Mathematics

২০০ নম্বর

১. আমরা জানি, তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হওয়ার শর্ত হলো তাদের স্কেলার গুণফলের মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

স্কেলার ত্রিগুণন নির্ণয় করি:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ m & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2(4-1) - (-3)(2-(-m)) + 1(-1-2m) = 0$

$\Rightarrow 2(3) + 3(2+m) - 1 - 2m = 0$

$\Rightarrow 6 + 6 + 3m - 1 - 2m = 0$

$\Rightarrow 11 + m = 0$

$\Rightarrow m = -11$

এখন, $m = 3$ হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে না এবং এরা একটি সামান্তরিক ঘনকের তিনটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করবে।

তখন সামান্তরিক ঘনকটির আয়তন, $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

$V = |11 + m| = |11 + 3| = 14$ ঘন একক

$\therefore$ সমতলীয় হওয়ার জন্য $m = -11$ এবং $m = 3$ হলে আয়তন 14 ঘন একক।

২. ধরি, $\vec{A} = \vec{A}_{||} + \vec{A}_{\perp}$

যেখানে $\vec{A}_{||}$ হলো $\vec{B}$ এর সমান্তরাল উপাংশ এবং $\vec{A}_{\perp}$ হলো লম্ব উপাংশ।

$\vec{B}$ ভেক্টরের ওপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|B|}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (1)(2) + (-2)(1) + (2)(-2) = 2 - 2 - 4 = -4$

$|\vec{B}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\vec{B}$ এর সমান্তরাল উপাংশ, $\vec{A}_{||} = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|B|}\right) \hat{B} = \left(\frac{-4}{3}\right) \left(\frac{2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}}{3}\right)$

$\Rightarrow \vec{A}_{||} = -\frac{8}{9}\hat{i} - \frac{4}{9}\hat{j} + \frac{8}{9}\hat{k}$

লম্ব উপাংশ, $\vec{A}_{\perp} = \vec{A} - \vec{A}_{||}$

$\Rightarrow \vec{A}_{\perp} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) - (-\frac{8}{9}\hat{i} - \frac{4}{9}\hat{j} + \frac{8}{9}\hat{k})$

$\Rightarrow \vec{A}_{\perp} = (1 + \frac{8}{9})\hat{i} + (-2 + \frac{4}{9})\hat{j} + (2 - \frac{8}{9})\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{A}_{\perp} = \frac{17}{9}\hat{i} - \frac{14}{9}\hat{j} + \frac{10}{9}\hat{k}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $\vec{A} = (-\frac{8}{9}\hat{i} - \frac{4}{9}\hat{j} + \frac{8}{9}\hat{k}) + (\frac{17}{9}\hat{i} - \frac{14}{9}\hat{j} + \frac{10}{9}\hat{k})$

৩. প্রথমে সন্নিহিত দুটি বাহুর ভেক্টর নির্ণয় করি:

$\overrightarrow{AB} = (-1-1)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (0-3)\hat{k} = -2\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = (0-1)\hat{i} + (1-2)\hat{j} + (2-3)\hat{k} = -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(2-3) - \hat{j}(2-3) + \hat{k}(2-2)$

$= -\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore \Delta = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ বর্গ একক।

ধরি, B হতে AC এর ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য h।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাধারণ সূত্রানুসারে, $\Delta = \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| \times h$

এখানে, ভূমি $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times h$

$\Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $\frac{1}{\sqrt{2}}$ বর্গ একক এবং লম্বের দৈর্ঘ্য $\sqrt{\frac{2}{3}}$ একক।

৪. t সময় পর কণা দুটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে:

$\vec{R}_1(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t = (2\hat{i} + 3\hat{j}) + (\hat{i} + 2\hat{j})t = (2+t)\hat{i} + (3+2t)\hat{j}$

$\vec{R}_2(t) = \vec{r}_2 + \vec{v}_2 t = (7\hat{i} + 5\hat{j}) + (-2\hat{i} + \hat{j})t = (7-2t)\hat{i} + (5+t)\hat{j}$

কণা দুটি মিলিত হওয়ার শর্ত: $\vec{R}_1(t) = \vec{R}_2(t)$

$\hat{i}$ এর সহগ সমীকৃত করে: $2 + t = 7 - 2t \Rightarrow t = \frac{5}{3}$ সেকেন্ড।

$t = \frac{5}{3}$ সময়ে $\hat{j}$ এর সহগগুলো যাচাই করি:

প্রথম কণার $y_1 = 3 + 2(\frac{5}{3}) = \frac{19}{3}$

দ্বিতীয় কণার $y_2 = 5 + \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$

যেহেতু $y_1 \neq y_2$, তাই কণা দুটি কখনোই পরস্পর মিলিত হবে না।

t সময়ে কণা দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব ভেক্টর,

$\Delta\vec{R}(t) = \vec{R}_1(t) - \vec{R}_2(t) = (3t-5)\hat{i} + (t-2)\hat{j}$

দূরত্বের বর্গ, $D^2 = (3t-5)^2 + (t-2)^2 = 9t^2 - 30t + 25 + t^2 - 4t + 4 = 10t^2 - 34t + 29$

দূরত্ব ন্যূনতম হওয়ার জন্য $\frac{d(D^2)}{dt} = 0$ হবে।

$\Rightarrow 20t - 34 = 0$

$\Rightarrow t = 1.7$ সেকেন্ড।

$t = 1.7$ বসালে ন্যূনতম দূরত্ব,

$D^2_{min} = 10(1.7)^2 - 34(1.7) + 29 = 28.9 - 57.8 + 29 = 0.1$

$\therefore D_{min} = \sqrt{0.1} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ মিটার।

