুমোদিত উচ্চতা $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ মিটার বা প্রায় 3.77 মিটার হতে পারে। **(Ans.)**

৮. ধরি, উপবৃত্তটির সমীকরণ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তটি $(2, -2)$ বিন্দুগামী,

$\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$

আবার, উপবৃত্তটি $(1, 4)$ বিন্দুগামী,

$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

এই সমীকরণকে **4** দ্বারা গুণ করে পাই:

$\frac{4}{a^2} + \frac{64}{b^2} = 4$

এই সমীকরণ হতে প্রথম সমীকরণ বিয়োগ করে পাই:

$\frac{60}{b^2} = 3 \Rightarrow b^2 = 20$

b^2-এর মান বসালে,

$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{20} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow a^2 = 5$

$\therefore$ উপবৃত্তটির সমীকরণ: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$

এখানে $b > a$, তাই উৎকেন্দ্রিকতা $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$

$e = \sqrt{1 - \frac{5}{20}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ সমীকরণ $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(Ans.)**

৯. প্রদত্ত উপবৃত্ত: $x^2 + 2y^2 = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

এখানে $a^2 = 8, b^2 = 4$

প্রদত্ত রেখা: $x - 2y + 4 = 0$

$\Rightarrow 2y = x + 4$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

রেখাটির ঢাল $m = \frac{1}{2}$

যেহেতু স্পর্শকগুলো এই রেখার সমান্তরাল, তাই স্পর্শকের ঢালও $m = \frac{1}{2}$ হবে।

উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

মান বসিয়ে পাই, $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{8\left(\frac{1}{4}\right) + 4}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{2 + 4} = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{6}$

$\Rightarrow 2y = x \pm 2\sqrt{6}$

$\therefore$ স্পর্শকগুলোর সমীকরণ: $x - 2y \pm 2\sqrt{6} = 0$

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের সূত্র: $\left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$

এখানে $c = \pm\sqrt{6}$

যখন $c = \sqrt{6}$;

$x = -\frac{8 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{4}{\sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$

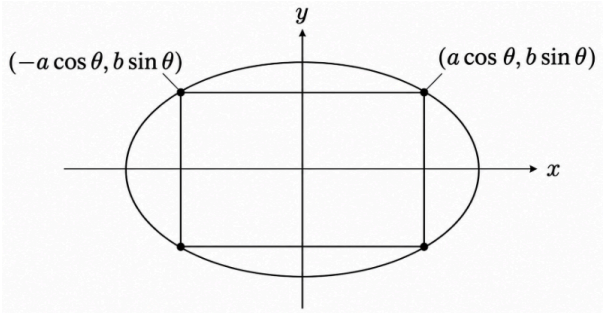
$y = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

যখন $c = -\sqrt{6}$;

$x = \frac{8 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ এবং $y = -\frac{4}{\sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\therefore$ সমীকরণ $x - 2y \pm 2\sqrt{6} = 0$ এবং স্পর্শবিন্দুসমূহ $\left(\mp\frac{2\sqrt{6}}{3}, \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ **(Ans.)**

১০. ধরি, উপবৃত্তে অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্রটির শীর্ষবিন্দুগুলো হলো $(x, y), (-x, y), (-x, -y)$ এবং $(x, -y)$।
আমরা পরামিতিক স্থানাঙ্কের সাহায্যে শীর্ষবিন্দু ধরতে পারি, $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$, যেখানে θ হলো প্রথম চতুর্ভাগে বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ।
আয়তক্ষেত্রটির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য হবে $2x = 2a\cos\theta$ এবং $2y = 2b\sin\theta$
আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = (2x)(2y) = (2a\cos\theta)(2b\sin\theta)$
$\Rightarrow A = 2ab(2\sin\theta\cos\theta) = 2ab\sin 2\theta$



ক্ষেত্রফল A সর্বোচ্চ হবে যদি $\sin 2\theta$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।
আমরা জানি, সাইন ফাংশনের সর্বোচ্চ মান **1**।
$\therefore \sin 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$
সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল $A_{max} = 2ab(1) = 2ab$ বর্গ একক।
$\theta = \frac{\pi}{4}$ হলে, $a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ এবং $b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$
$\therefore$ শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক: $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$
$\therefore$ সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল $2ab$ এবং শীর্ষবিন্দুগুলো $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ **(Ans.)**

১১. দেওয়া আছে, উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 4, 0)$
সুতরাং এর বৃহৎ অক্ষ **x**-অক্ষ বরাবর অবস্থিত এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে $(0, 0)$
উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$ হতে পাই, $ae = 4$
দেওয়া আছে, উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{1}{3}$
$\therefore a \times \frac{1}{3} = 4 \Rightarrow a = 12$
আমরা জানি, $b^2 = a^2(1 - e^2)$
$\Rightarrow b^2 = 144\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 144\left(\frac{8}{9}\right) = 16 \times 8 = 128$
উপবৃত্তটির সমীকরণ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\Rightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$
নিয়ামক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ: $x = \pm\frac{a}{e}$
$\Rightarrow x = \pm\frac{12}{\frac{1}{3}}$
$\Rightarrow x = \pm 36$
$\Rightarrow x \pm 36 = 0$
$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$ এবং নিয়ামক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ $x \pm 36 = 0$ **(Ans.)**

১২. কোনো বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) হতে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শজ্যা **(Chord of contact)** এর সমীকরণ হলো $T = 0$।
অর্থাৎ, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$
এখানে, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
এবং বহিঃস্থ বিন্দু $(x_1, y_1) \equiv (2, 3)$
মানগুলো স্পর্শজ্যা এর সমীকরণে বসালে পাই:
$\frac{x(2)}{9} + \frac{y(3)}{4} = 1$
$\Rightarrow \frac{2x}{9} + \frac{3y}{4} = 1$
ল.সা.গু **36** দ্বারা পুরো সমীকরণকে গুণ করে পাই:
$4(2x) + 9(3y) = 36$
$\Rightarrow 8x + 27y = 36$
$\Rightarrow 8x + 27y - 36 = 0$
$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শজ্যা-এর সমীকরণ: $8x + 27y - 36 = 0$ **(Ans.)**

১৩. প্রদত্ত সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে পরিণত করি:
$9x^2 - 36x + 16y^2 + 96y + 36 = 0$
$\Rightarrow 9(x^2 - 4x) + 16(y^2 + 6y) = -36$
$\Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4) + 16(y^2 + 6y + 9) = -36 + 36 + 144$
$\Rightarrow 9(x - 2)^2 + 16(y + 3)^2 = 144$
$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$
এটি $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ আকারের, যেখানে $X = x - 2, Y = y + 3$
এবং $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$। (যেহেতু $a > b$, বৃহৎ অক্ষ **x**-অক্ষ বরাবর)
i. কেন্দ্র: $X = 0 \Rightarrow x = 2$ এবং $Y = 0 \Rightarrow y = -3$
$\therefore$ কেন্দ্র $(2, -3)$
ii. উৎকেন্দ্রিকতা: $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$
iii. উপকেন্দ্রদ্বয়: $X = \pm ae$ এবং $Y = 0$
$x - 2 = \pm 4\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{7}$
$y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$
$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $(2 \pm \sqrt{7}, -3)$
$\therefore$ কেন্দ্র $(2, -3)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{\sqrt{7}}{4}$ এবং উপকেন্দ্রদ্বয় $(2 \pm \sqrt{7}, -3)$ **(Ans.)**

১৪. ধরি, নির্দিষ্ট বিন্দুগামী যেকোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $P(x_1, y_1)$।

আমরা জানি, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হলে, জ্যা-এর সমীকরণ হয় $T = S_1$

এখানে $T = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1$

এবং $S_1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$

সুতরাং, জ্যা-এর সমীকরণ:

$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1$

$\Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

প্রশ্নমতে, এই জ্যা-টি সর্বদা নির্দিষ্ট বিন্দু (h, k) দিয়ে অতিক্রম করে।

সুতরাং, (h, k) বিন্দুটি জ্যা-এর সমীকরণকে সিদ্ধ করবে। x এর স্থলে h এবং y এর স্থলে k বসিয়ে পাই:

$\frac{hx_1}{a^2} + \frac{ky_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$

এখন মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করার জন্য (x_1, y_1) কে সাধারণ স্থানাঙ্ক (x, y) দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই:

$\frac{hx}{a^2} + \frac{ky}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{hx}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{hx}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 0$ **(Ans.)**

