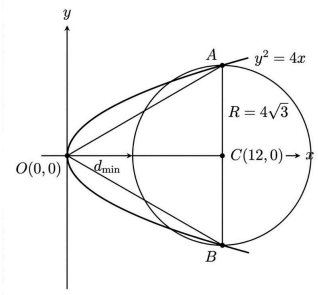
Mathematics ২০০ নম্বর

১. প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 8x \Rightarrow y^2 = 4(2)x$; এর উপকেন্দ্র $A(2, 0)$।
ধরি, $y = mx + c$ রেখাটি পরাবৃত্তটিকে $B(x_1, y_1)$ ও $C(x_2, y_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
$\triangle ABC$ এর ভরকেন্দ্র $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ হওয়ায়:
$\frac{x_1+x_2+2}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = 5$
$\frac{y_1+y_2+0}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow y_1 + y_2 = 4$
রেখার সমীকরণ থেকে $x = \frac{y-c}{m}$ পরাবৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই:
$y^2 = 8\left(\frac{y-c}{m}\right) \Rightarrow my^2 - 8y + 8c = 0$
এই দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয় y_1 ও y_2।
মূলদ্বয়ের যোগফল, $y_1 + y_2 = \frac{8}{m} \Rightarrow 4 = \frac{8}{m} \Rightarrow m = 2$
মূলদ্বয়ের গুণফল, $y_1y_2 = \frac{8c}{m} = \frac{8c}{2} = 4c$
আবার, $x_1 + x_2 = \frac{y_1-c}{m} + \frac{y_2-c}{m} = \frac{y_1+y_2-2c}{2} = \frac{4-2c}{2} = 2 - c$
$\therefore 2 - c = 5 \Rightarrow c = -3$
সুতরাং, $y_1y_2 = 4(-3) = -12$
এখন, $(BC)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
$(y_2 - y_1)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2 = 4^2 - 4(-12) = 16 + 48 = 64$
$x_2 - x_1 = \frac{y_2-c}{m} - \frac{y_1-c}{m} = \frac{y_2-y_1}{2} \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 = \frac{(y_2-y_1)^2}{4} = \frac{64}{4} = 16$
$\therefore (BC)^2 = 16 + 64 = 80$ **(Ans.)**

২. যেহেতু সমবাহু ত্রিভুজটির একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত, প্রতিসমতার কারণে OA এবং OB রেখাংশ x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে $30°$ ও $-30°$ কোণ উৎপন্ন করবে।
ধরি, ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য r। তাহলে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $(r\cos 30°, r\sin 30°) = \left(r\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$।



A বিন্দুটি $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের ওপর অবস্থিত হওয়ায়:
$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = 4\left(r\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{r^2}{4} = 2\sqrt{3}r \Rightarrow r = 8\sqrt{3}$ **(যেহেতু $r \neq 0$)**
$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{8\sqrt{3}}{2}\right) = (12, 4\sqrt{3})$
এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(12, -4\sqrt{3})$
AB-কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্র হবে AB এর মধ্যবিন্দু C $\left(\frac{12+12}{2}, \frac{4\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{2}\right) = (12, 0)$।
বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $R = \frac{AB}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$।
মূলবিন্দু $O(0, 0)$ হতে বৃত্তটির ন্যূনতম দূরত্ব $= OC - R = \sqrt{(12-0)^2} - 4\sqrt{3} = 12 - 4\sqrt{3}$
$\therefore$ নির্ণেয় ন্যূনতম দূরত্ব $(12 - 4\sqrt{3})$ একক। **(Ans.)**

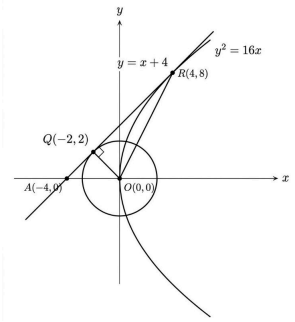
৩. প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 12x \Rightarrow a = 3$; শীর্ষবিন্দু $O(0, 0)$।
পরাবৃত্তের ওপরস্থ যেকোনো বিন্দু $P(3t^2, 6t)$ এবং x-অক্ষের ওপরস্থ বিন্দু $A(\alpha, 0)$।
প্রশ্নমতে, $\angle OPA = 90° \Rightarrow OP \perp PA \Rightarrow m_{OP} \times m_{PA} = -1$
$m_{OP} = \frac{6t-0}{3t^2-0} = \frac{2}{t}$ এবং $m_{PA} = \frac{0-6t}{\alpha-3t^2}$
$\therefore \frac{2}{t} \times \frac{-6t}{\alpha-3t^2} = -1 \Rightarrow \frac{-12}{\alpha-3t^2} = -1 \Rightarrow \alpha - 3t^2 = 12 \Rightarrow \alpha = 3t^2 + 12$
ধরি, $\triangle OPA$ এর ভরকেন্দ্র $G(x, y)$।
$x = \frac{0+3t^2+(3t^2+12)}{3} = \frac{6t^2+12}{3} = 2t^2 + 4 \Rightarrow t^2 = \frac{x-4}{2}$
$y = \frac{0+6t+0}{3} = 2t \Rightarrow t = \frac{y}{2}$
t^2 এর মান বসিয়ে পাই: $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x-4}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{4} = \frac{x-4}{2} \Rightarrow y^2 = 2(x-4)$
$\therefore$ ভরকেন্দ্রের নির্ণেয় সঞ্চারপথ: $y^2 = 2x - 8$ **(Ans.)**

৪. প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 16x \Rightarrow y^2 = 4(4)x$; এখানে $a = 4$।
উপকেন্দ্রিক জ্যা-এর এক প্রান্ত $A(16, 16)$। পরামিতিক স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $2(4)t_1 = 16 \Rightarrow t_1 = 2$।
আমরা জানি, উপকেন্দ্রিক জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের পরামিতিগুলোর গুণফল $t_1t_2 = -1$।
$\therefore 2t_2 = -1 \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{2}$
অপর প্রান্তবিন্দু $B\left(4\left(-\frac{1}{2}\right)^2, 2(4)\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = (1, -4)$
$P(\alpha, \beta)$ বিন্দুটি $A(16, 16)$ এবং $B(1, -4)$ এর সংযোজক জ্যা-কে $5 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। যেহেতু অনুপাতের দিক নির্দিষ্ট করা নেই, দুটি ক্ষেত্র বিবেচনা করতে হবে:
ক্ষেত্র ১: A হতে B এর দিকে $5 : 2$ অনুপাতে বিভক্ত করলে,
$\alpha = \frac{5(1)+2(16)}{5+2} = \frac{5+32}{7} = \frac{37}{7}$ এবং $\beta = \frac{5(-4)+2(16)}{5+2} = \frac{-20+32}{7} = \frac{12}{7}$
$\alpha + \beta = \frac{37+12}{7} = \frac{49}{7} = 7$
ক্ষেত্র ২: B হতে A এর দিকে $5 : 2$ অনুপাতে বিভক্ত করলে,
$\alpha = \frac{5(16)+2(1)}{5+2} = \frac{80+2}{7} = \frac{82}{7}$ এবং $\beta = \frac{5(16)+2(-4)}{5+2} = \frac{80-8}{7} = \frac{72}{7}$
$\alpha + \beta = \frac{82+72}{7} = \frac{154}{7} = 22$
উভয় ক্ষেত্রের মধ্যে 7 এবং 22 পাওয়া গেল।
$\therefore \alpha + \beta$ এর ন্যূনতম মান 7 **(Ans.)**

৫. প্রদত্ত বৃত্ত: $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 64 = 0$
বৃত্তটির কেন্দ্র $C(2, 8)$
একটি বিন্দু ও একটি পরাবৃত্তের মধ্যবর্তী ন্যূনতম দূরত্ব পরাবৃত্তটির অভিলম্ব **(Normal)** বরাবর ক্রিয়াশীল হয়। অর্থাৎ, ন্যূনতম দূরত্বের রেখাটি পরাবৃত্তের অভিলম্ব হবে, যা কেন্দ্র $C(2, 8)$ দিয়ে অতিক্রম করবে।
$y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের (এখানে $a = 1$) যেকোনো বিন্দু $(t^2, 2t)$ তে অভিলম্বের সমীকরণ:
$y = -tx + 2t + t^3$
এই অভিলম্বটি $(2, 8)$ বিন্দুগামী হওয়ায়:
$8 = -t(2) + 2t + t^3 \Rightarrow 8 = t^3 \Rightarrow t = 2$
দূরত্বের বর্গ $D(t) = (t^2 - 2)^2 + (2t - 8)^2 = t^4 - 4t^2 + 4 + 4t^2 - 32t + 64 = t^4 - 32t + 68$
$D'(t) = 4t^3 - 32$ এবং $D''(t) = 12t^2 \geq 0$; তাই $t = 2$-তেই ন্যূনতম দূরত্ব পাওয়া যাবে। অতএব, পরাবৃত্তের ওপরস্থ যে বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্রের সবচেয়ে কাছাকাছি, তার স্থানাঙ্ক $P(t^2, 2t) \equiv P(4, 4)$।
কেন্দ্র $C(2, 8)$ হতে পরাবৃত্তের ন্যূনতম দূরত্ব d হলো CP এর দৈর্ঘ্য।
$d^2 = CP^2 = (4 - 2)^2 + (4 - 8)^2 = 2^2 + (-4)^2 = 4 + 16 = 20$
$\therefore d^2 = 20$ **(Ans.)**