$\therefore$ কণা দুটি মিলিত হবে না এবং তাদের ন্যূনতম দূরত্ব $\frac{1}{\sqrt{10}}$ মিটার।

৫. $\vec{Q}$ এর ওপর $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|Q|}$

$\vec{P}\cdot\vec{Q} = (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4$

$|\vec{Q}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore$ লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{4}{7}$ একক

$\vec{Q}$ এর দিকে $\vec{P}$ এর উপাংশ (ভেক্টর উপাংশ) = (লম্ব অভিক্ষেপ) $\times \hat{Q}$

$= \frac{4}{7} \times \left(\frac{6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}}{7}\right) = \frac{4}{49}(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর সমতলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{n} = \pm\frac{\vec{P}\times\vec{Q}}{|P\times Q|}$

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(4-3) - \hat{j}(4-(-6)) + \hat{k}(-6-12) = \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$

$|\vec{P}\times\vec{Q}| = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (-18)^2} = \sqrt{1 + 100 + 324} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}$

$\therefore \hat{n} = \pm\frac{1}{5\sqrt{17}}(\hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k})$

$\therefore$ অভিক্ষেপ $\frac{4}{7}$, উপাংশ $\frac{4}{49}(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ এবং লম্ব একক ভেক্টর $\pm\frac{1}{5\sqrt{17}}(\hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k})$।

৬. ধরি, নির্ণেয় সমতলটি Π_1 এবং যে সমতলের ওপর এটি লম্ব তা হলো Π_2

Π_2 সমতলটি দুটি সরলরেখাকে ধারণ করে যাদের দিক নির্দেশক ভেক্টর যথাক্রমে:

$\vec{d_2} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{d_3} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

অতএব, Π_2 সমতলের অভিলম্ব ভেক্টর ($\vec{n_2}$) হবে এই দুটি দিক নির্দেশক ভেক্টরের ক্রস গুণফল।

$$\vec{n_2} = \vec{d_2}\times\vec{d_3} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(2-3) - \hat{j}(1-(-6)) + \hat{k}(-1-4) = -\hat{i} - 7\hat{j} - 5\hat{k}$

এখন, নির্ণেয় সমতলটি $L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$ রেখাটিকে ধারণ করে।

সুতরাং, Π_1 সমতলটি $A(1,-2,3)$ বিন্দুগামী এবং এর অভিলম্ব ভেক্টর ($\vec{n_1}$) রেখাটির দিক নির্দেশক ভেক্টর $\vec{d_1} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এর ওপর লম্ব হবে।

আবার, যেহেতু Π_1 সমতলটি Π_2 সমতলের ওপর লম্ব, তাই এদের অভিলম্বদ্বয়ও পরস্পর লম্ব হবে। অর্থাৎ, $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$

যেহেতু $\vec{n_1}$ ভেক্টরটি $\vec{d_1}$ এবং $\vec{n_2}$ উভয়ের ওপর লম্ব, তাই:

$$\vec{n_1} = \vec{d_1}\times\vec{n_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-15+28) - \hat{j}(-10+4) + \hat{k}(-14+3) = 13\hat{i} + 6\hat{j} - 11\hat{k}$

তাহলে, $A(1,-2,3)$ বিন্দুগামী এবং $\vec{n_1}$ অভিলম্ব বিশিষ্ট নির্ণেয় Π_1 সমতলের সমীকরণ হবে:

$13(x-1) + 6(y-(-2)) - 11(z-3) = 0$

$\Rightarrow 13(x-1) + 6(y+2) - 11(z-3) = 0$

$\Rightarrow 13x + 6y - 11z + 32 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমতলের সমীকরণ: $13x + 6y - 11z + 32 = 0$

৭. যেহেতু নির্ণেয় ভেক্টরটি xy সমতলে অবস্থিত, তাই এর z-উপাংশ শূন্য হবে।
ধরি, নির্ণেয় ভেক্টরটি $\vec{V} = x\hat{i} + y\hat{j}$
দেওয়া আছে, $\vec{V}$ ভেক্টরটি $\vec{A}$ এর ওপর লম্ব।
$\therefore \vec{V} \cdot \vec{A} = 0$
$\Rightarrow (x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) = 0$
$\Rightarrow x - 2y = 0 \ldots (i)$
আবার দেওয়া আছে, $|\vec{V}| = 3\sqrt{5}$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{5}$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 45$
(i) নং হতে x-এর মান বসিয়ে পাই,
$(2y)^2 + y^2 = 45$
$\Rightarrow 4y^2 + y^2 = 45$
$\Rightarrow 5y^2 = 45$
$\Rightarrow y = \pm 3$
y এর মান **(i)** নং এ বসালে: $x = \pm 6$
$\therefore$ নির্ণেয় ভেক্টরটি হলো $\pm(6\hat{i} + 3\hat{j})$।