বাস্তব ছেদজ্যার মধ্যবিন্দুর ক্ষেত্রে এই সঞ্চারপথের শুধু উপবৃত্তটির অভ্যন্তরীণ অংশটি প্রযোজ্য; স্পর্শকের ক্ষেত্রে মধ্যবিন্দু উপবৃত্তের উপরেও থাকতে পারে।

১৫. দেওয়া আছে, উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 5, 0)$ এবং শীর্ষবিন্দুদ্বয় $(\pm 4, 0)$

সুতরাং, অধিবৃত্তটির কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং আড় অক্ষ **x**-অক্ষ বরাবর অবস্থিত।

আমরা জানি, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$ এবং শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\pm a, 0)$

$\therefore a = 4$ এবং $ae = 5$

অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে, $b^2 = a^2e^2 - a^2$

$\Rightarrow b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

$\therefore a^2 = 16, b^2 = 9$

অধিবৃত্তটির আদর্শ সমীকরণ: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \frac{ae}{a} = \frac{5}{4}$

নিয়ামক রেখাদ্বয়ের সমীকরণ: $x = \pm\frac{a}{e}$

$\Rightarrow x = \pm\frac{4}{\frac{5}{4}} = \pm\frac{16}{5}$

উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 9}{4} = \frac{9}{2}$ একক।

$\therefore$ সমীকরণ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{5}{4}$, নিয়ামক রেখাদ্বয় $x = \pm\frac{16}{5}$ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{9}{2}$ একক। **(Ans.)**

১৬. প্রদত্ত সমীকরণ: $-16x^2 + 9y^2 + 64x + 36y - 172 = 0$

একে আদর্শ আকারে রূপান্তর করতে বর্গ সম্পূর্ণ করি।

$9(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 4x) = 172$

$\Rightarrow 9(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 4x + 4) = 172 + 36 - 64$

$\Rightarrow 9(y + 2)^2 - 16(x - 2)^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$

এখানে কেন্দ্র $(h, k) = (2, -2)$ এবং আড় অক্ষ **y**-অক্ষের সমান্তরাল।

$a^2 = 16, b^2 = 9 \Rightarrow a = 4, b = 3$

$ae = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

শীর্ষবিন্দুদ্বয়: $(h, k \pm a) = (2, -2 \pm 4) \Rightarrow (2, 2)$ এবং $(2, -6)$

উপকেন্দ্রদ্বয়: $(h, k \pm ae) = (2, -2 \pm 5) \Rightarrow (2, 3)$ এবং $(2, -7)$

আমরা জানি, $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের অসমতট রেখাদ্বয়ের সমীকরণ:

$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

$\Rightarrow y + 2 = \pm\frac{4}{3}(x - 2)$

অনুবন্ধী অধিবৃত্তের আড় অক্ষটি মূল অধিবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ বরাবর অবস্থিত।

$\therefore$ অনুবন্ধী অধিবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

$\therefore$ কেন্দ্র $(2, -2)$, শীর্ষবিন্দু $(2, 2), (2, -6)$, উপকেন্দ্র $(2, 3), (2, -7)$ এবং অসমতট $y + 2 = \pm\frac{4}{3}(x - 2)$ **(Ans.)**

১৭. প্রদত্ত অধিবৃত্ত: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

এখানে, $a^2 = 16$ এবং $b^2 = 9$

প্রদত্ত রেখা $4x - 3y + 7 = 0$ হতে পাই, $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$

$\therefore$ স্পর্শকের ঢাল $m = \frac{4}{3}$

আমরা জানি, অধিবৃত্তের m ঢালবিশিষ্ট স্পর্শকের সমীকরণ:

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$\Rightarrow y = \frac{4}{3}x \pm \sqrt{16\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 9}$

$\Rightarrow y = \frac{4}{3}x \pm \sqrt{\frac{256-81}{9}}$

$\Rightarrow y = \frac{4}{3}x \pm \frac{5\sqrt{7}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়: $4x - 3y \pm 5\sqrt{7} = 0$

ধরি, যেকোনো একটি স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx + c$; এখানে $c = \pm\frac{5\sqrt{7}}{3}$

অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক: $\left(-\frac{a^2m}{c}, -\frac{b^2}{c}\right)$

$m = \frac{4}{3}$ এবং $c = \pm\frac{5\sqrt{7}}{3}$ বসিয়ে পাই,

$x = -\frac{16\times\frac{4}{3}}{\pm\frac{5\sqrt{7}}{3}} = \mp\frac{64}{5\sqrt{7}}$

$y = -\frac{9}{\pm\frac{5\sqrt{7}}{3}} = \mp\frac{27}{5\sqrt{7}}$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুদ্বয় $\left(\mp\frac{64}{5\sqrt{7}}, \mp\frac{27}{5\sqrt{7}}\right)$ বা $\left(\pm\frac{64}{5\sqrt{7}}, \pm\frac{27}{5\sqrt{7}}\right)$, যেখানে প্রতিটি বিন্দুর উভয় স্থানাঙ্কের চিহ্ন একই। **(Ans.)**

১৮. প্রদত্ত অধিবৃত্ত: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

ধরি, $(0, 4)$ বিন্দুগামী যেকোনো স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx + 4$

অধিবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত: $c^2 = a^2m^2 - b^2$

$\therefore 4^2 = 9m^2 - 4$

$\Rightarrow 9m^2 = 20 \Rightarrow m = \pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$

m এর মান স্পর্শকের সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$y = \frac{2\sqrt{5}}{3}x + 4$

$y = -\frac{2\sqrt{5}}{3}x + 4$

$y = mx + c$ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু $\left(-\frac{a^2m}{c}, -\frac{b^2}{c}\right)$

এখানে $a^2 = 9, b^2 = 4$ এবং $c = 4$

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুদ্বয়: $\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}, -1\right)$ এবং $\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}, -1\right)$

আমরা জানি, (x_1, y_1) বিন্দু হতে অধিবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শজ্যা-এর সমীকরণ $T = 0$

$\Rightarrow \frac{xx_1}{9} - \frac{yy_1}{4} = 1$

$(x_1, y_1) = (0, 4)$ বসালে, $0 - y = 1$

$\therefore$ স্পর্শজ্যা-এর সমীকরণ: $y + 1 = 0$ **(Ans.)**

১৯. প্রদত্ত অধিবৃত্ত: $xy = 12$

উভয়পক্ষকে **x**-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$y + x\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$P(6, 2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $m_1 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

স্পর্শকের সমীকরণ: $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 6)$

$\Rightarrow x + 3y - 12 = 0$

অভিলম্বের ঢাল $m_2 = -\frac{1}{m_1} = 3$

অভিলম্বের সমীকরণ: $y - 2 = 3(x - 6)$

$\Rightarrow y = 3x - 16$

অভিলম্বটি অধিবৃত্তকে অপর একটি বিন্দু Q-তে ছেদ করে।

y-এর মান $xy = 12$ এ বসিয়ে পাই,

$x(3x - 16) = 12$

$\Rightarrow 3x^2 - 16x - 12 = 0$

$\Rightarrow (x - 6)(3x + 2) = 0$

$\therefore x = 6$ অথবা $x = -\frac{2}{3}$

$x = 6$ হলে মূল স্পর্শবিন্দু $P(6, 2)$ পাওয়া যায়।

অপর বিন্দুর জন্য $x = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে পাই,

$y = 3\left(-\frac{2}{3}\right) - 16 = -18$

$\therefore$ অপর ছেদবিন্দু $Q\left(-\frac{2}{3}, -18\right)$ **(Ans.)**

২০. প্রদত্ত অধিবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এবং $P(a\sec\theta, b\tan\theta)$

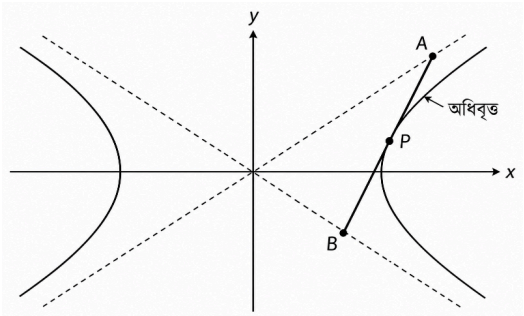
আমরা জানি, (x_1, y_1) বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ:

$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

$\therefore$ P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1$

অধিবৃত্তটির অসমতট রেখাদ্বয়ের সমীকরণ:

$y = \frac{b}{a}x$ এবং $y = -\frac{b}{a}x$



স্পর্শক ও প্রথম অসমতট রেখার সমীকরণ সমাধান করে **A** বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{x\tan\theta}{a} = 1$