৬. পরাবৃত্ত $x^2 = 4y \Rightarrow a = 1$, এর শীর্ষবিন্দু $O(0, 0)$।
পরাবৃত্তের ওপর যেকোনো বিন্দু $Q(2t, t^2)$।
$P(x, y)$ বিন্দুটি OQ রেখাংশকে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।
$\therefore x = \frac{2(2t)+3(0)}{2+3} \Rightarrow x = \frac{4t}{5} \Rightarrow t = \frac{5x}{4}$
এবং $y = \frac{2(t^2)+3(0)}{2+3} = \frac{2t^2}{5}$
t-এর মান বসিয়ে P বিন্দুর সঞ্চারপথ পাই:
$y = \frac{2}{5}\left(\frac{5x}{4}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{25x^2}{16} = \frac{5x^2}{8} \Rightarrow x^2 = \frac{8y}{5}$ (এটিই কনিক C)
কনিক C-এর একটি জ্যা $(1, 2)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।
জ্যা-এর সমীকরণ $T = S_1$
$T \equiv xx_1 - \frac{4}{5}(y + y_1) = x(1) - \frac{4}{5}(y + 2) = x - \frac{4}{5}y - \frac{8}{5}$
$S_1 \equiv x_1^2 - \frac{8}{5}y_1 = (1)^2 - \frac{8}{5}(2) = 1 - \frac{16}{5} = -\frac{11}{5}$
সমীকরণটি হলো: $x - \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} = -\frac{11}{5}$
5 দ্বারা গুণ করে পাই: $5x - 4y - 8 = -11 \Rightarrow 5x - 4y + 3 = 0$
$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ $5x - 4y + 3 = 0$ **(Ans.)**

৭. প্রদত্ত পরাবৃত্ত $y^2 = 16x \Rightarrow a = 4$।
এর যেকোনো স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx + \frac{4}{m}$
বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 8$, যার কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $2\sqrt{2}$।
এই রেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হলে, মূলবিন্দু হতে এর লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।
$\frac{|0-0+\frac{4}{m}|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\frac{16}{m^2}}{m^2+1} = 8 \Rightarrow 16 = 8m^2(m^2 + 1) \Rightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0 \Rightarrow (m^2 + 2)(m^2 - 1) = 0$
$m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$ ($m^2 = -2$ অবাস্তব)
$m = 1$ হলে সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ $y = x + 4 \Rightarrow x - y + 4 = 0$



$y^2 = 16x$ এর সাথে ছেদবিন্দু R: $(x + 4)^2 = 16x \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4, y = 8 \Rightarrow R(4, 8)$
$x^2 + y^2 = 8$ এর সাথে ছেদবিন্দু Q: $x^2 + (x + 4)^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 + 8x + 16 = 8 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2, y = 2 \Rightarrow Q(-2, 2)$
$\therefore (QR)^2 = (4 - (-2))^2 + (8 - 2)^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$ **(Ans.)**

৮. প্রদত্ত রেখা: $y - x = 1 \Rightarrow y = x + 1$

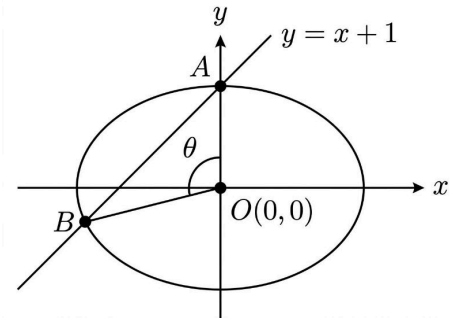
প্রদত্ত উপবৃত্ত: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

ছেদবিন্দু নির্ণয়ের জন্য উপবৃত্তের সমীকরণে y এর মান বসাই:

$\frac{x^2}{2} + (x+1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2(x^2 + 2x + 1) = 2 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 2 = 2 \Rightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x + 4) = 0$

$x = 0$ হলে $y = 1 \Rightarrow A(0, 1)$

$x = -\frac{4}{3}$ হলে $y = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$



উপবৃত্তটির কেন্দ্র মূলবিন্দু $O(0, 0)$; $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরদ্বয় বিবেচনা করি:

$\overrightarrow{OA} = (0-0)\hat{i} + (1-0)\hat{j} = \hat{j} \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = 1$

$\overrightarrow{OB} = -\frac{4}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} \Rightarrow |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}$

ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \frac{0\left(-\frac{4}{3}\right) + 1\left(-\frac{1}{3}\right)}{1 \times \frac{\sqrt{17}}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{17}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ **(Ans.)**

৯. প্রদত্ত উপবৃত্ত: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 5, b = 3$

আমরা জানি, উপবৃত্তের ওপরস্থ যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ এর জন্য উপকেন্দ্রিক দূরত্বদ্বয়ের যোগফল সর্বদা বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।

$\therefore SP + S'P = 2a = 10$

প্রদত্ত সমীকরণ: $(SP)^2 + (S'P)^2 - SP \cdot S'P = 37$

$\Rightarrow (SP + S'P)^2 - 2SP \cdot S'P - SP \cdot S'P = 37$

$\Rightarrow 10^2 - 3SP \cdot S'P = 37 \Rightarrow 100 - 37 = 3SP \cdot S'P \Rightarrow 3SP \cdot S'P = 63 \Rightarrow SP \cdot S'P = 21$

আবার, $P(\alpha, \beta)$ বিন্দুর জন্য, $SP = a - e\alpha$ এবং $S'P = a + e\alpha$

$\therefore SP \cdot S'P = (a - e\alpha)(a + e\alpha) = a^2 - e^2\alpha^2$

এখানে $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

মানগুলো বসালে পাই: $25 - \frac{16}{25}\alpha^2 = 21 \Rightarrow \frac{16}{25}\alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$

$P(\alpha, \beta)$ বিন্দুটি উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত হওয়ায়: $\frac{\alpha^2}{25} + \frac{\beta^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{\frac{25}{4}}{25} + \frac{\beta^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{\beta^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{\beta^2}{9} = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta^2 = \frac{27}{4}$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{25}{4} + \frac{27}{4} = \frac{52}{4} = 13$ **(Ans.)**

১০. প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ: $3x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1/3} + \frac{y^2}{1/4} = 1$

এখানে $a^2 = \frac{1}{3}$ এবং $b^2 = \frac{1}{4}$

স্পর্শকের সমীকরণ: $\alpha x + 4y = \sqrt{7} \Rightarrow y = -\frac{\alpha}{4}x + \frac{\sqrt{7}}{4}$

এখানে ঢাল $m = -\frac{\alpha}{4}$ এবং y-ছেদক $c = \frac{\sqrt{7}}{4}$

সরলরেখাটি উপবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত: $c^2 = a^2m^2 + b^2$

মান বসিয়ে পাই: $\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{7}{16} = \frac{\alpha^2}{48} + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{7}{16} - \frac{4}{16} = \frac{\alpha^2}{48}$

$\Rightarrow \frac{3}{16} = \frac{\alpha^2}{48}$

$\Rightarrow \alpha^2 = 48 \times \frac{3}{16} = 9$

যেহেতু প্রশ্নে দেওয়া আছে $\alpha > 0$, তাই $\alpha = 3$

$\therefore \alpha$ এর মান 3। **(Ans.)**

১১. প্রথমে $T = S_1$ সূত্র ব্যবহার করে জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করি।

$T \equiv \frac{x(1)}{4} + \frac{y\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = \frac{x+y}{4}$

$S_1 \equiv \frac{1^2}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$\therefore \frac{x+y}{4} = \frac{3}{8} \Rightarrow x + y = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} - x$

এখন, জ্যা-টি উপবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় করার জন্য y-এর মান উপবৃত্তের সমীকরণ $x^2 + 2y^2 = 4$ এ বসাই:

$x^2 + 2\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) = 4$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x + \frac{9}{2} - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 12x + 1 = 0$

এই সমীকরণের মূলদ্বয় x_1, x_2 হলো ছেদবিন্দুগুলোর ভুজ।

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{12}{6}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{6}\right) = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

$\therefore |x_1 - x_2| = \sqrt{\frac{10}{3}}$

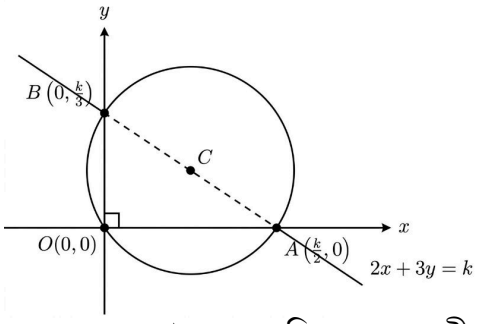
যেহেতু রেখাটির সমীকরণ $y = -x + \frac{3}{2}$, এর ঢাল $m = -1$

জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{1 + m^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1 + (-1)^2}\sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{30}}{3} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

$\therefore$ জ্যা-টির দৈর্ঘ্য $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ একক। **(Ans.)**

১২. প্রদত্ত সরলরেখা: $2x + 3y = k \Rightarrow \frac{x}{\frac{k}{2}} + \frac{y}{\frac{k}{3}} = 1$

অতএব, রেখাটি অক্ষদ্বয়কে $A\left(\frac{k}{2}, 0\right)$ এবং $B\left(0, \frac{k}{3}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।



A ও B কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ:

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$\Rightarrow \left(x - \frac{k}{2}\right)(x - 0) + (y - 0)\left(y - \frac{k}{3}\right) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{k}{2}x - \frac{k}{3}y = 0$

প্রশ্নমতে, এই বৃত্তের সমীকরণ হলো $x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$

সহগ তুলনা করে পাই: $\frac{k}{2} = 3 \Rightarrow k = 6$

এখন $k = 6$ মানটি উপবৃত্তের সমীকরণে বসাই:

$x^2 + 9y^2 = 6^2 \Rightarrow x^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$

এখানে $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ এবং $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$ $(a > b)$

উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{4}{3}$ একক। **(Ans.)**

১৩. উভয় উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{4}{5}$

E_1 এর উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $2ae = 8 \Rightarrow a\left(\frac{4}{5}\right) = 4 \Rightarrow a = 5$

E_1 এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $l_1 = \frac{2b^2}{a} = \frac{2a^2(1-e^2)}{a} = 2a(1 - e^2)$

$\Rightarrow l_1 = 2(5)\left(1 - \frac{16}{25}\right) = 10 \times \frac{9}{25} = \frac{18}{5}$

E_2 এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $l_2 = \frac{2A^2}{B} = \frac{2B^2(1-e^2)}{B} = 2B(1 - e^2)$ **(যেহেতু $A < B$)**