৮. প্রদত্ত দ্বিপদী: $(x^2 + \frac{k}{x^3})^{10}$
ধরি, বিস্তৃতিটির $(r + 1)$ তম পদে x বর্জিত পদ এবং $(p + 1)$ তম পদে x^{10} বিদ্যমান।
সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{10}{r}(x^2)^{10-r}(\frac{k}{x^3})^r = \binom{10}{r}k^r x^{20-5r}$
x বর্জিত পদের জন্য, x এর ঘাত শূন্য হবে।
$\therefore 20 - 5r = 0 \Rightarrow r = 4$
x বর্জিত পদের মান $= \binom{10}{4}k^4 = 210k^4$
আবার, x^{10} এর সহগ নির্ণয়ের জন্য ঘাত 10 হবে।
$\therefore 20 - 5p = 10 \Rightarrow 5p = 10 \Rightarrow p = 2$
x^{10} এর সহগ $= \binom{10}{2}k^2 = 45k^2$
প্রশ্নমতে, x বর্জিত পদের মান $= 14 \times (x^{10}$ এর সহগ$)$
$\Rightarrow 210k^4 = 14 \times 45k^2 \Rightarrow 210k^4 = 630k^2$
$\Rightarrow k^2 = 3 \quad [$যেহেতু $k \neq 0]$
$\therefore k = \pm\sqrt{3}$
$\therefore$ k এর নির্ণেয় মান $\pm\sqrt{3}$।

৯. আমরা জানি, $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদ $T_{r+1} = \binom{n}{r}x^r$
সুতরাং, ৫ম, ৬ষ্ঠ ও ৭ম পদের সহগগুলো হলো যথাক্রমে $\binom{n}{4}, \binom{n}{5}$ এবং $\binom{n}{6}$
যেহেতু সহগগুলো সমান্তর প্রগমনে **(AP)** আছে, তাই:
$2 \cdot \binom{n}{5} = \binom{n}{4} + \binom{n}{6}$
$\Rightarrow 2 \cdot \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{n!}{4!(n-4)!} + \frac{n!}{6!(n-6)!}$
$\Rightarrow 12(n - 4) = 30 + (n - 4)(n - 5)$
$\Rightarrow 12n - 48 = 30 + n^2 - 9n + 20$
$\Rightarrow n^2 - 21n + 98 = 0 \Rightarrow (n - 7)(n - 14) = 0$
$\therefore n = 7$ অথবা $n = 14$
$\therefore$ n এর নির্ণেয় মান 7 অথবা 14।

১০. প্রদত্ত দ্বিপদী: $(2+3x)^n = 2^n(1+\frac{3x}{2})^n$

আমরা জানি, $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম এবং r তম পদের অনুপাত: $\left|\frac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \frac{n-r+1}{r}|y|$

এখানে $y = \frac{3x}{2}$ এবং $x = \frac{2}{3}$

$\therefore |y| = |\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}| = 1$

যেহেতু ৬ষ্ঠ এবং ৭ম পদ উভয়েই বৃহত্তম, এর অর্থ হলো ৬ষ্ঠ এবং ৭ম পদের সাংখ্যিক মান পরস্পর সমান এবং এরা অন্য সকল পদ অপেক্ষা বৃহত্তর। অর্থাৎ, $\left|\frac{T_7}{T_6}\right| = 1$

সূত্রানুসারে, $r = 6$ বসালে: $\frac{n-6+1}{6}|1| = 1$

$\Rightarrow n - 5 = 6 \Rightarrow n = 11$

$\therefore n$ এর নির্ণেয় মান 11।

১১. প্রদত্ত রাশিটিকে দ্বিপদীতে রূপান্তর করি: $(1+2x-3x^2)^5 = (1+x(2-3x))^5$

দ্বিপদী উপপাদ্য অনুযায়ী এর বিস্তৃতি: $= \sum_{r=0}^{5} \binom{5}{r} x^r(2-3x)^r$

আমাদের x^7 এর সহগ প্রয়োজন। যেহেতু x^r গুণ আকারে আছে, তাই $(2-3x)^r$ অংশ থেকে আমাদের x^{7-r} ঘাতের পদটি বের করতে হবে।

যেহেতু $(2-3x)^r$ এর সর্বোচ্চ ঘাত r, তাই $7-r \le r \Rightarrow r \ge 3.5$

অতএব, r এর সম্ভাব্য পূর্ণমানগুলো হলো $r = 4$ এবং $r = 5$

ক্ষেত্র ১: $r = 4$

পদটি হলো: $\binom{5}{4}x^4(2-3x)^4 = 5x^4(2-3x)^4$

এখান থেকে x^7 পেতে হলে $(2-3x)^4$ থেকে x^3 এর সহগ নিতে হবে।

$(2-3x)^4$ এ x^3 এর পদ: $\binom{4}{3}(2)^1(-3x)^3 = -216x^3$

$\therefore$ এখান থেকে x^7 এর সহগ $= 5 \times (-216) = -1080$

ক্ষেত্র ২: $r = 5$

পদটি হলো: $\binom{5}{5}x^5(2-3x)^5 = x^5(2-3x)^5$

এখান থেকে x^7 পেতে হলে $(2-3x)^5$ থেকে x^2 এর সহগ নিতে হবে।

$(2-3x)^5$ এ x^2 এর পদ: $\binom{5}{2}(2)^3(-3x)^2 = 720x^2$

$\therefore$ এখান থেকে x^7 এর সহগ $= 1 \times 720 = 720$

মোট সহগ $= (-1080) + 720 = -360$

$\therefore x^7$ এর সহগ -360।

১২. প্রদত্ত ধারাটিকে $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$ এর সাথে তুলনা করি।

১ম পদ: $nx = \frac{1}{2} \dots$ (i)

২য় পদ: $\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} \dots$ (ii)

(i) নং হতে পাই, $x = \frac{1}{2n}$। এই মানটি **(ii)** নং এ বসাই:

$\frac{n(n-1)}{2}(\frac{1}{2n})^2 = \frac{5}{16} \Rightarrow \frac{n-1}{8n} = \frac{5}{16} \Rightarrow 16n - 16 = 40n \Rightarrow n = -\frac{2}{3}$

n এর মান **(i)** নং এ বসালে: $x = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ ধারাটির যোগফল $S = (1+x)^n = (1-\frac{3}{4})^{-2/3} = (\frac{1}{4})^{-2/3} = 4^{2/3} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $2\sqrt[3]{2}$।

১৩. ধরি, $f(x) = (3x^2-5x+4)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{20}x^{20}$

আমাদের x এর অযুগ্ম ঘাতের সহগগুলোর সমষ্টি $(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19})$ নির্ণয় করতে হবে।

$f(x)$ এ $x = 1$ বসিয়ে পাই: $f(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{20} = (3-5+4)^{10} = 2^{10} \dots$ (i)

$f(x)$ এ $x = -1$ বসিয়ে পাই: $f(-1) = a_0 - a_1 + \dots + a_{20} = (3+5+4)^{10} = 12^{10} \dots$ (ii)

(i) নং হতে **(ii)** নং বিয়োগ করি:

$f(1) - f(-1) = 2(a_1 + a_3 + \dots + a_{19})$

$\Rightarrow a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = \frac{2^{10}-12^{10}}{2}$

$\therefore$ অযুগ্ম ঘাতের সহগগুলোর সমষ্টি $\frac{2^{10}-12^{10}}{2}$।

১৪. প্রদত্ত রাশি: $\frac{1+2x}{(1-2x)^3} = (1+2x)(1-2x)^{-3}$

আমরা জানি, $(1-y)^{-3}$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $T_{r+1} = \frac{(r+1)(r+2)}{2!}y^r$

এখানে $y = 2x$, তাই $(1-2x)^{-3}$ এর সাধারণ পদ $= \frac{(r+1)(r+2)}{2}(2x)^r$

পুরো রাশির বিস্তৃতি হলো: $(1+2x)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r+1)(r+2)}{2}(2x)^r$

এখান থেকে x^{10} পেতে হলে আমাদের দুটি অংশের সমষ্টি নিতে হবে:

i. 1 এর সাথে $(1-2x)^{-3}$ এর x^{10} পদের গুণফল।

ii. $2x$ এর সাথে $(1-2x)^{-3}$ এর x^9 পদের গুণফল।

অংশ ১: $(1-2x)^{-3}$ এ x^{10} এর সহগ ($r = 10$ এর জন্য):

$\frac{(10+1)(10+2)}{2}2^{10} = \frac{11\times12}{2} \times 1024 = 66 \times 1024 = 67584$

অংশ ২: $(1-2x)^{-3}$ এ x^9 এর সহগ ($r = 9$ এর জন্য):

$\frac{(9+1)(9+2)}{2}2^9 = \frac{10\times11}{2} \times 512 = 55 \times 512$

এই পদের সাথে $2x$ এর সহগ 2 গুণ হবে: $2 \times (55 \times 512) = 55 \times 1024 = 56320$

$\therefore x^{10}$ এর মোট সহগ $= 67584 + 56320 = 123904$

১৫. আমরা জানি, $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n$ **.....(i)**

সমীকরণটিকে x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ **(differentiate)** করে পাই:

$n(1+x)^{n-1} = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \cdots + nC_nx^{n-1}$ **.....(ii)**

আবার, আমরা **(i)** নং সমীকরণটিকে উল্টোভাবে লিখতে পারি:

$(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n$ **.....(iii)**

(ii) এবং **(iii)** নং সমীকরণ গুণ করে পাই:

$n(1+x)^{n-1} \times (1+x)^n = (C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1}) \times (C_0x^n + C_1x^{n-1} + \cdots + C_n)$

$\Rightarrow n(1+x)^{2n-1} = (C_1 + 2C_2x + \cdots + nC_nx^{n-1})(C_0x^n + C_1x^{n-1} + \cdots + C_n)$

উভয়পক্ষের x^{n-1} এর সহগ সমীকৃত করি।

ডানপক্ষে x^{n-1} পাওয়া যাবে যখন প্রথম অংশের rC_rx^{r-1} এর সাথে দ্বিতীয় অংশের C_rx^{n-r} গুণ করা হয়।

অর্থাৎ, ডানপক্ষে x^{n-1} এর সহগ $= 1 \cdot C_1 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot C_2 + \cdots + n \cdot C_n \cdot C_n$

$= 1 \cdot C_1^2 + 2 \cdot C_2^2 + \cdots + n \cdot C_n^2$

বামপক্ষে $n(1+x)^{2n-1}$ বিস্তৃতিতে x^{n-1} এর সহগ হলো $n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$

$= n \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(2n-1-(n-1))!} = n \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$

$\therefore 1 \cdot C_1^2 + 2 \cdot C_2^2 + 3 \cdot C_3^2 + \cdots + n \cdot C_n^2 = n \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$

১৬. দেওয়া আছে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে:

$T_3 = \binom{n}{2}x^2 = 84$ **.....(i)**

$T_4 = \binom{n}{3}x^3 = 280$ **.....(ii)**

$T_5 = \binom{n}{4}x^4 = 560$ **.....(iii)**

(ii) নং কে **(i)** নং দ্বারা ভাগ করে পাই:

$$\frac{\binom{n}{3}x^3}{\binom{n}{2}x^2} = \frac{280}{84} \Rightarrow \frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}}x = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{n-2}{3}x = \frac{10}{3}$$