$\Rightarrow x = \frac{a}{\sec\theta - \tan\theta}$

আমরা জানি, $(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

$\Rightarrow x = a(\sec\theta + \tan\theta)$

$\therefore A(a(\sec\theta + \tan\theta), b(\sec\theta + \tan\theta))$

একইভাবে, স্পর্শক ও দ্বিতীয় অসমতট রেখার সমীকরণ হতে পাই,

$\frac{x\sec\theta}{a} + \frac{x\tan\theta}{a} = 1$

$\Rightarrow x = \frac{a}{\sec\theta + \tan\theta} = a(\sec\theta - \tan\theta)$

$\therefore B(a(\sec\theta - \tan\theta), -b(\sec\theta - \tan\theta))$

A ও **B** বিন্দুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক:

$\left(\frac{a(\sec\theta+\tan\theta)+a(\sec\theta-\tan\theta)}{2}, \frac{b(\sec\theta+\tan\theta)-b(\sec\theta-\tan\theta)}{2}\right)$

$= (a\sec\theta, b\tan\theta) \equiv P$

$\therefore$ P বিন্দুটি **AB** রেখাংশের মধ্যবিন্দু। **(Proved.)**

Physics ২০০ নম্বর

২১. **(ক)** ধরি, স্বাভাবিক উচ্চতা h_0।

আমরা জানি, $h_0 = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$; এখানে $\theta = 0°$ বলে $\cos\theta = 1$, সুতরাং $h_0 = \frac{2T}{r\rho g}$

এখানে, $T = 7.2 \times 10^{-2}\,Nm^{-1}$, $r = 4 \times 10^{-4}\,m$, $\rho = 1000\,kgm^{-3}$, $g = 9.8\,ms^{-2}$

$h_0 = \frac{2\times7.2\times10^{-2}}{4\times10^{-4}\times1000\times9.8} = \frac{0.144}{3.92} \approx 0.03673\,m = 3.673\,cm$

যেহেতু নলের উপলব্ধ দৈর্ঘ্য $l = 2\,cm < h_0 = 3.673\,cm$, পানি স্বাভাবিক উচ্চতা পর্যন্ত উঠতে পারবে না — এটি ঠিক নলের প্রান্ত পর্যন্ত উঠবে এবং থেমে যাবে। (উপচে পড়বে না, কারণ তা করলে অতিরিক্ত পৃষ্ঠশক্তি লাগবে যা তরল সরবরাহ করতে পারবে না।)

(খ) সাম্যাবস্থায় মেনিসকাসের বক্রতা এমনভাবে পরিবর্তিত হবে যাতে চাপের ভারসাম্যে নতুন উচ্চতা ঠিক l-এর সমান হয়।

ধরি, মেনিসকাসের নতুন বক্রতার ব্যাসার্ধ R'। তাহলে, $\frac{2T}{R'} = \rho g l$

$R' = \frac{2T}{\rho g l} = \frac{2\times7.2\times10^{-2}}{1000\times9.8\times0.02} = \frac{0.144}{196} \approx 7.347 \times 10^{-4}\,m = 0.7347\,mm$

(এটি নলের ব্যাসার্ধ 0.4 mm-এর চেয়ে বড়, অর্থাৎ মেনিসকাস আগের চেয়ে কম বাঁকা।)

যেহেতু নলের প্রকৃত ব্যাসার্ধ $r = 0.4\,mm$ অপরিবর্তিত, নতুন আপাত স্পর্শকোণ θ' হলে, $r = R'\cos\theta'$

$\cos\theta' = \frac{r}{R'} = \frac{4\times10^{-4}}{7.347\times10^{-4}} \approx 0.5444$

সুতরাং, $\theta' = \cos^{-1}(0.5444) \approx 57.0°$

অতএব, **(ক)** $h_0 \approx 3.673\,cm$; **(খ)** $R' \approx 0.7347\,mm$ এবং আপাত স্পর্শকোণ $\theta' \approx 57.0°$।

২২. আমরা জানি, $T \propto \sqrt{L}$

অতএব, $\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{L'}{L}}$

এখানে, $L' = 1.05L$

সুতরাং, $\frac{T'}{T} = \sqrt{1.05} \approx 1.0247$

অর্থাৎ, দোলনকাল প্রায় 2.47 বৃদ্ধি পাবে।

দৈর্ঘ্য বাড়লে দোলনকাল বাড়ে, সুতরাং ঘড়িটি ধীরে চলবে (সময় কম দেখাবে)।

একদিনে $= 24 \times 3600 = 86400, s$

ঘড়িটি **24** ঘণ্টা দেখাতে প্রকৃত সময় লাগবে,

$86400 \times 1.0247 \approx 88533.4, s$

অতএব, একদিনে সময় ক্ষতি $= 88533.4 - 86400 = 2133.4, s$

$= \frac{2133.4}{60} \approx 35.6$ মিনিট

অতএব, ঘড়িটি একদিনে প্রায় 35.6 মিনিট কম দেখাবে।

২৩. ধরি, সিরিজ সমবায়ের তুল্য স্প্রিং ধ্রুবক k_s

$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, অর্থাৎ $k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

$k_s = \frac{40 \times 60}{40+60} = \frac{2400}{100} = 24\,Nm^{-1}$

এই সিরিজ সমবায় k_3 স্প্রিং-এর সাথে সমান্তরালে যুক্ত, তাই তুল্য ধ্রুবক $k_{eq} = k_s + k_3$

$k_{eq} = 24 + 120 = 144\,Nm^{-1}$

দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{10}{144}} = 2\pi \times 0.2635 \approx 1.66\,s$

অতএব, দোলনকাল প্রায় 1.66 s।

২৪. এখানে, ইস্পাত ও পিতলের রডের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $L_1 = 0.5\,m$, $L_2 = 0.3\,m$ এবং তাপমাত্রা বৃদ্ধি $\Delta\theta = 50\,K$

দেয়াল দুটি অনড় হওয়ায় সমগ্র রডের প্রকৃত দৈর্ঘ্য পরিবর্তন শূন্য হতে হবে।

বাধা না থাকলে মুক্ত তাপীয় প্রসারণ হতো, $\Delta L_{free} = \Delta\theta(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)$

$\Delta L_{free} = 50 \times (1.2 \times 10^{-5} \times 0.5 + 1.8 \times 10^{-5} \times 0.3) = 50 \times (6 \times 10^{-6} + 5.4 \times 10^{-6}) = 50 \times 1.14 \times 10^{-5} = 5.7 \times 10^{-4}\,m$

দেয়াল একে আটকে রাখায় রডের ভেতরে একটি সংকোচনমূলক বল F সৃষ্টি হবে যা এই প্রসারণকে ঠিক বাতিল করে দেবে।

রড দুটি প্রান্তে প্রান্তে জোড়া (সিরিজে) থাকায় সমগ্র রড জুড়ে বল F একই থাকবে।

এই বলের কারণে স্থিতিস্থাপক সংকোচন $= F\left(\frac{L_1}{A_1 Y_1} + \frac{L_2}{A_2 Y_2}\right)$

প্রশ্নমতে, এই সংকোচন মুক্ত প্রসারণের সমান, অর্থাৎ $F\left[\frac{0.5}{2\times10^{-4}\times2\times10^{11}} + \frac{0.3}{3\times10^{-4}\times1\times10^{11}}\right] = 5.7 \times 10^{-4}$

বন্ধনীর মান $= 1.25 \times 10^{-8} + 1 \times 10^{-8} = 2.25 \times 10^{-8}\,mN^{-1}$

সুতরাং $F = \frac{5.7\times10^{-4}}{2.25\times10^{-8}} \approx 25333\,N$

ইস্পাতে পীড়ন $= \frac{F}{A_1} = \frac{25333}{2\times10^{-4}} \approx 1.267 \times 10^8\,Nm^{-2}$

পিতলে পীড়ন $= \frac{F}{A_2} = \frac{25333}{3\times10^{-4}} \approx 8.44 \times 10^7\,Nm^{-2}$

অতএব, ইস্পাতে পীড়ন $\approx 1.267 \times 10^8\,Nm^{-2}$ এবং পিতলে পীড়ন $\approx 8.44 \times 10^7\,Nm^{-2}$ (উভয়ই সংকোচনমূলক)।