$\Rightarrow l_2 = 2B\left(1 - \frac{16}{25}\right) = \frac{18B}{25}$

প্রশ্নমতে, $2l_1^2 = 9l_2$

$\Rightarrow 2\left(\frac{18}{5}\right)^2 = 9\left(\frac{18B}{25}\right)$

$\Rightarrow 2 \times \frac{324}{25} = \frac{162B}{25}$

$\Rightarrow 648 = 162B \Rightarrow B = 4$

E_2 এর উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $2Be = 2(4)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{32}{5}$

$\therefore$ E_2 এর উপকেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $\frac{32}{5}$ বা 6.4 একক। **(Ans.)**

১৪. প্রথমে $T = S_1$ সূত্র ব্যবহার করে জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করি।

$T \equiv \frac{x\sqrt{2}}{9} + \frac{(\frac{4}{3})y}{4} = \frac{\sqrt{2}x}{9} + \frac{y}{3}$

$S_1 \equiv \frac{(\sqrt{2})^2}{9} + \frac{(\frac{4}{3})^2}{4} = \frac{2}{9} + \frac{\frac{16}{9}}{4} = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{2}x}{9} + \frac{y}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2}x + 3y = 6 \Rightarrow y = 2 - \frac{\sqrt{2}}{3}x$

এখন, জ্যা-টি উপবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় করার জন্য y-এর মান উপবৃত্তের সমীকরণ $4x^2 + 9y^2 = 36$ এ বসাই:

$4x^2 + 9\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{3}x\right)^2 = 36 \Rightarrow 4x^2 + 9\left(4 - \frac{4\sqrt{2}}{3}x + \frac{2}{9}x^2\right) = 36$

$\Rightarrow 4x^2 + 36 - 12\sqrt{2}x + 2x^2 = 36 \Rightarrow 6x^2 - 12\sqrt{2}x = 0$

$\Rightarrow 6x(x - 2\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ এবং $x_2 = 2\sqrt{2}$

$x_1 = 0$ হলে $y_1 = 2 \Rightarrow$ বিন্দু $(0, 2)$

$x_2 = 2\sqrt{2}$ হলে $y_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ বিন্দু $\left(2\sqrt{2}, \frac{2}{3}\right)$

জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $L = \sqrt{(2\sqrt{2} - 0)^2 + \left(\frac{2}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{8 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{8 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{88}{9}} = \frac{2\sqrt{22}}{3}$ একক

শর্তমতে, $L = \frac{2\sqrt{\alpha}}{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{22}}{3} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{3} \Rightarrow \alpha = 22$

$\therefore \alpha$ এর মান 22। **(Ans.)**

১৫. প্রদত্ত অধিবৃত্ত $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; এখানে $a = 4$ এবং $b = 3$

ধরি, প্রথম চতুর্ভাগে $P(4\sec\theta, 3\tan\theta)$, যেখানে $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:

$\frac{x\sec\theta}{4} - \frac{y\tan\theta}{3} = 1$

অধিবৃত্তের অসীমতটদ্বয় $y = \pm\frac{3}{4}x$

A বিন্দুটি $y = \frac{3}{4}x$ অসীমতটের ওপর অবস্থিত। স্পর্শকের সমীকরণে বসিয়ে পাই:

$\frac{x}{4}(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

$\Rightarrow x_A = \frac{4}{\sec\theta - \tan\theta} = 4(\sec\theta + \tan\theta)$

$\therefore A(4(\sec\theta + \tan\theta), 3(\sec\theta + \tan\theta))$

একইভাবে, $B(4(\sec\theta - \tan\theta), -3(\sec\theta - \tan\theta))$

$OA^2 = 25(\sec\theta + \tan\theta)^2$ এবং $OB^2 = 25(\sec\theta - \tan\theta)^2$

$\therefore OA^2 + OB^2 = 50(\sec^2\theta + \tan^2\theta)$

$= 50(1 + 2\tan^2\theta)$

প্রশ্নমতে, $50(1 + 2\tan^2\theta) = 150$

$\Rightarrow \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1, \sec\theta = \sqrt{2}$

$\therefore P(4\sqrt{2}, 3)$

এখন, $\triangle OAB$ এর ক্ষেত্রফল:

$\Delta = \frac{1}{2}|x_A y_B - x_B y_A|$

$= \frac{1}{2}|-24(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)|$

$= 12(\sec^2\theta - \tan^2\theta) = 12$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4\sqrt{2}, 3)$ এবং $\triangle OAB$ এর ক্ষেত্রফল 12 বর্গ একক। **(Ans.)**

১৬. $P(h, k)$ বিন্দুগামী m ঢালবিশিষ্ট যেকোনো রেখার সমীকরণ:

$y - k = m(x - h) \Rightarrow y = mx + (k - mh)$

আমরা জানি, $y = mx + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত $c^2 = a^2m^2 - b^2$

এখানে $a^2 = 9, b^2 = 4$ এবং $c = k - mh$

$\therefore (k - mh)^2 = 9m^2 - 4$

$\Rightarrow (h^2 - 9)m^2 - 2hkm + (k^2 + 4) = 0$

মূলদ্বয় m_1, m_2 হলে, $m_1m_2 = \frac{k^2+4}{h^2-9}$

স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $m_1m_2 = -1$

$\Rightarrow \frac{k^2+4}{h^2-9} = -1$

$\Rightarrow h^2 + k^2 = 5$

অতএব, পরস্পর লম্ব স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ $x^2 + y^2 = 5$; এটিই অধিবৃত্তটির নির্দেশক বৃত্ত **(Director circle)**।

আবার, $h - k = 1 \Rightarrow k = h - 1$ বসিয়ে পাই:

$h^2 + (h - 1)^2 = 5 \Rightarrow h^2 - h - 2 = 0$

$\Rightarrow (h - 2)(h + 1) = 0$

প্রথম চতুর্ভাগে P থাকায় $h = 2, k = 1$

$\therefore P(2, 1)$

কোনো বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) হতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শজ্যা-এর সমীকরণ $T = 0$

$\frac{xx_1}{9} - \frac{yy_1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{9} - \frac{y}{4} = 1$

$\Rightarrow 8x - 9y - 36 = 0$

$\therefore P(2, 1)$, স্পর্শজ্যা $8x - 9y - 36 = 0$ এবং সঞ্চারপথ $x^2 + y^2 = 5$। **(Ans.)**

১৭. প্রদত্ত অধিবৃত্তে $a = 4, b = 3$ এবং $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

অতএব, ডানদিকের উপকেন্দ্র $S(5, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{5}{4}$

অধিবৃত্তের ওপর t পরামিতিবিশিষ্ট বিন্দু:

$P(t) \equiv \left(\frac{a(1+t^2)}{1-t^2}, \frac{2bt}{1-t^2}\right)$

t_1, t_2 পরামিতিবিশিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা-এর সমীকরণ:

$\frac{(1+t_1t_2)x}{a} - \frac{(t_1+t_2)y}{b} = 1 - t_1t_2$

জ্যা-টি $S(ae, 0)$ বিন্দুগামী হওয়ায় এই সমীকরণে $x = ae, y = 0$ বসিয়ে পাই:

$e(1 + t_1t_2) = 1 - t_1t_2$

$\Rightarrow t_1t_2(1 + e) = 1 - e$

$\Rightarrow t_1t_2 = \frac{1-e}{1+e} = -\frac{e-1}{e+1}$ **(Proved)**

মান বসিয়ে পাই: $t_1t_2 = -\frac{\frac{5}{4}-1}{\frac{5}{4}+1} = -\frac{1}{9}$

প্রশ্নমতে, $t_1 = \frac{1}{2}$; তাই $\frac{1}{2}t_2 = -\frac{1}{9} \Rightarrow t_2 = -\frac{2}{9}$

অপর প্রান্ত Q এর স্থানাঙ্ক:

$x_Q = \frac{4\left(1+\frac{4}{81}\right)}{1-\frac{4}{81}} = \frac{340}{77}$

$y_Q = \frac{6\left(-\frac{2}{9}\right)}{1-\frac{4}{81}} = -\frac{108}{77}$

$\therefore Q\left(\frac{340}{77}, -\frac{108}{77}\right)$

প্রথম প্রান্ত $P\left(\frac{20}{3}, 4\right)$

$PQ = \sqrt{\left(\frac{20}{3} - \frac{340}{77}\right)^2 + \left(4 + \frac{108}{77}\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{520}{231}\right)^2 + \left(\frac{1248}{231}\right)^2}$

$= \frac{1352}{231}$ একক।

$\therefore Q\left(\frac{340}{77}, -\frac{108}{77}\right)$ এবং জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $\frac{1352}{231}$ একক। **(Ans.)**

১৮. প্রদত্ত সমকোণী অধিবৃত্তের সমীকরণ $S \equiv xy - 16 = 0$

জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(x_1, y_1) \equiv (5, 5)$

আমরা জানি, জ্যা-এর মধ্যবিন্দু দেওয়া থাকলে ঐ জ্যা-এর সমীকরণ হয় $T = S_1$

এখানে, $T \equiv \frac{xy_1+x_1y}{2} - 16 = \frac{5x+5y}{2} - 16$

এবং $S_1 \equiv x_1y_1 - 16 = 25 - 16 = 9$

$\therefore \frac{5x+5y}{2} - 16 = 9$

$\Rightarrow x + y = 10$

এই সমীকরণ হতে $y = 10 - x$ মানটি $xy = 16$ এ বসিয়ে পাই:

$x(10 - x) = 16 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x - 8) = 0$

অতএব, জ্যা-এর প্রান্তদ্বয় $A(2, 8)$ এবং $B(8, 2)$।

$AB = \sqrt{(8-2)^2 + (2-8)^2} = 6\sqrt{2}$ একক।

$xy = 16$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y_1x + x_1y = 32$।

A বিন্দুতে: $8x + 2y = 32 \Rightarrow 4x + y = 16$

B বিন্দুতে: $2x + 8y = 32 \Rightarrow x + 4y = 16$

উভয় সমীকরণ সমাধান করে পাই, $T\left(\frac{16}{5}, \frac{16}{5}\right)$।

ত্রিভুজটির ভূমি $AB = 6\sqrt{2}$ এবং T হতে $x + y - 10 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব:

$d = \frac{\left|\frac{16}{5}+\frac{16}{5}-10\right|}{\sqrt{2}} = \frac{18}{5\sqrt{2}}$