$\Rightarrow (n-2)x = 10$ **.....(iv)**

(iii) নং কে **(ii)** নং দ্বারা ভাগ করে পাই:

$$\frac{\binom{n}{4}x^4}{\binom{n}{3}x^3} = \frac{560}{280} \Rightarrow \frac{\frac{n!}{4!(n-4)!}}{\frac{n!}{3!(n-3)!}}x = 2$$

$$\Rightarrow \frac{n-3}{4}x = 2$$

$\Rightarrow (n-3)x = 8$ **.....(v)**

(iv) নং কে **(v)** নং দ্বারা ভাগ করে পাই:

$$\frac{(n-2)x}{(n-3)x} = \frac{10}{8} \Rightarrow \frac{n-2}{n-3} = \frac{5}{4}$$

$\Rightarrow 4n - 8 = 5n - 15$

$\Rightarrow n = 7$

$n = 7$ এর মান **(iv)** নং সমীকরণে বসালে:

$(7-2)x = 10$

$\Rightarrow 5x = 10$

$\Rightarrow x = 2$

$\therefore n = 7$ এবং $x = 2$

১৭. প্রদত্ত দ্বিপদী $(x - \frac{1}{x})^{2n}$ এর সূচক একটি জোড় সংখ্যা $(2n)$।

সুতরাং এর মধ্যপদ একটিই হবে এবং তা হলো $(\frac{2n}{2} + 1)$ তম পদ বা $(n+1)$ তম পদ।

মধ্যপদ, $T_{n+1} = \binom{2n}{n}x^{2n-n}(-\frac{1}{x})^n = \binom{2n}{n}x^n\frac{(-1)^n}{x^n} = (-1)^n\binom{2n}{n}$

এখন, $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$

লবের $(2n)!$ কে আমরা জোড় ও বিজোড় সংখ্যার গুণফল আকারে ভাগ করতে পারি:

$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n-1) \cdot 2n$

$= [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)] \times [2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n]$

$= [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)] \times 2^n[1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n]$

$= [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)] \times 2^n \times n!$

এই মানটি মধ্যপদের সূত্রে বসিয়ে পাই:

$$T_{n+1} = (-1)^n\frac{[1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)]\cdot2^n\cdot n!}{n!n!}$$

$$= (-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}{n!} \cdot 2^n$$

$\therefore$ মধ্যপদটি হলো $\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}{n!}(-2)^n$

১৮. প্রদত্ত রাশিটিকে দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ ফর্মে নিয়ে আসি:

$(4+3x)^{-1/2} = [4(1+\frac{3x}{4})]^{-1/2} = 4^{-1/2}(1+\frac{3x}{4})^{-1/2} = \frac{1}{2}(1+\frac{3x}{4})^{-1/2}$

শর্ত নির্ণয়:

$(1+y)^n$ এর অসীম বিস্তৃতি অভিসারী **(valid)** হওয়ার শর্ত হলো $|y| < 1$।

সুতরাং এখানে, $|\frac{3x}{4}| < 1 \Rightarrow \frac{3}{4}|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{4}{3}$

$\therefore$ অভিসারী হওয়ার শর্ত: $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$

x^3 এর সহগ নির্ণয়:

অসীম বিস্তৃতির সাধারণ পদ $T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}y^r$

x^3 এর সহগ পাওয়ার জন্য $r = 3$ বসাতে হবে। এখানে $n = -1/2$ এবং $y = \frac{3x}{4}$।

$T_4 = \frac{1}{2}\left[\frac{(-1/2)(-1/2-1)(-1/2-2)}{3!}(\frac{3x}{4})^3\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{6}(\frac{27x^3}{64})\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{-15/8}{6}(\frac{27x^3}{64})\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{15}{48}\cdot\frac{27}{64}\right]x^3$

$= [-\frac{5}{16}\cdot\frac{27}{64}]x^3 = -\frac{135}{2048}x^3$

$\therefore$ অভিসারী হওয়ার শর্ত $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$ এবং x^3 এর সহগ $-\frac{135}{2048}$

১৯. আমরা জানি, কোনো বহুপদী **(Polynomial)** বা বিস্তৃতির সহগসমূহের সমষ্টি **(Sum of coefficients)** নির্ণয় করার জন্য উক্ত রাশিটির চলকগুলোর মান **1** বসাতে হয়।

১ম রাশি: $(\alpha x^2 - 5x + 3)^{27}$

এতে $x = 1$ বসালে সহগসমূহের সমষ্টি পাওয়া যায়:

$S_1 = (\alpha(1)^2 - 5(1) + 3)^{27} = (\alpha - 2)^{27}$

২য় রাশি: $(4x - \alpha y)^{27}$

এতে $x = 1, y = 1$ বসালে সহগসমূহের সমষ্টি পাওয়া যায়:

$S_2 = (4(1) - \alpha(1))^{27} = (4 - \alpha)^{27}$

প্রশ্নমতে, $S_1 = S_2$

$\Rightarrow (\alpha - 2)^{27} = (4 - \alpha)^{27}$

$\Rightarrow \alpha - 2 = 4 - \alpha$

$\Rightarrow 2\alpha = 6$

$\Rightarrow \alpha = 3$

$\therefore$ α এর নির্ণেয় মান 3

২০. প্রদত্ত রাশিটিকে দ্বিপদী সূচকের মাধ্যমে প্রকাশ করি:

$\frac{5x^2-3x+4}{(1-x)^3} = (5x^2 - 3x + 4)(1 - x)^{-3}$

আমরা জানি, $(1 - x)^{-3}$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $T_{r+1} = \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$

অতএব, সম্পূর্ণ রাশির বিস্তৃতি হলো:

$(5x^2 - 3x + 4) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$

$= 5x^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r - 3x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r + 4 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$

এই বিস্তৃতি থেকে x^n এর সহগ পেতে হলে আমাদের তিনটি অংশ থেকে যথাক্রমে x^{n-2}, x^{n-1} এবং x^n এর সহগগুলো নিতে হবে:

১ম অংশ ($5x^2$ এর সাথে গুণ): এখানে $r = n - 2$ বসালে সহগ হবে $5 \times \frac{(n-2+1)(n-2+2)}{2} = 5 \times \frac{(n-1)n}{2}$

২য় অংশ ($-3x$ এর সাথে গুণ): এখানে $r = n - 1$ বসালে সহগ হবে $-3 \times \frac{(n-1+1)(n-1+2)}{2} = -3 \times \frac{n(n+1)}{2}$

৩য় অংশ (4 এর সাথে গুণ): এখানে $r = n$ বসালে সহগ হবে $4 \times \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\therefore x^n$ এর মোট সহগ $= \frac{5n(n-1)}{2} - \frac{3n(n+1)}{2} + \frac{4(n+1)(n+2)}{2}$

$= \frac{1}{2}[5n^2 - 5n - 3n^2 - 3n + 4(n^2 + 3n + 2)]$

$= \frac{1}{2}[2n^2 - 8n + 4n^2 + 12n + 8]$

$= \frac{1}{2}[6n^2 + 4n + 8]$

$= 3n^2 + 2n + 4$

$\therefore x^n$ এর নির্ণেয় সহগ $3n^2 + 2n + 4$

Physics ২০০ নম্বর

২১. ধরি, পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে নিউট্রাল পয়েন্টের দূরত্ব x।

নিউট্রাল পয়েন্টে উভয় গ্রহের মহাকর্ষীয় তীব্রতা সমান: $\frac{GM_E}{x^2} = \frac{GM_M}{(d-x)^2}$

$\Rightarrow \frac{d-x}{x} = \sqrt{\frac{M_M}{M_E}} = \sqrt{\frac{6.42\times10^{23}}{5.97\times10^{24}}} \approx 0.3279$

$\Rightarrow x = \frac{d}{1+0.3279} = \frac{2.25\times10^{11}}{1.3279} \approx 1.6945 \times 10^{11}\,\text{m} \approx 1.6945 \times 10^{8}\,\text{km}$

শক্তি সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী, নিউট্রাল পয়েন্টে ন্যূনতম বেগে পৌঁছালে বেগ প্রায় শূন্য হয়:

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_E m}{R_E} - \frac{GM_M m}{d-R_E} = -\frac{GM_E m}{x} - \frac{GM_M m}{d-x}$

m বাতিল করে, $v^2 = 2GM_E\left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{x}\right) + 2GM_M\left(\frac{1}{d-R_E} - \frac{1}{d-x}\right)$

যেহেতু মঙ্গলের প্রভাব উভয় প্রান্তে R_E-এর তুলনায় নগণ্য, তাই মূলত $v \approx \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$

মান বসিয়ে, $v = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}}{6.4\times10^{6}}} \approx 1.1155 \times 10^{4}\,\text{ms}^{-1} \approx 11.16\,\text{kms}^{-1}$

সমীকরণে বস্তুর ভর m উভয় পক্ষ থেকে বাতিল হয়ে যায়, তাই ন্যূনতম আদিবেগ বস্তুর ভরের উপর নির্ভর করে না।

অতএব, $100\,\text{kg}$ ভরের বস্তুর জন্যও ন্যূনতম আদিবেগ $\approx 11.16\,\text{kms}^{-1}$ হবে।

২২. উভয় ভর থেকে মধ্যবিন্দুর দূরত্ব, $r = \frac{d}{2} = \frac{10^5}{2} = 5 \times 10^4\,\text{m}$

শক্তি সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী (অসীমে $K = 0$, $U = 0$):

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_1 m}{r} - \frac{GM_2 m}{r} = 0$

m বাতিল করে, $v = \sqrt{\frac{2G(M_1+M_2)}{r}}$

মান বসিয়ে, $v = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times(10^5+5\times10^6)}{5\times10^4}}$

$v = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times5.1\times10^6}{5\times10^4}} \approx \sqrt{1.3607 \times 10^{-8}}$

$v \approx 1.166 \times 10^{-4}\,\text{ms}^{-1}$

সমীকরণে বস্তুর ভর m বাতিল হয়ে যায়, তাই ন্যূনতম বেগ বস্তুর ভরের উপর নির্ভর করে না।

অতএব, $70\,\text{kg}$ ভরের বস্তুর জন্যও ন্যূনতম বেগ $\approx 1.166 \times 10^{-4}\,\text{ms}^{-1}$ হবে।