২৫. ধরি, ব্লকের সরণ x এবং প্রতিটি স্প্রিং গতিপথের সাথে θ কোণে আছে।
ক্ষুদ্র সরণের জন্য প্রতিটি স্প্রিং বরাবর প্রসারণ (বা সংকোচন) $\approx x\cos\theta$
সুতরাং স্প্রিং দুটির বল যথাক্রমে $k_1 x\cos\theta$ ও $k_2 x\cos\theta$ এবং গতিপথ বরাবর এদের উপাংশ $(k_1 x\cos\theta)\cos\theta$ ও $(k_2 x\cos\theta)\cos\theta$
মোট প্রত্যানয়ন বল, $F = (k_1 + k_2)x\cos^2\theta$
তুল্য ধ্রুবক, $k_{eff} = (k_1 + k_2)\cos^2\theta$
গতির সমীকরণ, $m\ddot{x} = -k_{eff}x$
$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \cos\theta\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$
এখানে, $k_1 + k_2 = 200 + 300 = 500\,\text{Nm}^{-1}$, $m = 2\,\text{kg}$, $\theta = 30°$
$\omega = \cos 30° \times \sqrt{\frac{500}{2}} = 0.866 \times \sqrt{250} = 0.866 \times 15.81 \approx 13.69\,\text{rads}^{-1}$
অতএব, কৌণিক কম্পাঙ্ক প্রায় $13.69\,\text{rads}^{-1}$।

২৬. এখানে, গোলকের ব্যাসার্ধ $r = 2 \times 10^{-3}\,\text{m}$, ঘনত্ব $\rho = 7800\,\text{kgm}^{-3}$, $g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$
প্রতিটি স্তরে গোলকটি সেই স্তরের জন্য প্রযোজ্য প্রান্তিক বেগে চলে, তাই প্রতিটি স্তরের জন্য আলাদাভাবে স্টোকসের সূত্র প্রয়োগ করে সময় বের করে যোগ করতে হবে।
স্টোকসের সূত্র অনুযায়ী প্রান্তিক বেগ, $v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$ [σ = তরলের ঘনত্ব]
গ্লিসারিন স্তরে, $v_1 = \frac{2}{9} \times \frac{(2\times10^{-3})^2\times(7800-1260)\times9.8}{1.5} = \frac{2}{9} \times \frac{4\times10^{-6}\times6540\times9.8}{1.5} \approx 0.0380\,\text{ms}^{-1}$
এই স্তর অতিক্রম করতে সময়, $t_1 = \frac{0.3}{v_1} = \frac{0.3}{0.0380} \approx 7.90\,\text{s}$
তেল স্তরে, $v_2 = \frac{2}{9} \times \frac{(2\times10^{-3})^2\times(7800-900)\times9.8}{0.2} = \frac{2}{9} \times \frac{4\times10^{-6}\times6900\times9.8}{0.2} \approx 0.3005\,\text{ms}^{-1}$
এই স্তর অতিক্রম করতে সময়, $t_2 = \frac{0.5}{v_2} = \frac{0.5}{0.3005} \approx 1.664\,\text{s}$
মোট সময়, $t = t_1 + t_2 \approx 7.90 + 1.664 \approx 9.56\,\text{s}$
অতএব, মোট সময় লাগবে প্রায় $9.56\,\text{s}$।

২৭. এখানে, $r = 5 \times 10^{-4}\,\text{m}$, $h = 0.03\,\text{m}$, $\rho = 1000\,\text{kgm}^{-3}$, $g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$
সরলীকৃত সূত্র অনুযায়ী, $T_{simple} = \frac{r\rho gh}{2} = \frac{5\times10^{-4}\times1000\times9.8\times0.03}{2} = 0.0735\,\text{Nm}^{-1}$
মেনিসকাসের নিচের অতিরিক্ত পানি (অর্ধগোলকাকার ধরে) $\frac{r}{3}$ উচ্চতার সমান পানির স্তম্ভের মতো কাজ করে; তাই সংশোধিত সূত্র, $T_{corrected} = \frac{r\rho g\left(h+\frac{r}{3}\right)}{2}$
বন্ধনীর ভেতরে, $h + \frac{r}{3} = 0.03 + \frac{5\times10^{-4}}{3} = 0.03 + 1.667 \times 10^{-4} = 0.030167\,\text{m}$
$T_{corrected} = \frac{5\times10^{-4}\times1000\times9.8\times0.030167}{2} \approx 0.07391\,\text{Nm}^{-1}$
শতকরা ত্রুটি $= \frac{T_{simple}-T_{corrected}}{T_{corrected}} \times 100\% = \frac{0.0735-0.07391}{0.07391} \times 100\% \approx -0.55\%$
অতএব, সরলীকৃত সূত্রে $T \approx 0.0735\,\text{Nm}^{-1}$, সংশোধিত সূত্রে $T \approx 0.0739\,\text{Nm}^{-1}$ এবং শতকরা ত্রুটি প্রায় -0.55%; অর্থাৎ সরলীকৃত সূত্র প্রকৃত মানের চেয়ে প্রায় 0.55% কম মান দেয়।

২৮. এখানে, $t = 5$ ঘণ্টা $= 5 \times 3600 = 18000\,\text{s}$, $\Delta t = 15\,\text{s}$, $R = 6400\,\text{km}$
পর্বতের চূড়ায় g হ্রাস পায়: $g_h = \frac{gR^2}{(R+h)^2} \approx g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ [$h \ll R$]
যেহেতু $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, তাই $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta g}{g}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2h}{R} = \frac{h}{R}$
দোলনকাল $\frac{h}{R}$ ভগ্নাংশ বৃদ্ধি পাওয়ায় t সময়ে ঘড়ির সময়ের পার্থক্য Δt হলে, $\frac{h}{R} = \frac{\Delta t}{t}$
$\frac{h}{R} = \frac{15}{18000} = 8.333 \times 10^{-4}$
$h = 8.333 \times 10^{-4} \times 6400\,\text{km} \approx 5.33\,\text{km}$
অতএব, পাহাড়ের উচ্চতা প্রায় $5.33\,\text{km}$।

২৯. এখানে, $A = 7$, $\omega = 3\pi\ \text{rads}^{-1}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$
ধরি, $\theta = \omega t + \phi$
বেগ, $v = -A\omega \sin\theta$ এবং ত্বরণ, $a = -A\omega^2 \cos\theta$
প্রশ্নমতে, $|v| = |a|$
বা, $A\omega|\sin\theta| = A\omega^2|\cos\theta|$
বা, $|\tan\theta| = \omega = 3\pi \approx 9.4248$
সুতরাং, $\theta = n\pi \pm \tan^{-1}(3\pi) = n\pi \pm 83.94°$ **(**$= n\pi \pm 1.4651$ rad**)**, যেখানে n পূর্ণসংখ্যা
আবার, $t = \frac{\theta-\phi}{\omega} = \frac{\theta-\frac{\pi}{4}}{3\pi}$
$n = 0$ এবং **(+)** চিহ্নের জন্য, $\theta = 1.4651$ rad; $t = \frac{1.4651-0.7854}{9.4248} \approx 0.0721$ s
$n = 1$ এবং **(−)** চিহ্নের জন্য, $\theta = \pi - 1.4651 = 1.6765$ rad; $t = \frac{1.6765-0.7854}{9.4248} \approx 0.0946$ s
এরপর প্রতি $\frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{3}$ s অন্তর সমাধানগুলো পুনরাবৃত্তি হবে।
অতএব, $t = \left(0.0721 + \frac{n}{3}\right)$ s এবং $t = \left(0.0946 + \frac{n}{3}\right)$ s, যেখানে $n = 0, 1, 2, \ldots$

৩০. এখানে, বল $F = 4 \times 10^{10}$ dyne, ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য $L = 3$ cm, ঊর্ধ্বতলের ক্ষেত্রফল $A = 3 \times 3 = 9\ \text{cm}^2$, সরণ $x = 0.005$ cm
আমরা জানি, দৃঢ়তা গুণাংক, $\eta = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{x}{L}} = \frac{FL}{Ax}$
$\eta = \frac{4\times10^{10}\times3}{9\times0.005} = \frac{1.2\times10^{11}}{0.045} \approx 2.67 \times 10^{12}\ \text{dynecm}^{-2}$
অতএব, **Al**-এর দৃঢ়তা গুণাংক $\approx 2.67 \times 10^{12}\ \text{dynecm}^{-2}$ **(**$= 2.67 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}$**)**।