$\therefore \triangle TAB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{18}{5\sqrt{2}} = \frac{54}{5}$ বর্গ একক।

$\therefore$ জ্যা $x + y - 10 = 0$, দৈর্ঘ্য $6\sqrt{2}$, $T\left(\frac{16}{5}, \frac{16}{5}\right)$ এবং ক্ষেত্রফল $\frac{54}{5}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

১৯. প্রদত্ত সমীকরণ:

$9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$

$\Rightarrow 9(x^2 - 6x) - 16(y^2 + 4y) = 127$

$\Rightarrow 9(x^2 - 6x + 9) - 16(y^2 + 4y + 4) = 127 + 81 - 64$

$\Rightarrow 9(x - 3)^2 - 16(y + 2)^2 = 144$

$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

এখানে কেন্দ্র $C(3, -2)$, $a = 4, b = 3$ এবং $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$।

উৎকেন্দ্রিকতা $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$।

অসীমতটদ্বয়ের সমীকরণ:

$y + 2 = \pm\frac{b}{a}(x - 3)$

$\Rightarrow y + 2 = \pm\frac{3}{4}(x - 3)$

উপকেন্দ্রদ্বয়: $(3 \pm c, -2)$

$\therefore (8, -2)$ এবং $(-2, -2)$।

নিয়ামক রেখাদ্বয়: $x - 3 = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{16}{5}$

$\therefore x = 3 \pm \frac{16}{5}$।

অনুবন্ধী অধিবৃত্তের সমীকরণ: $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$।

এর অনুবন্ধী অক্ষের অর্ধেক দৈর্ঘ্য 3 এবং উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $c = 5$।

$\therefore$ অনুবন্ধী অধিবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা $e' = \frac{5}{3}$।

$\therefore$ কেন্দ্র $C(3, -2)$, $e = \frac{5}{4}$, অসীমতট $y + 2 = \pm\frac{3}{4}(x - 3)$, উপকেন্দ্র $(8, -2), (-2, -2)$, নিয়ামক $x = 3 \pm \frac{16}{5}$, অনুবন্ধী অধিবৃত্ত $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$ এবং $e' = \frac{5}{3}$। **(Ans.)**

২০. $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের m ঢালবিশিষ্ট যেকোনো স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx + \frac{1}{m}$

আবার, $y = mx + c$ রেখাটি $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত $c^2 = a^2m^2 - b^2$।

এখানে $a^2 = 5, b^2 = 4$ এবং $c = \frac{1}{m}$।

$\therefore \frac{1}{m^2} = 5m^2 - 4$

$\Rightarrow 5m^4 - 4m^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (5m^2 + 1)(m^2 - 1) = 0$

বাস্তব m এর জন্য $m = \pm 1$।

$m = 1$ হলে $y = x + 1$ এবং $m = -1$ হলে $y = -x - 1$।

$\therefore$ সাধারণ স্পর্শকদ্বয় $y = x + 1$ এবং $y = -x - 1$।

সাধারণ স্পর্শক $y = x + 1$ এর ক্ষেত্রে পরাবৃত্তের স্পর্শবিন্দু:

$(x + 1)^2 = 4x \Rightarrow (x - 1)^2 = 0$

$\therefore Q(1, 2)$

অধিবৃত্তের স্পর্শবিন্দু:

$\frac{x^2}{5} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$

$\Rightarrow (x + 5)^2 = 0$

$\therefore R(-5, -4)$

$QR = \sqrt{(1 + 5)^2 + (2 + 4)^2} = 6\sqrt{2}$ একক।

প্রতিসাম্যতার কারণে অপর সাধারণ স্পর্শকের দূরত্ব একই হবে।

$\therefore$ সাধারণ স্পর্শক $y = x + 1, y = -x - 1$ এবং প্রতিটি ক্ষেত্রে স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $6\sqrt{2}$ একক। **(Ans.)**

Physics ২০০ নম্বর

২১. এখানে, $\beta = 4.96 \times 10^{-12}\ cm^2dyne^{-1}$, গভীরতায় ঘনত্ব $\rho = 1032.5\ kgm^{-3}$, গভীরতা $h = 8\ km = 8000\ m$

প্রথমে β-কে **SI** এককে রূপান্তর করি: $1\ dyne = 10^{-5}\ N$ এবং $1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$

সুতরাং $1\ cm^2dyne^{-1} = \frac{10^{-4}}{10^{-5}}\ m^2N^{-1} = 10\ m^2N^{-1}$

$\beta = 4.96 \times 10^{-12} \times 10 = 4.96 \times 10^{-11}\ m^2N^{-1}$ **(**$= 4.96 \times 10^{-11}\ Pa^{-1}$**)**

ধরি, সাধারণ **(**পৃষ্ঠের**)** অবস্থায় পানির ঘনত্ব ρ_0

গভীরতার কারণে চাপ বৃদ্ধি **(**হিসাবের জন্য পানির ঘনত্ব প্রায় $1000\ kgm^{-3}$ ধরে**)**, $\Delta P = \rho_0 gh = 1000 \times 9.8 \times 8000 = 7.84 \times 10^7\ Pa$

সংনম্যতার সংজ্ঞা অনুযায়ী, ছোট পরিবর্তনের জন্য $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \approx \beta\Delta P$ **(**আয়তন হ্রাস পেলে ঘনত্ব একই অনুপাতে বৃদ্ধি পায়**)**

$\beta\Delta P = 4.96 \times 10^{-11} \times 7.84 \times 10^7 \approx 3.889 \times 10^{-3}$

সুতরাং গভীরতার ঘনত্ব, $\rho = \rho_0(1 + \beta\Delta P)$

$\rho_0 = \frac{\rho}{1+\beta\Delta P} = \frac{1032.5}{1.003889} \approx 1028.5\ kgm^{-3}$

অতএব, সাধারণ **(**পৃষ্ঠের**)** অবস্থায় পানির ঘনত্ব প্রায় $1028.5\ kgm^{-3}$। এত বিশাল গভীরতাতেও পানি মাত্র প্রায় 0.4% সংকুচিত হয়।

২২. এখানে, ববের ঘনত্ব $\rho_b = 9000\ kgm^{-3}$, নিমজ্জিত ভগ্নাংশ $f = 1$, নতুন দোলনকাল $T' = 1.05T$

ধরি, তরলের ঘনত্ব ρ_l

যেহেতু $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, তাই $\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = 1.05$

বা, $\frac{g}{g'} = 1.1025$

বা, $g' = \frac{g}{1.1025} = 0.9070g$

প্লবতা বলের কারণে কার্যকর অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = g\left(1 - f\frac{\rho_l}{\rho_b}\right)$

সম্পূর্ণ নিমজ্জনের জন্য **(**$f = 1$**)**, $0.9070 = 1 - \frac{\rho_l}{9000}$

বা, $\frac{\rho_l}{9000} = 1 - 0.9070 = 0.0930$

$\rho_l = 0.0930 \times 9000 \approx 837\ kgm^{-3}$

অতএব, তরলটির ঘনত্ব প্রায় $837\ kgm^{-3}$।

২৩. এখানে, পাহাড়ের উচ্চতা $h = 3.2\,\text{km}$, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6400\,\text{km}$, একদিন $= 86400\,\text{s}$
পাহাড়ের চূড়ায় $g' = \frac{gR^2}{(R+h)^2} \approx g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ **[**$h \ll R$**]**
যেহেতু $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, তাই $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta g}{g}\right) = \frac{h}{R}$
$\frac{h}{R} = \frac{3.2}{6400} = 5 \times 10^{-4}$
দোলনকাল বাড়ায় ঘড়ি ধীরে চলবে এবং একদিনে সময় ক্ষতি $= \frac{h}{R} \times 86400\,\text{s}$
$= 5 \times 10^{-4} \times 86400 = 43.2\,\text{s}$
অতএব, ঘড়িটি একদিনে $43.2\,\text{s}$ কম সময় দেখাবে।

২৪. এখানে, $r = 5 \times 10^{-4}\,\text{m}$, গ্লিসারিনের ঘনত্ব $\sigma = 1260\,\text{kgm}^{-3}$, $\eta = 1.5\,\text{Pas}$, $g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$, দূরত্ব $s = 20\,\text{cm} = 0.2\,\text{m}$
বাতাসের ঘনত্ব উপেক্ষণীয় হওয়ায় স্টোকসের সূত্র অনুযায়ী ঊর্ধ্বমুখী প্রান্তিক বেগ, $v = \frac{2}{9}\frac{r^2\sigma g}{\eta}$
$v = \frac{2}{9} \times \frac{(5\times10^{-4})^2\times1260\times9.8}{1.5} = \frac{2}{9} \times \frac{2.5\times10^{-7}\times1260\times9.8}{1.5} \approx 4.573 \times 10^{-4}\,\text{ms}^{-1}$
$20\,\text{cm}$ অতিক্রম করতে সময়, $t = \frac{s}{v} = \frac{0.2}{4.573\times10^{-4}} \approx 437.3\,\text{s} \approx 7.29$ মিনিট
অতএব, প্রান্তিক বেগ প্রায় $4.573 \times 10^{-4}\,\text{ms}^{-1}$ এবং সময় প্রায় $437.3\,\text{s}$ **(**প্রায় 7.29 মিনিট**)**।

২৫. এখানে, $m = 0.25\,\text{kg}$, $A = 0.1\,\text{m}$, $x = 0.06\,\text{m}$ দূরত্বে $KE = 0.0288\,\text{J}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$
(ক) গতিশক্তি, $KE = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$
$0.0288 = \frac{1}{2} \times 0.25 \times \omega^2 \times (0.1^2 - 0.06^2) = 0.125\omega^2(0.01 - 0.0036) = 0.125\omega^2 \times 0.0064 = 0.0008\omega^2$
$\omega^2 = \frac{0.0288}{0.0008} = 36$
$\omega = 6\,\text{rads}^{-1}$
(খ) সরণের সমীকরণ, $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$
$x(t) = 0.1\sin\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)\,\text{m}$
(গ) ধরি, $\theta = \omega t + \phi$; তাহলে $x = A\sin\theta$ এবং $v = A\omega\cos\theta$
প্রশ্নমতে, $|v| = \frac{v_{max}}{2} = \frac{A\omega}{2}$
বা, $|\cos\theta| = \frac{1}{2}$
সুতরাং $|\sin\theta| = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$|x| = A|\sin\theta| = 0.1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.0866\,\text{m}$
অতএব, **(ক)** $\omega = 6\,\text{rads}^{-1}$; **(খ)** $x(t) = 0.1\sin\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)\,\text{m}$; **(গ)** সাম্যাবস্থানের উভয় পাশে $x = \pm0.0866\,\text{m}$ সরণে কণার দ্রুতি সর্বোচ্চ দ্রুতির অর্ধেক হবে।