২৩. প্রাথমিক বিভব শক্তি, $E_0 = mgh_0$
প্রতিবার আঘাতে 25% শক্তি হারায়, তাই অবশিষ্ট থাকে 75%: $E_1 = 0.75\,mgh_0$
যেহেতু $E_1 = mgh_1$, তাই $h_1 = 0.75\,h_0 = 0.75 \times 10 = 7.5\,m$
প্রতিটি পরবর্তী **bounce**-এর উচ্চতা আগেরটির 0.75 গুণ, তাই উচ্চতাগুলো একটি **geometric progression** গঠন করে যার সাধারণ অনুপাত $r = 0.75$
মোট দূরত্ব, $S = h_0 + 2(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots) = h_0 + \frac{2h_1}{1-r}$
$S = h_0\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 10 \times \frac{1+0.75}{1-0.75} = 10 \times \frac{1.75}{0.25} = 10 \times 7$
$S = 70\,m$
অতএব, প্রথম **bounce**-এর পর বলটি 7.5 m উচ্চতায় উঠবে এবং মোট 70 m দূরত্ব অতিক্রম করবে।

২৪. কুয়ার মোট আয়তন, $V = \pi r^2 H = \pi \times 2^2 \times 14 = 56\pi \approx 175.93\,m^3$
পানির আয়তন = $\frac{3}{7} \times 175.93 \approx 75.40\,m^3$
মোট পানির ভর, $M = \rho V = 1000 \times 75.40 \approx 75398\,kg$
গড় উত্তোলন উচ্চতা, $h = \frac{H}{2} = 7\,m$
প্রথম মোটরের **input power,** $P_1 = 4 \times 746 = 2984\,W$
Useful power, $P_{1u} = 0.70 \times 2984 = 2088.8\,W$
Useful work, $W_1 = P_{1u} \times t_1 = 2088.8 \times 240 = 501312\,J$
$W_1 = m_1gh$ থেকে, $m_1 = \frac{501312}{9.8\times7} \approx 7308\,kg$
বাকি পানির ভর, $m_2 = 75398 - 7308 = 68090\,kg$
বাকি কাজ, $W_2 = m_2gh = 68090 \times 9.8 \times 7 \approx 4.671 \times 10^6\,J$
সময়, $t_2 = 6\,min = 360\,s$
Useful power, $P_{2u} = \frac{W_2}{t_2} = \frac{4.671\times10^6}{360} \approx 12975\,W$
Input power, $P_2 = \frac{P_{2u}}{0.60} \approx 21625\,W$
HP-তে, $P_2 = \frac{21625}{746} \approx 29.0\,HP$
অতএব, নতুন মোটরের ন্যূনতম ক্ষমতা ≈ 29 HP।

২৫. কর্ণের ছেদবিন্দু থেকে প্রতিটি কোণার দূরত্ব, $r = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} \approx 7.071\,m$
একটি ভরের জন্য বিভব, $V = -\frac{GM}{r}$
মোট বিভব, $V_{total} = -\frac{G}{r}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$
$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 2 + 3 + 4 + 5 = 14\,kg$
মান বসিয়ে, $V_{total} = -\frac{6.67\times10^{-11}\times14}{7.071}$
$V_{total} \approx -1.32 \times 10^{-10}\,Jkg^{-1}$

২৬. চারটি বস্তুর জন্য মোট জোড়ার সংখ্যা = $\frac{4\times3}{2} = 6$টি: $(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)$
মোট বিভব শক্তি, $U_f = -G\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}} + \frac{m_1m_4}{r_{14}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_2m_4}{r_{24}} + \frac{m_3m_4}{r_{34}}\right)$
মান বসিয়ে (একক $\times10^8\,kg^2m^{-1}$):
$\frac{m_1m_2}{r_{12}} = 3$, $\frac{m_1m_3}{r_{13}} \approx 2.667$, $\frac{m_1m_4}{r_{14}} = 2.5$, $\frac{m_2m_3}{r_{23}} = 2.4$, $\frac{m_2m_4}{r_{24}} = 2.5$, $\frac{m_3m_4}{r_{34}} \approx 2.857$
যোগফল $\approx 15.924 \times 10^8\,kg^2m^{-1} = 1.5924 \times 10^9\,kg^2m^{-1}$
$U_f = -6.67 \times 10^{-11} \times 1.5924 \times 10^9 \approx -0.1062\,J$
যেহেতু প্রাথমিক অবস্থায় $U_i = 0$ (বস্তুগুলো অসীম দূরত্বে), তাই যন্ত্রের করা কাজ, $W = U_f - U_i = U_f$
$W \approx -0.1062\,J$
ঋণাত্মক চিহ্ন নির্দেশ করে যে, মহাকর্ষ বল নিজেই ধনাত্মক কাজ করে বস্তুগুলোকে কাছে টেনে আনে, তাই যন্ত্রকে প্রকৃতপক্ষে ঋণাত্মক কাজ (প্রায় 0.1062 J শক্তি অপসারণ) করতে হয়।

২৭. ক) $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \cos^2 45^\circ = 0.5$

$g' = g - \omega^2 R \cos^2 \lambda = 9.8 - (7.27 \times 10^{-5})^2 \times 6.4 \times 10^6 \times 0.5$

$g' = 9.8 - 0.01691 \approx 9.783\ \text{ms}^{-2}$

খ) নতুন কৌণিক বেগ, $\omega' = 2\omega = 1.454 \times 10^{-4}\ \text{rads}^{-1}$

$g'_{new} = g - \omega'^2 R \cos^2 \lambda = 9.8 - (1.454 \times 10^{-4})^2 \times 6.4 \times 10^6 \times 0.5$

$g'_{new} = 9.8 - 0.0677 \approx 9.732\ \text{ms}^{-2}$

২৮. চাপ, $P = \rho_{Hg}\, g\, h = 13600 \times 9.8 \times 0.15 = 19992\ \text{Pa}$