৩১. এখানে, $\eta = 1 \times 10^{-3}$ Pas, $L = 0.2$ m, $r_1 = 1 \times 10^{-3}$ m, $r_2 = 1.5 \times 10^{-3}$ m
সমান্তরাল সংযোগে উভয় নলের মধ্য দিয়ে একই চাপ পার্থক্য ΔP প্রযোজ্য, কিন্তু মোট প্রবাহের হার হলো পৃথক প্রবাহের হারের সমষ্টি — এটি সমান্তরাল বৈদ্যুতিক রোধের মতো, অর্থাৎ $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
তরল-রোধ, $R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$
$R_1 = \frac{8\times10^{-3}\times0.2}{\pi\times(10^{-3})^4} \approx 5.093 \times 10^8\ \text{Pasm}^{-3}$
$R_2 = \frac{8\times10^{-3}\times0.2}{\pi\times(1.5\times10^{-3})^4} \approx 1.006 \times 10^8\ \text{Pasm}^{-3}$
$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{5.093\times10^8} + \frac{1}{1.006\times10^8} \approx 1.964 \times 10^{-9} + 9.940 \times 10^{-9} = 1.190 \times 10^{-8}$
$R_{eq} = \frac{1}{1.190\times10^{-8}} \approx 8.401 \times 10^7\ \text{Pasm}^{-3}$
এখন সমতুল্য নলের ব্যাসার্ধ r_{eq} হলে, $R_{eq} = \frac{8\eta L}{\pi r_{eq}^4}$
$r_{eq}^4 = \frac{8\eta L}{\pi R_{eq}} = \frac{8\times10^{-3}\times0.2}{\pi\times8.401\times10^7} \approx 6.062 \times 10^{-12}\ \text{m}^4$
$r_{eq} = (6.062 \times 10^{-12})^{1/4} \approx 1.569 \times 10^{-3}\ \text{m} \approx 1.57\ \text{mm}$
যাচাই: $r_{eq}^4 = r_1^4 + r_2^4 = 1 + 5.0625 = 6.0625\ \text{mm}^4$
অতএব, সমতুল্য নলের ব্যাসার্ধ প্রায় 1.57 mm।

৩২. এখানে, $T = 2$ s, $T' = 2.0016$ s, $R = 6400$ km
ধরি, পর্বতের উচ্চতা h
সমুদ্রপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ g এবং চূড়ায় $g' = \frac{gR^2}{(R+h)^2}$
যেহেতু $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, অর্থাৎ $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, তাই $\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$
সুতরাং, $\frac{T'-T}{T} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{h}{R}$
$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2.0016-2}{2} = \frac{0.0016}{2} = 8 \times 10^{-4}$
$h = \frac{\Delta T}{T} \times R = 8 \times 10^{-4} \times 6400\ \text{km} = 5.12\ \text{km}$
অতএব, পর্বতের উচ্চতা 5.12 km।

৩৩. এখানে, $m = 0.5\,\text{kg}$, $A = 0.2\,\text{m}$, $x = 0.12\,\text{m}$ দূরত্বে গতিশক্তি $KE = 0.1024\,\text{J}$, প্রাথমিক দশা $\phi = \frac{\pi}{3}$
ধরি, সরণের সমীকরণ $x = A\sin(\omega t + \phi)$
গতিশক্তি, $KE = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$
$0.1024 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times \omega^2 \times (0.2^2 - 0.12^2) = 0.25\omega^2(0.04 - 0.0144) = 0.25\omega^2 \times 0.0256 = 0.0064\omega^2$
$\omega^2 = \frac{0.1024}{0.0064} = 16$
$\omega = 4\,\text{rads}^{-1}$
সুতরাং, $x = 0.2\sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)\ \text{m}$
বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$; এখানে $A\omega = 0.2 \times 4 = 0.8\,\text{ms}^{-1}$
বেগের সমীকরণ: $v = 0.8\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)\ \text{ms}^{-1}$
ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$; এখানে $A\omega^2 = 0.2 \times 16 = 3.2\,\text{ms}^{-2}$
ত্বরণের সমীকরণ: $a = -3.2\sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)\ \text{ms}^{-2}$

৩৪. **(ক)** সাবানের বুদ্বুদের দুটি তল থাকায় প্রতিটি বুদ্বুদের ভিতরের চাপ $P_i = P_0 + \frac{4T}{r_i}$
$r_1 = 1 \times 10^{-5}\,\text{m}$ হলে $\frac{4T}{r_1} = \frac{4\times7\times10^{-2}}{1\times10^{-5}} = 2.8 \times 10^4\,\text{Pa}$, যা $P_0 = 1 \times 10^5\,\text{Pa}$-এর প্রায় 28%
আবার $r_2 = 2 \times 10^{-5}\,\text{m}$ হলে $\frac{4T}{r_2} = 1.4 \times 10^4\,\text{Pa}$, যা P_0-এর প্রায় 14%
শুধু আয়তন সংরক্ষণ $(V = V_1 + V_2)$ তখনই প্রায় সঠিক হয় যখন বুদ্বুদের ভিতরের চাপ P_0-এর প্রায় সমান থাকে, অর্থাৎ অতিরিক্ত চাপ $\frac{4T}{r}$ নগণ্য হয়। এখানে অতিরিক্ত চাপ নগণ্য নয়, তাই শুধু আয়তন সংরক্ষণ ব্যবহার করলে ত্রুটি হবে (এই ত্রুটির পরিমাণ (খ) অংশের শেষে দেখানো হলো)।
(খ) তাপমাত্রা অপরিবর্তিত এবং গ্যাস বাইরে যায় না, তাই বয়েলের সূত্র অনুযায়ী মোট PV সংরক্ষিত থাকে।
ধরি, চূড়ান্ত বুদ্বুদের ব্যাসার্ধ R
$P_1V_1 + P_2V_2 = P_fV_f$
$\left(P_0 + \frac{4T}{r_1}\right)\frac{4}{3}\pi r_1^3 + \left(P_0 + \frac{4T}{r_2}\right)\frac{4}{3}\pi r_2^3 = \left(P_0 + \frac{4T}{R}\right)\frac{4}{3}\pi R^3$
$\frac{4}{3}\pi$ বাতিল করে, $P_0(r_1^3 + r_2^3) + 4T(r_1^2 + r_2^2) = P_0R^3 + 4TR^2$
এখানে, $r_1^3 + r_2^3 = 1 \times 10^{-15} + 8 \times 10^{-15} = 9 \times 10^{-15}\,\text{m}^3$ এবং $r_1^2 + r_2^2 = 1 \times 10^{-10} + 4 \times 10^{-10} = 5 \times 10^{-10}\,\text{m}^2$
বামপক্ষ, $S = 10^5 \times 9 \times 10^{-15} + 4 \times 0.07 \times 5 \times 10^{-10} = 9 \times 10^{-10} + 1.4 \times 10^{-10} = 1.04 \times 10^{-9}$
সুতরাং R-এর ত্রিঘাত সমীকরণ: $P_0R^3 + 4TR^2 = 1.04 \times 10^{-9}$, অর্থাৎ $10^5R^3 + 0.28R^2 = 1.04 \times 10^{-9}$
সংখ্যাগতভাবে (পুনরাবৃত্তিমূলক পদ্ধতিতে) সমাধান করে $R \approx 2.093 \times 10^{-5}\,\text{m}$
যাচাই: $R = 2.093 \times 10^{-5}\,\text{m}$ হলে $10^5 \times (2.093 \times 10^{-5})^3 \approx 9.169 \times 10^{-10}$ এবং $0.28 \times (2.093 \times 10^{-5})^2 \approx 1.227 \times 10^{-10}$; যোগফল $\approx 1.040 \times 10^{-9}$, যা S-এর সমান।
তুলনার জন্য, শুধু আয়তন সংরক্ষণ থেকে $R_V = (r_1^3 + r_2^3)^{1/3} = (9 \times 10^{-15})^{1/3} \approx 2.080 \times 10^{-5}\,\text{m}$
ব্যাসার্ধে পার্থক্য $= \frac{2.093-2.080}{2.080} \times 100\% \approx 0.64\%$ (আয়তনে প্রায় 1.9%); অর্থাৎ বায়ুমণ্ডলীয় চাপের প্রভাব উপেক্ষা করলে এই পরিমাণ ত্রুটি হয়।
অতএব, চূড়ান্ত বুদ্বুদের ব্যাসার্ধ $R \approx 2.093 \times 10^{-5}\,\text{m}$।