২৬. ধরি, সিরিজ সমবায়ের তুল্য স্প্রিং ধ্রুবক k_s
$k_s = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2} = \frac{30\times60}{30+60} = \frac{1800}{90} = 20\,\text{Nm}^{-1}$
এই সিরিজ সমবায় k_3 স্প্রিং-এর সাথে সমান্তরালে যুক্ত, তাই তুল্য ধ্রুবক $k_{eq} = k_s + k_3$
$k_{eq} = 20 + 90 = 110\,\text{Nm}^{-1}$
কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{110}{6}} = \sqrt{18.33} \approx 4.28\,\text{rads}^{-1}$
এখানে, $A = 4\,\text{cm} = 0.04\,\text{m}$
সর্বোচ্চ দ্রুতি, $v_{max} = \omega A = 4.28 \times 0.04 \approx 0.171\,\text{ms}^{-1}$
সর্বোচ্চ ত্বরণ, $a_{max} = \omega^2 A = 18.33 \times 0.04 \approx 0.733\,\text{ms}^{-2}$
অতএব, সর্বোচ্চ দ্রুতি প্রায় $0.171\,\text{ms}^{-1}$ এবং সর্বোচ্চ ত্বরণ প্রায় $0.733\,\text{ms}^{-2}$।

২৭. এখানে, $r = 3 \times 10^{-4}\,m$, $T = 7.2 \times 10^{-2}\,Nm^{-1}$, $\theta = 0°$, $\rho = 1000\,kgm^{-3}$, $g = 9.8\,ms^{-2}$, $a = 2\,ms^{-2}$
লিফটের ভেতরের পর্যবেক্ষকের জন্য লিফটের ত্বরণ একটি ছদ্ম-বল সৃষ্টি করে, ফলে কার্যকর অভিকর্ষজ ত্বরণ g_{eff} পরিবর্তিত হয়।
লিফট উপরের দিকে a ত্বরণে চললে $g_{eff} = g + a$ এবং নিচের দিকে a ত্বরণে চললে $g_{eff} = g - a$
কৈশিক উত্থানের সূত্রে g-এর জায়গায় g_{eff} বসাতে হবে, কারণ উত্তোলিত তরল স্তম্ভের ওজন এই কার্যকর অভিকর্ষের উপর নির্ভর করে।
(ক) স্থির অবস্থায়, $h_0 = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g} = \frac{2\times7.2\times10^{-2}\times1}{3\times10^{-4}\times1000\times9.8} = \frac{0.144}{2.94} \approx 0.04898\,m = 4.898\,cm$
(খ) উপরের দিকে ত্বরণে, $g_{eff} = 9.8 + 2 = 11.8\,ms^{-2}$
$h_{up} = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g_{eff}} = \frac{0.144}{3\times10^{-4}\times1000\times11.8} = \frac{0.144}{3.54} \approx 0.04068\,m = 4.068\,cm$
কার্যকর ওজন বৃদ্ধি পাওয়ায় উচ্চতা কমে যায়।
(গ) নিচের দিকে ত্বরণে **(a < g)**, $g_{eff} = 9.8 - 2 = 7.8\,ms^{-2}$
$h_{down} = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g_{eff}} = \frac{0.144}{3\times10^{-4}\times1000\times7.8} = \frac{0.144}{2.34} \approx 0.06154\,m = 6.154\,cm$
কার্যকর ওজন হ্রাস পাওয়ায় তরল বেশি উঁচুতে উঠতে পারে।
অতএব, **(ক)** 4.898 cm; **(খ)** 4.068 cm; **(গ)** 6.154 cm।

২৮. এখানে, $T = 2\,s$, $h = 4\,km$, $R = 6400\,km$, একদিন = 86400 s
পর্বতের চূড়ায় $g' = \frac{gR^2}{(R+h)^2} \approx g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ **[h ≪ R]**
যেহেতু $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, তাই $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta g}{g}\right) = \frac{h}{R}$
$\frac{\Delta T}{T} = \frac{4}{6400} = 6.25 \times 10^{-4}$
নতুন দোলনকাল, $T' = T\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) = 2 \times 1.000625 = 2.00125\,s$
দোলনকাল বাড়ায় ঘড়ি ধীরে চলবে এবং একদিনে সময় ক্ষতি = $\frac{h}{R} \times 86400\,s$
$= 6.25 \times 10^{-4} \times 86400 = 54\,s$
অতএব, নতুন দোলনকাল 2.00125 s এবং ঘড়িটি একদিনে 54 s কম সময় দেখাবে।

২৯. এখানে, $k_1 = 100\,Nm^{-1}$, $k_2 = 300\,Nm^{-1}$, $m = 4\,kg$, $T = 1\,s$
ক্ষুদ্র সরণ x-এর জন্য প্রতিটি স্প্রিং বরাবর প্রসারণ $\approx x\cos\theta$, সুতরাং গতিপথ বরাবর মোট প্রত্যানয়ন বল $F = (k_1 + k_2)x\cos^2\theta$
তুল্য ধ্রুবক, $k_{eff} = (k_1 + k_2)\cos^2\theta$
কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \cos\theta\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$
আবার, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 6.283\,rads^{-1}$
সুতরাং, $\cos\theta = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}}$
এখানে, $\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10\,rads^{-1}$
$\cos\theta = \frac{6.283}{10} = 0.6283$
$\theta = \cos^{-1}(0.6283) \approx 51.1°$
অতএব, θ প্রায় 51.1° হতে হবে।

৩০. অভিন্ন তারের ক্ষেত্রে: ধরি, তার দুটির টান T_1 ও T_2 এবং দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি ΔL_1 ও ΔL_2
দুটি তার একই বিন্দুতে যুক্ত থাকায় এদের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি সমান, $\Delta L_1 = \Delta L_2$
আমরা জানি, $T = \frac{AY\Delta L}{L}$; L, A, Y ও ΔL সব একই হওয়ায় $T_1 = T_2$
আবার, সাম্যাবস্থায় $T_1 + T_2 = W$
সুতরাং $T_1 = T_2 = \frac{W}{2}$, যা W-এর মানের উপর নির্ভর করে না।
দৈর্ঘ্যে সামান্য পার্থক্য থাকলে: ধরি, তার-১-এর দৈর্ঘ্য L এবং তার-২-এর দৈর্ঘ্য $L + e$
ভার বহনকারী বিন্দুটি δ পরিমাণ নিচে নামলে তার-১-এর প্রকৃত দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি δ; কিন্তু তার-২ আগে থেকেই লম্বা হওয়ায় প্রথমে e পরিমাণ 'ঢিলা' অংশ পূরণ করবে, তাই এর প্রকৃত টান-জনিত দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $(\delta - e)$ (যদি $\delta > e$ হয়)।
$T_1 = \frac{AY\delta}{L}$ এবং $T_2 = \frac{AY(\delta-e)}{L+e} \approx \frac{AY(\delta-e)}{L}$ (যেহেতু $e \ll L$)
সাম্যাবস্থায়, $T_1 + T_2 = W$
বা, $\frac{AY}{L}(2\delta - e) = W$
বা, $\delta = \frac{1}{2}\left[\frac{WL}{AY} + e\right]$
এখানে, $\frac{WL}{AY} = \frac{100\times2}{1\times10^{-6}\times2\times10^{11}} = \frac{200}{2\times10^5} = 1\times10^{-3}\,\text{m}$
$\delta = \frac{1}{2}\left(1\times10^{-3} + 5\times10^{-4}\right) = 7.5\times10^{-4}\,\text{m}$
যাচাই: $\delta = 7.5\times10^{-4}\,\text{m} > e = 5\times10^{-4}\,\text{m}$, অর্থাৎ লম্বা তারটিও টানটান হয়েছে (এর জন্য $W > \frac{AYe}{L} = 50\,\text{N}$ হতে হয়, এখানে $W = 100\,\text{N}$)।
$T_1 = \frac{AY\delta}{L} = \frac{1\times10^{-6}\times2\times10^{11}\times7.5\times10^{-4}}{2} = 75\,\text{N}$
$T_2 = W - T_1 = 100 - 75 = 25\,\text{N}$
অতএব, ছোট (মূল দৈর্ঘ্যের) তারটি 75 N এবং লম্বা তারটি 25 N বল বহন করে। ছোট তারটি অনেক বেশি বল বহন করে, কারণ এটি আগে টানটান হয়ে যায়, আর লম্বা তারটি সংযোগ বিন্দু যথেষ্ট নিচে নামা পর্যন্ত তুলনামূলকভাবে 'ঢিলা' থাকে।

৩১. এখানে, $A = 4$, $\omega = 5\,\text{rads}^{-1}$, $\phi = \frac{\pi}{3} = 1.0472\,\text{rad}$
ধরি, $\theta = \omega t + \phi$
$x = A\sin\theta$ থেকে, বেগ $v = A\omega\cos\theta$ এবং ত্বরণ $a = -A\omega^2\sin\theta$
প্রশ্নমতে, $|v| = |a|$
বা, $A\omega|\cos\theta| = A\omega^2|\sin\theta|$
বা, $|\tan\theta| = \frac{1}{\omega} = 0.2$
$\tan^{-1}(0.2) = 11.31^\circ = 0.1974\,\text{rad}$
সুতরাং, $\theta = n\pi \pm 0.1974\,\text{rad}$
আবার, $t = \frac{\theta-\phi}{\omega} = \frac{\theta-1.0472}{5}$
$n = 0$ এর জন্য $\theta = 0.1974$ ও $\theta = -0.1974$ উভয়ক্ষেত্রেই t ঋণাত্মক হয় (বাতিল)।
$n = 1$ এর জন্য, $\theta = \pi - 0.1974 = 2.9442\,\text{rad}$
$t = \frac{2.9442-1.0472}{5} = \frac{1.8970}{5} \approx 0.379\,\text{s}$
(অন্য শাখা $\theta = \pi + 0.1974 = 3.3390\,\text{rad}$ থেকে $t \approx 0.458\,\text{s}$ পাওয়া যায়, যা বড়।)
অতএব, প্রথমবার সাংখ্যমান সমান হবে $t \approx 0.379\,\text{s}$ সময়ে।

৩২. এখানে, $L = 0.6\,\text{m}$, $\rho = 7800\,\text{kgm}^{-3}$, $Y = 2 \times 10^{11}\,\text{Nm}^{-2}$, $\omega = 100\,\text{rads}^{-1}$; ধরি, রডের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল A (ধ্রুবক)

অক্ষ থেকে x দূরত্বে রডের একটি বিন্দু বিবেচনা করি।

এই বিন্দুতে টান বল $T(x) = x$ থেকে L পর্যন্ত অংশের ঘূর্ণনের জন্য প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল

$T(x) = \int_x^L \rho A\omega^2 r\,dr = \frac{\rho A\omega^2(L^2-x^2)}{2}$

পীড়ন, $\sigma(x) = \frac{T(x)}{A} = \frac{\rho\omega^2(L^2-x^2)}{2}$

এটি $x = 0$ (অক্ষের কাছে, আটকানো প্রান্তে) সর্বোচ্চ হয়।

$\sigma_{max} = \frac{\rho\omega^2L^2}{2} = \frac{7800\times100^2\times0.6^2}{2} = \frac{7800\times10000\times0.36}{2} \approx 1.404\times10^7\,\text{Nm}^{-2}$

মোট দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $\delta = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{Y}\,dx = \frac{\rho\omega^2}{2Y}\int_0^L (L^2-x^2)\,dx$

$= \frac{\rho\omega^2}{2Y}\left(L^3 - \frac{L^3}{3}\right) = \frac{\rho\omega^2}{2Y}\times\frac{2L^3}{3} = \frac{\rho\omega^2L^3}{3Y}$

$\delta = \frac{7800\times10000\times0.6^3}{3\times2\times10^{11}} = \frac{7800\times10000\times0.216}{6\times10^{11}} \approx 2.808\times10^{-5}\,\text{m}$

অতএব, সর্বোচ্চ পীড়ন প্রায় $1.404\times10^7\,\text{Nm}^{-2}$ এবং মোট দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি প্রায় $2.808\times10^{-5}\,\text{m}$।

৩৩. ধরি, কেন্দ্র থেকে r দূরত্বে পাথরটির উপর অভিকর্ষজ ত্বরণ $g(r)$

কেবল r ব্যাসার্ধের গোলকের ভর অভিকর্ষ বল প্রয়োগ করে, তাই $g(r) = \frac{G\times\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho r$

পাথরটির ত্বরণ $a = -\frac{4}{3}\pi G\rho\,r$; এটি $a = -\omega^2 r$ আকারের সরল ছন্দিত গতি, যেখানে $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho$

পূর্ণ দোলনকাল, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$

এখানে, $G\rho = 6.674\times10^{-11}\times4000 = 2.6696\times10^{-7}$

$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{9.4248}{2.6696\times10^{-7}}} = \sqrt{3.530\times10^7} \approx 5942\,\text{s}$

টানেলের প্রান্ত সর্বোচ্চ সরণ বিন্দু এবং কেন্দ্র সাম্যাবস্থান, তাই প্রান্ত থেকে কেন্দ্রে পৌঁছাতে পূর্ণ দোলনকালের এক-চতুর্থাংশ সময় লাগে।

$t = \frac{T}{4} = \frac{5942}{4} \approx 1485.5\,\text{s} \approx 24.8$ মিনিট

অতএব, পাথরটি কেন্দ্রে পৌঁছাতে প্রায় $1485.5\,\text{s}$ (প্রায় 24.8 মিনিট) সময় নেবে।

৩৪. এখানে, $\eta = 1.5\,\text{Pas}$, $L = 10\,\text{cm} = 0.1\,\text{m}$, $r = 1\,\text{mm} = 1\times10^{-3}\,\text{m}$, $\Delta P = 4000\,\text{Pa}$

পোয়াজোই সূত্র অনুযায়ী, $Q = \frac{\pi\Delta P\,r^4}{8\eta L}$

$Q = \frac{\pi\times4000\times(1\times10^{-3})^4}{8\times1.5\times0.1} = \frac{\pi\times4\times10^{-9}}{1.2} \approx 1.047\times10^{-8}\,\text{m}^3\text{s}^{-1}$

গড় বেগ, $v = \frac{Q}{\pi r^2}$

$v = \frac{1.047\times10^{-8}}{\pi\times(1\times10^{-3})^2} = \frac{1.047\times10^{-8}}{3.1416\times10^{-6}} \approx 3.33\times10^{-3}\,\text{ms}^{-1} = 3.33\,\text{mms}^{-1}$

অতএব, প্রবাহের হার প্রায় $1.047\times10^{-8}\,\text{m}^3\text{s}^{-1}$ এবং গড় বেগ প্রায় $3.33\times10^{-3}\,\text{ms}^{-1}$।

৩৫. একটি বড় ফোঁটা ভেঙে অনেক ছোট ফোঁটায় পরিণত হলে মোট পৃষ্ঠক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায়, ফলে পৃষ্ঠশক্তিও বৃদ্ধি পায়। এই অতিরিক্ত শক্তি কোথাও থেকে আসতে হবে; শক্তির নিত্যতা সূত্র অনুযায়ী এটি পানির অভ্যন্তরীণ (তাপীয়) শক্তি থেকে আসে, ফলে পানির তাপমাত্রা সামান্য হ্রাস পাবে (এটি ফোঁটা মিলনে তাপ নির্গত হওয়ার বিপরীত প্রক্রিয়া)।
এখানে, $R = 2 \times 10^{-3}\,\text{m}$, $n = 1000$, $T = 7.2 \times 10^{-2}\,\text{Nm}^{-1}$, $\rho = 1000\,\text{kgm}^{-3}$, $s = 4186\,\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
ধরি, প্রতিটি ক্ষুদ্র ফোঁটার ব্যাসার্ধ r
আয়তন সংরক্ষণ থেকে, $\frac{4}{3}\pi R^3 = n \times \frac{4}{3}\pi r^3$
বা, $r = \frac{R}{n^{1/3}} = \frac{2\times10^{-3}}{1000^{1/3}} = \frac{2\times10^{-3}}{10} = 2 \times 10^{-4}\,\text{m}$
প্রাথমিক পৃষ্ঠক্ষেত্রফল, $A_i = 4\pi R^2$
চূড়ান্ত মোট পৃষ্ঠক্ষেত্রফল, $A_f = n \times 4\pi r^2$
ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি, $\Delta A = 4\pi(nr^2 - R^2)$
যেহেতু $nr^2 = n \times \frac{R^2}{n^{2/3}} = R^2 n^{1/3}$, তাই $\Delta A = 4\pi R^2\left(n^{1/3} - 1\right)$
$\Delta A = 4\pi \times (2 \times 10^{-3})^2 \times (10 - 1) = 4\pi \times 4 \times 10^{-6} \times 9 \approx 4.524 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$
শোষিত শক্তি (পৃষ্ঠশক্তি বৃদ্ধি), $\Delta E = T\,\Delta A = 7.2 \times 10^{-2} \times 4.524 \times 10^{-4} \approx 3.257 \times 10^{-5}\,\text{J}$
মূল ফোঁটার ভর, $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4}{3}\pi \times (2 \times 10^{-3})^3 \times 1000 \approx 3.351 \times 10^{-5}\,\text{kg}$
তাপমাত্রার পরিবর্তন, $\Delta\theta = \frac{\Delta E}{ms} = \frac{3.257\times10^{-5}}{3.351\times10^{-5}\times4186} \approx 2.32 \times 10^{-4}\,\text{K}$
অতএব, পানির তাপমাত্রা মাত্র প্রায় $2.32 \times 10^{-4}\,\text{K}$ (প্রায় $0.00023°\text{C}$) হ্রাস পাবে।

৩৬. ধরি, প্রতিটি ছোট গোলকের ব্যাসার্ধ r এবং মিলিত বড় গোলকের ব্যাসার্ধ R
স্টোকসের সূত্র অনুযায়ী প্রান্তিক বেগ, $v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$; একই উপাদান ও একই তরলে ঘনত্ব ও সান্দ্রতা অপরিবর্তিত থাকায় $v \propto r^2$
n সংখ্যক অভিন্ন গোলক মিলিত হয়ে একটি গোলক তৈরি করলে আয়তন সংরক্ষণ থেকে, $\frac{4}{3}\pi R^3 = n \times \frac{4}{3}\pi r^3$
বা, $R = n^{1/3} r$
যেহেতু $v \propto r^2$, নতুন প্রান্তিক বেগ, $v_{new} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 v_0 = \left(n^{1/3}\right)^2 v_0 = n^{2/3} v_0$
$n = 8$ এর জন্য, $n^{2/3} = \left(8^{1/3}\right)^2 = 2^2 = 4$
$v_{new} = 4 \times v_0 = 4 \times 2 \times 10^{-2} = 8 \times 10^{-2}\,\text{ms}^{-1}$
অতএব, নতুন গোলকটির প্রান্তিক বেগ $8 \times 10^{-2}\,\text{ms}^{-1}$।

৩৭. এখানে, একদিনে ক্ষতি = 5 মিনিট = 300 s, একদিন = 86400 s
ক্ষতির ভগ্নাংশ = $\frac{300}{86400} = 0.003472 = 0.3472\%$
ঘড়ি ধীরে চলায় এই ভগ্নাংশই দোলনকালের আপেক্ষিক বৃদ্ধির সমান, $\frac{\Delta T}{T} = 0.3472\%$
আমরা জানি, $T \propto \sqrt{L}$, তাই $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$
সুতরাং, $\frac{\Delta L}{L} = 2 \times 0.3472\% = 0.6944\%$
অতএব, দোলকের দৈর্ঘ্য প্রায় 0.69% বৃদ্ধি করতে হবে।