৩৫. ধরি, কণা দুটির সরণ $x_1 = A\sin(\omega t + \phi_1)$ এবং $x_2 = A\sin(\omega t + \phi_2)$; অতিক্রমের মুহূর্তে কোণ দুটি $\theta_1 = \omega t + \phi_1$ ও $\theta_2 = \omega t + \phi_2$
অতিক্রমের মুহূর্তে $x_1 = x_2 = x_0 = \frac{A}{3}$, সুতরাং $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \frac{1}{3}$
কণা দুটি বিপরীত দিকে চলায় তাদের বেগ $(A\omega\cos\theta)$ বিপরীতমুখী, তাই কোণ দুটি সম্পূরক: $\theta_2 = \pi - \theta_1$
দশা পার্থক্য, $\delta = \phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1 = \pi - 2\theta_1$
আবার, $\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)$; সুতরাং $\delta = \pi - 2\sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)$
$\frac{x_0}{A} = \frac{1}{3}$ বসিয়ে, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 19.47°$
$\delta = 180° - 2 \times 19.47° = 180° - 38.94° = 141.06°$
অতএব, কণা দুটির দশা পার্থক্য $141.06°$।

৩৬. ধরি, কেন্দ্র থেকে r দূরত্বে পাথরটির ভর m
এই বিন্দুতে কেবল r ব্যাসার্ধের গোলকের ভর অভিকর্ষ বল প্রয়োগ করে; সেই গোলকের ভর $M_r = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g(r) = \frac{GM_r}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho r$
পাথরটির ত্বরণ কেন্দ্রের দিকে, অর্থাৎ $a = -\frac{4}{3}\pi G\rho\, r$; এটি $a = -\omega^2 r$ আকারের সরল ছন্দিত গতির সমীকরণ
$\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho$
দোলনকাল, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$
এখানে, $G\rho = 6.674 \times 10^{-11} \times 6800 = 4.538 \times 10^{-7}$
$\frac{3\pi}{G\rho} = \frac{9.4248}{4.538\times10^{-7}} \approx 2.077 \times 10^7$
$T = \sqrt{2.077 \times 10^7} \approx 4557\,\text{s} \approx 76.0$ মিনিট
অতএব, দোলনকাল প্রায় 4557 s (প্রায় 76.0 মিনিট)।

৩৭. এখানে, তারের দৈর্ঘ্য $L = 10\,\text{m}$, ঘনত্ব $\rho = 7800\,\text{kgm}^{-3}$, $Y = 2 \times 10^{11}\,\text{Nm}^{-2}$ এবং ধরি প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল A (ধ্রুবক)
তারের নিচের প্রান্ত থেকে উপরের দিকে x দূরত্বে dx দৈর্ঘ্যের একটি ক্ষুদ্র অংশ বিবেচনা করি।
এই অংশে টান বল = এর নিচে ঝুলন্ত অংশের ওজন, $F(x) = \rho Axg$
এই ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $d\delta = \frac{F(x)\,dx}{AY} = \frac{\rho Axg\,dx}{AY} = \frac{\rho gx}{Y}dx$ (এখানে A কাটা যায়)
মোট দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $\delta = \int_0^L \frac{\rho gx}{Y}dx = \frac{\rho g}{Y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\rho gL^2}{2Y}$
এই রাশিতে A নেই, সুতরাং দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে না।
$\delta = \frac{7800\times9.8\times10^2}{2\times2\times10^{11}} = \frac{7.644\times10^6}{4\times10^{11}} \approx 1.911 \times 10^{-5}\,\text{m} = 0.01911\,\text{mm}$
অতএব, তারের মোট দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি প্রায় $1.911 \times 10^{-5}\,\text{m}$ ($\approx 0.0191\,\text{mm}$)।

৩৮. এখানে, $r_1 = 2 \times 10^{-3}\,\text{m}$, $r_2 = 4 \times 10^{-3}\,\text{m}$, $L = 2\,\text{m}$, $F = 1000\,\text{N}$, $Y = 2 \times 10^{11}\,\text{Nm}^{-2}$
সরু প্রান্ত থেকে x দূরত্বে ব্যাসার্ধ, $r(x) = r_1 + \frac{(r_2-r_1)x}{L}$ এবং ক্ষেত্রফল $A(x) = \pi r(x)^2$
dx দৈর্ঘ্যের ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $d\delta = \frac{F\,dx}{A(x)Y}$
মোট দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $\delta = \frac{F}{\pi Y}\int_0^L \frac{dx}{\left[r_1+\frac{(r_2-r_1)x}{L}\right]^2}$
ধরি, $b = \frac{r_2-r_1}{L}$; তাহলে $\int_0^L \frac{dx}{(r_1+bx)^2} = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1+bL}\right] = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{b} \times \frac{r_2-r_1}{r_1r_2}$
আবার, $\frac{r_2-r_1}{b} = L$, সুতরাং ইন্টিগ্রেলের মান $= \frac{L}{r_1r_2}$
$\delta = \frac{FL}{\pi Y r_1 r_2}$
$\delta = \frac{1000\times2}{\pi\times2\times10^{11}\times2\times10^{-3}\times4\times10^{-3}} = \frac{2000}{\pi\times2\times10^{11}\times8\times10^{-6}} \approx 3.979 \times 10^{-4}\,\text{m} \approx 0.398\,\text{mm}$
অতএব, রডের মোট দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি প্রায় 0.398 mm।

৩৯. এখানে, $T = 2\,\text{s}$, $g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$, ববের ঘনত্ব $\rho_b = 8000\,\text{kgm}^{-3}$, তরলের ঘনত্ব $\rho_l = 1200\,\text{kgm}^{-3}$, নিমজ্জিত ভগ্নাংশ $f = 0.4$
ধরি, ববের আয়তন V ও ভর $m = V\rho_b$
নিমজ্জিত অংশ থেকে ঊর্ধ্বমুখী প্লবতা বল, $F_b = fV\rho_l g$
কার্যকর ওজন $= mg - fV\rho_l g = mg\left(1 - f\frac{\rho_l}{\rho_b}\right)$, সুতরাং কার্যকর অভিকর্ষজ ত্বরণ $g' = g\left(1 - f\frac{\rho_l}{\rho_b}\right)$
$g' = 9.8 \times \left(1 - 0.4 \times \frac{1200}{8000}\right) = 9.8 \times (1 - 0.06) = 9.8 \times 0.94 = 9.212\,\text{ms}^{-2}$
যেহেতু $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, $T' = T\sqrt{\frac{g}{g'}}$
$T' = 2 \times \sqrt{\frac{9.8}{9.212}} = 2 \times 1.0314 \approx 2.063\,\text{s}$
অতএব, নতুন দোলনকাল প্রায় 2.063 s।

৪০. এখানে, $d = 1\,m$; ইস্পাত তারের জন্য $A_1 = 1 \times 10^{-6}\,m^2$, $Y_1 = 2 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$; তামার তারের জন্য $A_2 = 2 \times 10^{-6}\,m^2$, $Y_2 = 1.1 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$
ধরি, তার দুটির টান যথাক্রমে T_1 ও T_2 এবং উভয়ের প্রাথমিক দৈর্ঘ্য L
দণ্ডটি অনুভূমিক থাকতে হলে উভয় তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি সমান হতে হবে, $\Delta L_1 = \Delta L_2$
আমরা জানি, $\Delta L = \frac{TL}{AY}$; সুতরাং $\frac{T_1 L}{A_1 Y_1} = \frac{T_2 L}{A_2 Y_2}$, অর্থাৎ $\frac{T_1}{T_2} = \frac{A_1 Y_1}{A_2 Y_2}$
$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1\times10^{-6}\times2\times10^{11}}{2\times10^{-6}\times1.1\times10^{11}} = \frac{2\times10^5}{2.2\times10^5} = \frac{10}{11}$
ভার W প্রথম তার থেকে x দূরত্বে স্থাপন করলে ভার বিন্দুর সাপেক্ষে দণ্ডের ঘূর্ণন-সাম্যের শর্ত: $T_1 x = T_2(d - x)$
বা, $\frac{x}{d-x} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{11}{10}$
বা, $10x = 11(d - x)$
বা, $21x = 11d$
$x = \frac{11d}{21} = \frac{11\times1}{21} \approx 0.524\,m$
অতএব, ভারটি ইস্পাত তার থেকে প্রায় $0.524\,m$ দূরত্বে স্থাপন করতে হবে।