৩৮. ধরি, কণা দুটির সরণ $x_1 = A\sin(\omega t + \phi_1)$ এবং $x_2 = A\sin(\omega t + \phi_2)$; অতিক্রমের মুহূর্তে সরণ x_0
অতিক্রমের মুহূর্তে $x_1 = x_2 = x_0$ এবং বেগ বিপরীতমুখী হওয়ায় কোণ দুটি সম্পূরক, তাই দশা পার্থক্য $\delta = \pi - 2\sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)$
এখানে, $\delta = 90°$
$90° = 180° - 2\sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)$
বা, $\sin^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right) = \frac{180°-90°}{2} = 45°$
বা, $\frac{x_0}{A} = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$
অতএব, অতিক্রমের সময় সরণ ছিল বিস্তারের প্রায় 0.707 গুণ, অর্থাৎ $x_0 \approx 0.707A$ (বিস্তারের প্রায় 70.7%)।

৩৯. এখানে, $r_1 = 1 \times 10^{-3}\,m$, $r_2 = 1.5 \times 10^{-3}\,m$, $T = 7.5 \times 10^{-2}\,Nm^{-1}$, $\theta = 0°$, $\rho = 1000\,kgm^{-3}$, $g = 9.8\,ms^{-2}$

দুই সমকেন্দ্রিক নলের মধ্যবর্তী ফাঁকা স্থানে তরলের মেনিসকাস একটি রিং-আকৃতির বক্রতল তৈরি করে; এর ভেতরের কিনারা ভেতরের নলের বাইরের গায়ে (ব্যাসার্ধ r_1) এবং বাইরের কিনারা বাইরের নলের ভেতরের গায়ে (ব্যাসার্ধ r_2) স্পর্শ করে।

ধরি, পানি h উচ্চতায় ওঠে।

পৃষ্ঠটানের কারণে ঊর্ধ্বমুখী মোট বল $= T \times (2\pi r_1 + 2\pi r_2) \times \cos\theta = 2\pi T(r_1 + r_2)\cos\theta$

এই বল ফাঁকা অংশে উত্তোলিত তরলের ওজনকে (প্রান্তীয় প্রভাব উপেক্ষা করে) সমর্থন করে, ওজন $= \rho g h \times \pi(r_2^2 - r_1^2)$

সাম্যাবস্থায়, $2\pi T(r_1 + r_2)\cos\theta = \rho g h \pi(r_2^2 - r_1^2)$

যেহেতু $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$, সমীকরণটি সরল হয়ে দাঁড়ায় $2T\cos\theta = \rho g h(r_2 - r_1)$

অর্থাৎ $h = \frac{2T\cos\theta}{\rho g(r_2 - r_1)}$

$h = \frac{2\times 7.5\times 10^{-2}\times 1}{1000\times 9.8\times(1.5\times 10^{-3} - 1\times 10^{-3})} = \frac{0.15}{1000\times 9.8\times 5\times 10^{-4}} = \frac{0.15}{4.9} \approx 0.0306\,m = 3.06\,cm$

অতএব, দুই নলের মধ্যবর্তী স্থানে পানি প্রায় $3.06\,cm$ উচ্চতা পর্যন্ত উঠবে।

৪০. এখানে, $R = 2\,cm = 2 \times 10^{-2}\,m$, $T = 2.5 \times 10^{-2}\,Nm^{-1}$, $P_0 = 1.013 \times 10^5\,Pa$

বুদবুদ তৈরিতে দুই ধরনের কাজ সম্পন্ন হয়: **(i)** পৃষ্ঠশক্তি বৃদ্ধিতে ব্যয়িত কাজ W_{surf} এবং **(ii)** বুদবুদের আয়তন তৈরি করতে বায়ুমণ্ডলকে পেছনে ঠেলে দিতে ব্যয়িত কাজ W_{atm}

সাবানের বুদবুদের দুটি তল থাকায় $W_{surf} = 2T \times 4\pi R^2$

$W_{surf} = 2 \times 2.5 \times 10^{-2} \times 4\pi \times (0.02)^2 = 2 \times 2.5 \times 10^{-2} \times 4\pi \times 4 \times 10^{-4} \approx 2.513 \times 10^{-4}\,J$

শুরুতে আয়তন প্রায় শূন্য, তাই $W_{atm} = P_0\Delta V = P_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$

$W_{atm} = 1.013 \times 10^5 \times \frac{4}{3}\pi \times (0.02)^3 = 1.013 \times 10^5 \times \frac{4}{3}\pi \times 8 \times 10^{-6} \approx 3.395\,J$

মোট কাজ, $W_{total} = W_{surf} + W_{atm} \approx 2.513 \times 10^{-4} + 3.395 \approx 3.395\,J$

তুলনা: $\frac{W_{atm}}{W_{surf}} = \frac{3.395}{2.513\times 10^{-4}} \approx 1.35 \times 10^4$, অর্থাৎ বায়ুমণ্ডলের বিরুদ্ধে কৃত কাজ পৃষ্ঠটানজনিত কাজের চেয়ে প্রায় 13500 গুণ বেশি।

অতএব, বুদবুদ তৈরি করতে মোট কাজ প্রায় $3.395\,J$।

Chemistry

২০০ নম্বর

৪১. $W: E_1 \rightarrow E_2$ অনুপাত ≈ 6.5 (বিশাল লাফ) $\Rightarrow$ যোজনী ইলেকট্রন ১টি, গ্রুপ ১।

$X: E_2 \rightarrow E_3$ অনুপাত ≈ 4.3 (বিশাল লাফ) $\Rightarrow$ যোজনী ইলেকট্রন ২টি, গ্রুপ ২।

Y : প্রথম ৬টি মানে কোনো বিশাল লাফ নেই (সর্বোচ্চ অনুপাত ≈ 1.54) $\Rightarrow$ যোজনী ইলেকট্রন কমপক্ষে ৬টি, গ্রুপ ১৬।

$Z: E_4 \rightarrow E_5$ অনুপাত ≈ 6.1 (বিশাল লাফ) $\Rightarrow$ যোজনী ইলেকট্রন ৪টি, গ্রুপ ১৪।

৪২. $l = 1, n = 3 \Rightarrow 3p$ উপস্তর।

$E_6 \rightarrow E_7$-এ লাফ $\Rightarrow$ যোজনী ইলেকট্রন সংখ্যা $= 6$।

$3s^2 3p^4$ হলে যোজনী ইলেকট্রন $= 2 + 4 = 6$ ✓

ইলেকট্রন বিন্যাস: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$

পারমাণবিক সংখ্যা, $Z = 16$ (S, সালফার)

সর্বোচ্চ জারণ সংখ্যা $= +6$

৪৩. $46\,g$ Na-এর মোল সংখ্যা, $n = \frac{46}{23} = 2\,mol$

মোট শক্তি $= n \times E_1 = 2 \times 496 = 992\,kJ$

প্রতি পরমাণুতে শক্তি (eV এককে) $= \frac{496}{96.485} = 5.14\,eV$

৪৪. $Ca \rightarrow Ga$ (একই পর্যায়ে বাম থেকে ডানে): $Ca = [Ar]4s^2$, যেখানে প্রথম আয়নীকরণে 4s ইলেকট্রন অপসারিত হয়। অন্যদিকে, $Ga = [Ar]3d^{10}4s^24p^1$, যেখানে তুলনামূলকভাবে উচ্চ-শক্তির $4p^1$ ইলেকট্রন অপসারিত হয়। তাই $E_1(Ga) < E_1(Ca)$, অর্থাৎ $579 < 590\,kJ/mol$।
$Al \rightarrow Ga$ (একই গ্রুপে ওপর থেকে নিচে): স্বাভাবিকভাবে E_1 কমার কথা, কিন্তু Ga-এর অভ্যন্তরীণ পূর্ণ $3d^{10}$-এর দুর্বল **shielding**-এর কারণে কার্যকর নিউক্লীয় আকর্ষণ প্রত্যাশার চেয়ে বেশি থাকে। ফলে **d-block contraction**-এর কারণে Ga-এর E_1 কমার প্রবণতা প্রায় সম্পূর্ণভাবে প্রতিহত হয় এবং $E_1(Ga) \approx E_1(Al)$ হয়।
উভয় পর্যবেক্ষণ একসাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ— Ga < Ca হওয়া Ca ও Ga-এর ইলেকট্রন বিন্যাস এবং $4p^1$ ইলেকট্রনের তুলনামূলক দুর্বল আবদ্ধতার সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ, আর $Ga \approx Al$ হওয়া Ga-এর দুর্বল $3d^{10}$ **shielding** ও **d-block contraction**-এর ফল।

৪৫. পুনরায় লিখলে: $I_1 = z; I_2 = 1.85z; I_3 = 3.05z; I_4 = 4.39z; I_5 = 15.6z$
$I_4 \rightarrow I_5$ অনুপাত = 3.55 (উল্লেখযোগ্য লাফ)
$\Rightarrow$ যোজনী ইলেকট্রন সংখ্যা = 4, গ্রুপ ১৪।
$z = I_1 = 1000\,kJ/mol$
$I_5 = 15.6 \times 1000 = 15,600\,kJ/mol$

৪৬. Rb^+ বিন্যাস: [Kr] (সম্পূর্ণ নিষ্ক্রিয় গ্যাস কাঠামো)
Sr^+ বিন্যাস: $[Kr]5s^1$ (একক ইলেকট্রন)
Rb^+-এর নিষ্ক্রিয় কাঠামো ভাঙতে অনেক বেশি শক্তি প্রয়োজন, তাই $E_2(Rb) = 2632\,kJ/mol$ অত্যন্ত বেশি।
Sr^+-এর একক $5s^1$ ইলেকট্রন তুলনামূলক সহজে অপসারিত হয়, তাই $E_2(Sr) = 1064\,kJ/mol$ অনেক কম।

৪৭. $F \rightarrow Cl$ (ব্যতিক্রমী বৃদ্ধি): F-এর অত্যন্ত ক্ষুদ্র 2p উপস্তরে উচ্চ ইলেকট্রন ঘনত্বজনিত আন্তঃইলেকট্রনিক বিকর্ষণ নতুন ইলেকট্রনের প্রবেশকে বাধাগ্রস্ত করে, যা Cl-এর বড় 3p উপস্তরে কম প্রকট— তাই Cl > F।
$Cl \rightarrow Br$ (স্বাভাবিক হ্রাস): স্বাভাবিক নিয়মে গ্রুপে নিচে নামলে ব্যাসার্ধ ও স্ক্রিনিং বৃদ্ধির কারণে Z_{eff} হ্রাস পায়, তাই Br < Cl।

৪৮. P-এর $3p^3$ অর্ধপূর্ণ বিন্যাস (৩টি একক ইলেকট্রন) অতিরিক্ত স্থিতিশীল, নতুন ইলেকট্রন প্রবেশ করালে প্রতিসাম্য ভেঙে বিকর্ষণ বৃদ্ধি পায়।
তুলনা: $P \rightarrow S$ পরিবর্তনে পার্থক্য = $200 - 72 = 128\,kJ/mol$, যা $N \rightarrow O$ পরিবর্তনের (≈ 141) কাছাকাছি মাত্রার।
P-এর আসক্তি Si (-134) অপেক্ষাও কম, প্রমাণ করে এই ব্যতিক্রম উভয় প্রতিবেশীর তুলনাতেই প্রকট।

৪৯. কঠিন Cu_2O-তে জালক শক্তি Cu^+-এর পূর্ণ $3d^{10}$ কাঠামোগত স্থিতিশীলতার সাথে মিলিতভাবে সামগ্রিক যৌগকে স্থিতিশীল করে তোলে।
জলীয় দ্রবণে, Cu^{2+}-এর উচ্চতর হাইড্রেশন শক্তি Cu^+-এর তুলনায় অনেক বেশি স্থিতিশীলতা প্রদান করে, যা Cu^{2+} গঠনের অতিরিক্ত আয়নীকরণ শক্তির ঘাটতি পূরণ করে দেয়।
তাই থার্মোডাইনামিক ভারসাম্যে দ্রবণে $2Cu^+ \rightarrow Cu + Cu^{2+}$ প্রতিক্রিয়া অগ্রসর হয়।

৫০. $C \rightarrow Si$: ২য় পর্যায়ের C-এর ছোট আকারজনিত কিছুটা আন্তঃইলেকট্রনিক বিকর্ষণ C-এর আসক্তি Si-এর চেয়ে সামান্য কম করে দেয়।
$Si \rightarrow Ge$: Ge-এর আগে সম্পূর্ণ $3d^{10}$ থাকা সত্ত্বেও এবং গ্রুপ-নিম্নগামী ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির কারণে Ge-এর আসক্তি Si-এর চেয়ে কম হয়ে যায়— d-ব্লক সংকোচনের প্রভাব এখানে যথেষ্ট প্রবল নয়।
উভয় প্রভাব (২য় পর্যায়ের ছোট-আকার প্রভাব এবং d-ব্লক সংকোচন) একসাথে কাজ করে একটি অ-মসৃণ ক্রম তৈরি করেছে।

৫১. ১. আপেক্ষিকতাসংক্রান্ত সংকোচন ভারী নিউক্লিয়াসে (Tl, Z = 81) অধিক তীব্র, যা 6s ইলেকট্রনকে অতিরিক্তভাবে নিউক্লিয়াসের কাছে টেনে আনে এবং বন্ধন গঠনে অনিচ্ছুক করে তোলে।
২. Tl-এর আগে সম্পূর্ণ $4f^{14}$ ও $5d^{10}$ উভয় সিরিজ অতিক্রম করতে হয়, যা $6s^2$-কে আরও দৃঢ়ভাবে ধরে রাখে।
তাই Tl-এ +1 অবস্থা +3 অপেক্ষা প্রধান, যেখানে হালকা In-এ ($5s^2$, কম আপেক্ষিকতাসংক্রান্ত প্রভাব) +3 এখনও প্রধান থাকে।

৫২. প্রোটন সংখ্যা: P = 15, S = 16, Cl = 17, K = 19, Ca = 20, Sc = 21
Z/e: $P^{3-} = 0.833; S^{2-} = 0.889; Cl^- = 0.944; K^+ = 1.056; Ca^{2+} = 1.111; Sc^{3+} = 1.167$
ব্যাসার্ধের ক্রম (অবরোহী): $P^{3-} > S^{2-} > Cl^- > K^+ > Ca^{2+} > Sc^{3+}$

৫৩. গ্রুপিং: $(1s^2)(2s^22p^6)(3s^23p^6)(4s^1)$
$(n-1)$ শেল (8টি), $\times 0.85 = 6.80$
$(n-2)$ ও নিচে (10টি), $\times 1.00 = 10.00$
$S = 16.80$
$Z_{eff} = 19 - 16.80 = 2.20$
$E_1 \approx 13.6 \times \frac{(2.20)^2}{16} = 4.11\,eV = 4.11 \times 96.485 \approx 397\,kJ/mol$
(প্রকৃত মান $419\,kJ/mol$-এর কাছাকাছি)

৫৪. $Al \rightarrow Ga$: $3d^{10}$-এর দুর্বল স্ক্রিনিং E_1-হ্রাসকে প্রায় বাতিল করে দেয় বলে $Ga \approx Al$।
$Ga \rightarrow In$: এই পরিবর্তনে অতিরিক্ত কোনো সংকোচনমূলক প্রভাব নেই, তাই স্বাভাবিক গ্রুপ-নিম্নগামী প্রবণতা পুনরায় প্রাধান্য পায়— $In < Ga$।
উভয় পর্যবেক্ষণ সামঞ্জস্যপূর্ণ: d-ব্লক সংকোচনের প্রভাব প্রতিটি ধাপে সমানভাবে জমা হয় না।

৫৫. Br^- (35p, 36e): $Z/e = 0.972$
Rb^+ (37p, 36e): $Z/e = 1.028$
পার্থক্য = 0.056
Se^{2-} (34p, 36e): $Z/e = 0.944$
Sr^{2+} (38p, 36e): $Z/e = 1.056$
পার্থক্য = 0.112
Se^{2-}/Sr^{2+} জোড়ার পার্থক্য দ্বিগুণ— তাই এই জোড়ায় ব্যাসার্ধ পার্থক্য বেশি প্রকট হবে।

৫৬. মোট সংকোচন $= 103 - 86.1 = 16.9\,pm$
১৩টি ধাপে বিভক্ত করলে, গড় সংকোচন প্রতি ধাপে $= \frac{16.9}{13} \approx 1.30\,pm$
সম্পূর্ণ রৈখিক না হওয়ার কারণ: কিছু ল্যান্থানাইডে ব্যতিক্রমী ইলেকট্রন বিন্যাস (4f/5d ভাগাভাগি) থাকায় প্রতিটি ধাপে স্ক্রিনিং-বৃদ্ধির পরিমাণ ঠিক সমান হয় না।

৫৭. $BeO + 2HCl \rightarrow BeCl_2 + H_2O$
$BeO + 2NaOH \rightarrow Na_2BeO_2 + H_2O$
Be^{2+}-এর অত্যন্ত ক্ষুদ্র আকার ও উচ্চ চার্জ ঘনত্ব এটিকে Al^{3+}-এর কাছাকাছি চার্জ ঘনত্বে নিয়ে আসে (কর্ণ সম্পর্ক), ফলে $Be-O$ বন্ধন যথেষ্ট সমযোজী চরিত্র লাভ করে উভধর্মিতা প্রদর্শন করে।
Mg^{2+}-এর চার্জ ঘনত্ব অনেক কম, তাই MgO সম্পূর্ণ ক্ষারীয় থাকে।

৫৮. F^--এর হাইড্রেশন এনথালপি সবচেয়ে ঋণাত্মক, নির্দেশ করে এটি সবচেয়ে বেশি হাইড্রেটেড হয়।
জলীয় দ্রবণে হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধের ক্রম বিপরীত হয়ে যায়: $F^-_{(aq)} > Cl^-_{(aq)} > Br^-_{(aq)} > I^-_{(aq)}$।
বড় হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধ মানে কম গতিশীলতা, তাই পরিবাহিতার ক্রম দাঁড়ায় $F^- < Cl^- < Br^- < I^-$— গ্যাসীয় আয়নিক ব্যাসার্ধের ঠিক বিপরীত।

৫৯. N_2O (+1) ও NO (+2): নিরপেক্ষ অক্সাইড
N_2O_3 (+3): দুর্বল অম্লীয় (HNO_2 তৈরি করে)
NO_2 (+4): অম্লীয়
N_2O_5 (+5): তীব্র অম্লীয় (HNO_3 তৈরি করে)
কোনো ক্ষারীয় সদস্য না থাকার কারণ: N নিজেই একটি তীব্র অধাতু (উচ্চ তড়িৎ ঋণাত্মকতা), তাই এর কোনো জারণ সংখ্যাতেই $N-O$ বন্ধন যথেষ্ট আয়নিক চরিত্র অর্জন করতে পারে না।

৬০. Ca^{2+}-এর ছোট গ্যাসীয় ব্যাসার্ধ থাকার কারণে এর চার্জ ঘনত্ব বেশি:

$\phi(Ca^{2+}) = \frac{2}{100} = 0.0200$; $\phi(Sr^{2+}) = \frac{2}{118} = 0.0169$।

এই উচ্চতর চার্জ ঘনত্বের কারণে Ca^{2+}-এর জলযোজন বেশি শক্তিশালী হয়; তাই এর হাইড্রেশন এনথালপি (-1577), Sr^{2+}-এর (-1443)-এর চেয়ে বেশি ঋণাত্মক।

ফলে জলীয় দ্রবণে Ca^{2+}-এর চারপাশে অধিক দৃঢ় জলযোজন স্তর গঠিত হয় এবং এর কার্যকর হাইড্রেটেড ব্যাসার্ধ Sr^{2+}-এর তুলনায় বড় হয়। তাই Ca^{2+}-এর আয়নিক গতিশীলতা **(mobility)** কমে যায়। ফলে Sr^{2+}-এর গতিশীলতা ও মোলার পরিবাহিতা বেশি হয়।