Chemistry ২০০ নম্বর

৪১. A: $E_1 \rightarrow E_2$ অনুপাত = $4562/496 \approx 9.2$ (বিশাল লাফ) ⇒ যোজনী ইলেকট্রন ১টি ⇒ গ্রুপ ১, জারণ সংখ্যা +1।
B: $E_2 \rightarrow E_3$ অনুপাত = $7733/1451 \approx 5.3$ (বিশাল লাফ) ⇒ যোজনী ইলেকট্রন ২টি ⇒ গ্রুপ ২, জারণ সংখ্যা +2।
C: $E_3 \rightarrow E_4$ অনুপাত = $11577/2745 \approx 4.2$ (বিশাল লাফ) ⇒ যোজনী ইলেকট্রন ৩টি ⇒ গ্রুপ ১৩, জারণ সংখ্যা +3।
D: চারটি মানের মধ্যে কোনো বিশাল লাফ নেই ⇒ যোজনী ইলেকট্রন কমপক্ষে ৪টি, লাফ E_5 বা তার পরে ⇒ গ্রুপ ১৪ (বা তার বেশি), জারণ সংখ্যা কমপক্ষে +4।

৪২. $l = 1, n = 3$ ⇒ শেষ ইলেকট্রন 3p উপস্তরে।
$E_5 \rightarrow E_6$-এ লাফ ⇒ যোজনী ইলেকট্রন সংখ্যা = 5।
$3s^2 3p^3$ হলে মোট যোজনী ইলেকট্রন = 2 + 3 = 5 ✓ (মিলে যাচ্ছে)।
ইলেকট্রন বিন্যাস: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$।
পারমাণবিক সংখ্যা, $Z = 2 + 2 + 6 + 2 + 3 = 15$ (P, ফসফরাস)।
সর্বোচ্চ জারণ সংখ্যা = +5।

৪৩. ৩টি ইলেকট্রন অপসারণের জন্য প্রয়োজনীয় মোট শক্তি (প্রতি মোলে):
$E_{total} = E_1 + E_2 + E_3 = 578 + 1817 + 2745 = 5140\,kJ/mol$
$500\,g$ Al-এর মোল সংখ্যা, $n = \frac{500}{27} = 18.52\,mol$
মোট শক্তি = $18.52 \times 5140 = 95,192\,kJ \approx 95.2 \times 10^3\,kJ$

৪৪. Be → B ডিপ: $Be(1s^2 2s^2)$-এর $E_1 = 899\,kJ/mol$; $B(1s^2 2s^2 2p^1)$-এর $E_1 = 801\,kJ/mol$।
কারণ: Be-এর পূর্ণ $2s^2$ উপস্তর অতিরিক্ত স্থিতিশীল, কিন্তু B-তে নতুন $2p^1$ ইলেকট্রন উচ্চতর শক্তির অরবিটালে এবং 2s দ্বারা আংশিক স্ক্রিন্ড হওয়ায় সহজে অপসারিত হয়।
N → O ডিপ: $N(2p^3)$-এর $E_1 = 1402\,kJ/mol$; $O(2p^4)$-এর $E_1 = 1314\,kJ/mol$।
কারণ: N-এর অর্ধপূর্ণ $2p^3$ অতিরিক্ত স্থিতিশীল, কিন্তু O-তে ৪র্থ ইলেকট্রন জোড়বদ্ধ হওয়ায় আন্তঃইলেকট্রনিক বিকর্ষণে E_1 হ্রাস পায়।
উভয় ডিপের পার্থক্য: $\Delta E_1(Be \rightarrow B) = 899 - 801 = 98\,kJ/mol$; $\Delta E_1(N \rightarrow O) = 1402 - 1314 = 88\,kJ/mol$।

৪৫. $I_1 \rightarrow I_2$ অনুপাত = 2.5 (স্বাভাবিক, লাফ নয়)।
$I_2 \rightarrow I_3$ অনুপাত = $12x/2.5x = 4.8$ (বিশাল লাফ)।
⇒ যোজনী ইলেকট্রন সংখ্যা = 2, গ্রুপ ২।
$x = I_1 = 590\,kJ/mol$
$I_2 = 2.5 \times 590 = 1475\,kJ/mol$
$I_3 = 12 \times 590 = 7080\,kJ/mol$

৪৬. Mg^+ বিন্যাস: $[Ne]3s^1$
Al^+ বিন্যাস: $[Ne]3s^2$
Al^+-এর $3s^2$ উপস্তর সম্পূর্ণ পূর্ণ ও স্থিতিশীল, এখান থেকে ২য় ইলেকট্রন অপসারণ কঠিন।
Mg^+-এর $3s^1$ একক ইলেকট্রন, এটি অপেক্ষাকৃত সহজে অপসারিত হয়।
তাই $E_2(Al) > E_2(Mg)$, যদিও $E_1(Mg) > E_1(Al)$।

৪৭. E_{a1} তুলনা: $|E_{a1}(S)| > |E_{a1}(O)|$ কারণ অক্সিজেনের ক্ষুদ্র $2p$ উপস্তরে উচ্চ ইলেকট্রন ঘনত্বের কারণে নতুন ইলেকট্রন তীব্র আন্তঃইলেকট্রনিক বিকর্ষণের সম্মুখীন হয়, যা সালফারের বড় $3p$ উপস্তরে কম প্রকট।
E_{a2} উভয়ে ধনাত্মক: উভয় ক্ষেত্রেই দ্বিতীয় ইলেকট্রন ইতিমধ্যে ঋণাত্মক আয়নে প্রবেশ করানো হচ্ছে, সমধর্মী চার্জের বিকর্ষণ কাটাতে শক্তি প্রয়োজন — সার্বজনীন নিয়ম।
$E_{a2}(O) > E_{a2}(S)$ হওয়ার কারণ: O^{2-}-এর ক্ষুদ্র আকারে চার্জ ঘনত্ব বেশি, বিকর্ষণ তীব্রতর।

৪৮. উভয় মৌলেই ($N : 2p^3, P : 3p^3$) অর্ধপূর্ণ উপস্তরের অতিরিক্ত স্থিতিশীলতার কারণে ইলেকট্রন গ্রহণে অনীহা থাকে।
তবে P-এর $3p$ উপস্তর N-এর $2p$ অপেক্ষা বড় ও নিউক্লিয়াস থেকে দূরে অবস্থিত হওয়ায় নতুন প্রবেশকারী ইলেকট্রনের সাথে আন্তঃইলেকট্রনিক বিকর্ষণ কম হয়।
তাই P তুলনামূলক সহজে ইলেকট্রন গ্রহণ করতে পারে, ফলে P-এর E_{a1} কিছুটা ঋণাত্মক (-72) কিন্তু N-এর প্রায় শূন্য/ধনাত্মক।

৪৯. Fe^{2+}: $[Ar]3d^6$ (একটি জোড়া, ৪টি একক ইলেকট্রন)
Fe^{3+}: $[Ar]3d^5$ (৫টি একক ইলেকট্রন, অর্ধপূর্ণ ও সম্পূর্ণ প্রতিসম)

এক্সচেঞ্জ জোড় সংখ্যা: Fe^{2+}-এ ১০; Fe^{3+}-এ $= \frac{5 \times 4}{2} = 10$।
তবে Fe^{3+}-এর $3d^5$ অর্ধপূর্ণ ও সম্পূর্ণ প্রতিসম বিন্যাস হওয়ায় এটি অতিরিক্ত স্থিতিশীলতা লাভ করে। এই কারণেই নির্দিষ্ট পরিস্থিতিতে Fe^{3+}, Fe^{2+}-এর তুলনায় অধিক স্থিতিশীল হতে পারে এবং বাতাসে Fe^{2+} ধীরে ধীরে Fe^{3+}-এ জারিত হওয়ার প্রবণতা দেখায়।

৫০. $Cl \rightarrow Br \rightarrow I$: প্রতিটি ধাপে একটি নতুন প্রধান শক্তিস্তর (n) যুক্ত হয়, যা পারমাণবিক ব্যাসার্ধ বৃদ্ধি করে।
স্লেটারের নিয়ম অনুযায়ী, নতুন যোজনী শেল নিউক্লিয়াস থেকে দূরে অবস্থিত হওয়ায় এবং অভ্যন্তরীণ শেলগুলোর শিল্ডিং বৃদ্ধি পাওয়ায় আগত ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসের আকর্ষণ তুলনামূলকভাবে কম অনুভব করে।
ফলে আগত ইলেকট্রনের প্রতি আকর্ষণ কমে যায় এবং ইলেকট্রন আসক্তি ক্রমান্বয়ে হ্রাস পায়: $|E_a(Cl)| > |E_a(Br)| > |E_a(I)|$।

৫১. Cu^+: $[Ar]3d^{10}$ (পূর্ণ, কাঠামোগতভাবে অত্যন্ত স্থিতিশীল)
Cu^{2+}: $[Ar]3d^9$ (অপ্রতিসম)
কাঠামোগত দৃষ্টিকোণ থেকে Cu^+ বেশি স্থিতিশীল মনে হলেও, জলীয় দ্রবণে Cu^{2+}-এর উচ্চতর চার্জ ঘনত্বের কারণে হাইড্রেশন শক্তি Cu^+ অপেক্ষা অনেক বেশি ঋণাত্মক।
এই অতিরিক্ত হাইড্রেশন শক্তি দ্বিতীয় আয়নীকরণ শক্তির চাহিদা পূরণ করে দেয়, ফলে $Cu^{2+}_{(aq)}$ অধিক স্থিতিশীল হয়ে ওঠে — এই কারণেই Cu^+ জলীয় দ্রবণে **disproportionation** দেখায়।

৫২. প্রোটন সংখ্যা: $S = 16, Cl = 17, K = 19, Ca = 20$।
Z/e অনুপাত:
$S^{2-} : 16/18 = 0.889$
$Cl^- : 17/18 = 0.944$
$K^+ : 19/18 = 1.056$
$Ca^{2+} : 20/18 = 1.111$
Z/e যত বেশি, কার্যকর নিউক্লিয়ার আকর্ষণ তত বেশি, ব্যাসার্ধ তত ছোট।
ব্যাসার্ধের ক্রম (অবরোহী): $S^{2-} > Cl^- > K^+ > Ca^{2+}$

৫৩. গ্রুপিং: $(1s^2)(2s^22p^6)(3s^23p^5)$
একই গ্রুপে অবশিষ্ট ইলেকট্রন সংখ্যা = 6, প্রতিটি 0.35: $6 \times 0.35 = 2.10$
$(n-1)$ শেল ($2s^22p^6$, ৮টি), প্রতিটি 0.85: $8 \times 0.85 = 6.80$
$(n-2)$ শেল ($1s^2$, ২টি), প্রতিটি 1.00: $2 \times 1.00 = 2.00$
মোট স্ক্রিনিং ধ্রুবক, $S = 2.10 + 6.80 + 2.00 = 10.90$
$Z_{eff} = Z - S = 17 - 10.90 = 6.10$

৫৪. Ca: গ্রুপিং $(1s^2)(2s^22p^6)(3s^23p^6)(4s^2)$
$(n-1)$ শেল = 8টি, $\times 0.85 = 6.80$; $(n-2)$ ও নিচে = 10টি, $\times 1.00 = 10.00$; একই গ্রুপে = 1টি, $\times 0.35 = 0.35$
$S(Ca) = 17.15$; $Z_{eff}(Ca) = 20 - 17.15 = 2.85$
Zn: গ্রুপিং $(1s^2)(2s^22p^6)(3s^23p^6)(3d^{10})(4s^2)$
$(n-1)$ শেল = 18টি, $\times 0.85 = 15.30$; $(n-2)$ ও নিচে = 10টি, $\times 1.00 = 10.00$; একই গ্রুপে = 1টি, $\times 0.35 = 0.35$
$S(Zn) = 25.65$; $Z_{eff}(Zn) = 30 - 25.65 = 4.35$
$Z_{eff}(Zn) > Z_{eff}(Ca)$— ১০টি অতিরিক্ত প্রোটনের প্রভাব স্ক্রিনিং বৃদ্ধিকে ছাড়িয়ে যায়, ফলে Zn-এর ব্যাসার্ধ ছোট।

৫৫. Z/e: $Na^+ = 11/10 = 1.10$; $Mg^{2+} = 12/10 = 1.20$; $Al^{3+} = 13/10 = 1.30$
Z/e ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পাওয়ায় ব্যাসার্ধ ক্রমান্বয়ে হ্রাস পায়।
শতকরা হ্রাসের হার $= \dfrac{102 - 53.5}{102} \times 100 = 47.5\%$
অর্থাৎ, Na^+ থেকে Al^{3+}-এ যেতে ব্যাসার্ধ প্রায় অর্ধেকে নেমে আসে, যা Z/e অনুপাতের ১৮% বৃদ্ধির তুলনায় অনেক বেশি প্রভাবশালী।

৫৬. Zr: $[Kr]4d^25s^2$; Hf: $[Xe]4f^{14}5d^26s^2$।
Hf-এর যোজনী ইলেকট্রনের ওপর অতিরিক্ত ১৪টি 4f ইলেকট্রনের স্ক্রিনিং প্রদান করার কথা, কিন্তু 4f অরবিটাল অত্যন্ত সংকুচিত হওয়ায় প্রতি ইলেকট্রনের প্রকৃত স্ক্রিনিং ধ্রুবক প্রত্যাশার চেয়ে কম হয়।
ফলে Hf-এর ৩২টি অতিরিক্ত প্রোটনের তুলনায় স্ক্রিনিং অপর্যাপ্ত থেকে যায়, Z_{eff} প্রত্যাশার চেয়ে বেশি বেড়ে যায়— এই ল্যান্থানাইড সংকোচন নতুন শক্তিস্তর যোগ হওয়ার কারণে সৃষ্ট স্বাভাবিক ব্যাসার্ধ বৃদ্ধিকে প্রায় সম্পূর্ণরূপে বাতিল করে দেয়।

৫৭. $Al_2O_3 + 6HCl \rightarrow 2AlCl_3 + 3H_2O$
$Al_2O_3 + 2NaOH \rightarrow 2NaAlO_2 + H_2O$
Al_2O_3 পানিতে অদ্রবণীয় (জালক শক্তি অত্যন্ত বেশি এবং বন্ধন যথেষ্ট সমযোজী), তাই এটি পানির সাথে বিয়োজিত হয়ে H^+ বা OH^- মুক্ত করতে পারে না— অম্ল বা ক্ষার উভয়ের সাথে বিক্রিয়া করার ক্ষমতা থাকলেও পানির সাথে নিজে থেকে কোনো বিক্রিয়া ঘটে না।

৫৮. হাইড্রেশন এনথালপি সবচেয়ে ঋণাত্মক Li^+-এ, যা নির্দেশ করে Li^+ সবচেয়ে বেশি জলের অণু শক্তভাবে ধরে রাখে (উচ্চ চার্জ ঘনত্বের কারণে)।
ফলে হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধের ক্রম: $Li^+_{(aq)} > Na^+_{(aq)} > K^+_{(aq)} > Rb^+_{(aq)} > Cs^+_{(aq)}$।
হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধ যত বড়, পরিবাহিতা তত কম (স্টোকস-আইনস্টাইন সম্পর্ক)।
তাই পরিবাহিতার ক্রম গ্যাসীয় আয়নিক ব্যাসার্ধের ঠিক বিপরীত হয়ে যায়।

৫৯. MnO (+2): ক্ষারীয়
Mn_2O_3 (+3): দুর্বল ক্ষারীয়/উভধর্মী-প্রায়
MnO_2 (+4): উভধর্মী
Mn_2O_7 (+7): তীব্র অম্লীয় (সর্বোচ্চ চার্জ ঘনত্ব, সমযোজী চরিত্র)
MnO_2-এর মধ্যবর্তী জারণ সংখ্যা (+4) একে সিরিজের মাঝামাঝি রাখে, যেখানে আয়নিক ও সমযোজী চরিত্রের ভারসাম্য থাকায় এটি উভধর্মী আচরণের কাছাকাছি।

৬০. Mg^{2+} ছোট ব্যাসার্ধ থাকায় এর চার্জ ঘনত্ব ($\phi = z/r$) Ba^{2+} অপেক্ষা অনেক বেশি:
$\phi(Mg^{2+}) = 2/72 = 0.0278$; $\phi(Ba^{2+}) = 2/135 = 0.0148$
উচ্চ চার্জ ঘনত্বের Mg^{2+} অধিক তীব্রভাবে জলের অণুকে আকর্ষণ করে ঘন হাইড্রেশন শেল গঠন করে, ফলে জলীয় দ্রবণে এর কার্যকর ব্যাসার্ধ Ba^{2+} অপেক্ষা অনেক বেশি বড় হয়ে যায়।
বড় হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধের কারণে $Mg^{2+}_{(aq)}$-এর গতিশীলতা কম, ফলে এর মোলার পরিবাহিতা $Ba^{2+}_{(aq)}$ অপেক্ষা কম হয়।