প্রতি স্পন্দনে রক্তের আয়তন, $V = 80\ \text{cm}^3 = 8 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$

প্রতি স্পন্দনে কাজ, $W = P\,V = 19992 \times 8 \times 10^{-5} \approx 1.599\ \text{J}$

স্পন্দন হার = 85 বার/মিনিট = $\frac{85}{60} \approx 1.417$ বার প্রতি সেকেন্ড

গড় ক্ষমতা, $P_{avg} = W \times \frac{85}{60} = 1.599 \times 1.417$

$P_{avg} \approx 2.27\ \text{W}$

২৯. শক্তি সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী, $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$

$x = v\sqrt{\frac{m}{k}}$

মান বসিয়ে, $x = 4\sqrt{\frac{2}{800}} = 4 \times 0.05$

$x = 0.20\ \text{m} = 20\ \text{cm}$

৩০. বেগ, $v(t) = \frac{dx}{dt} = -t^2(3 \ln t + 1)$

ত্বরণ, $a(t) = \frac{dv}{dt} = -t(6 \ln t + 5)$

$a = 0$ বসালে, $\ln t = -\frac{5}{6} \Rightarrow t \approx 0.435\ \text{s}$, যেখানে $|v|$ একটি স্থানীয় সর্বোচ্চ মান নেয় ($\approx 0.28\ \text{ms}^{-1}$, অতি ক্ষুদ্র) এরপর v ঋণাত্মক হয়ে ক্রমাগত বাড়তে থাকে, তাই $|v|$-এর প্রকৃত সর্বোচ্চ মান **interval**-এর শেষপ্রান্ত $t = 3$ s-এ পাওয়া যায়

$t = 3$ s-এ, $v(3) = -9(3 \ln 3 + 1) = -9(3.296 + 1) \approx -38.66\ \text{ms}^{-1}$

সর্বোচ্চ গতিশক্তি, $KE_{max} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(38.66)^2$

$KE_{max} \approx 747.4m\ \text{J}$, যা $t = 3$ s সময়ে ঘটে।

৩১. শক্তি সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী, $\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R} = -\frac{GM}{r}$

$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}$

মান বসিয়ে, $\frac{1}{r} = \frac{1}{6.4\times10^6} - \frac{(5\times10^3)^2}{2\times6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}}$

$\frac{1}{r} = 1.5625 \times 10^{-7} - 3.139 \times 10^{-8} \approx 1.2486 \times 10^{-7}$

$r \approx 8.009 \times 10^6\ \text{m}$

উচ্চতা, $h = r - R = 8.009 \times 10^6 - 6.4 \times 10^6$

$h \approx 1.609 \times 10^6\ \text{m} \approx 1609\ \text{km}$

৩২. বৃত্তাকার কক্ষপথে, $K = \frac{GMm}{2r} \Rightarrow r = \frac{GMm}{2K}$

মান বসিয়ে, $r = \frac{6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}\times500}{2\times9\times10^9} \approx 1.106 \times 10^7\ \text{m}$

উচ্চতা, $h = r - R_E \approx 1.106 \times 10^7 - 6.4 \times 10^6 \approx 4.661 \times 10^6\ \text{m} \approx 4661\ \text{km}$

বৃত্তাকার কক্ষপথে, $U = -2K = -1.8 \times 10^{10}\ \text{J}$

মোট যান্ত্রিক শক্তি, $E = K + U = 9 \times 10^9 - 1.8 \times 10^{10} = -9 \times 10^9\ \text{J} = -9000\ \text{MJ}$

পৃষ্ঠে উপগ্রহটি স্থির থাকলে প্রাথমিক শক্তি, $E_i = -\frac{GMm}{R_E} \approx -3.111 \times 10^{10}\ \text{J}$

প্রয়োজনীয় কাজ, $W = E - E_i = -9 \times 10^9 - (-3.111 \times 10^{10})$

$W \approx 2.211 \times 10^{10}\ \text{J}$

৩৩. মহাকর্ষজ ত্বরণ, $g = \frac{GM}{R^2}$

$g_E = \frac{6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}}{(6.4\times10^6)^2} \approx 9.72\,ms^{-2}$

$g_M = \frac{6.67\times10^{-11}\times7.35\times10^{22}}{(1.74\times10^6)^2} \approx 1.62\,ms^{-2}$

$g_{Ma} = \frac{6.67\times10^{-11}\times6.42\times10^{23}}{(3.39\times10^6)^2} \approx 3.73\,ms^{-2}$

অনুপাত, $g_E : g_M : g_{Ma} \approx 9.72 : 1.62 : 3.73 \approx 6 : 1 : 2.30$

যেহেতু $h \propto \frac{1}{g}$: $\frac{h_M}{h_E} = \frac{g_E}{g_M} \approx 6.00$ (প্রায় ৬ গুণ, প্রদত্ত ফলাফলের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ)

$\frac{h_{Ma}}{h_E} = \frac{g_E}{g_{Ma}} \approx 2.61$ (প্রায় 2.4 গুণের কাছাকাছি, তাই ফলাফল যুক্তিসঙ্গত)

প্রাথমিক বেগ, $v_0 = \sqrt{2g_E h_E} = \sqrt{2\times9.72\times1.8} \approx 5.92\,ms^{-1}$

চাঁদে উচ্চতা, $h_M = \frac{v_0^2}{2g_M} \approx 10.8\,m$

মঙ্গলে উচ্চতা, $h_{Ma} = \frac{v_0^2}{2g_{Ma}} \approx 4.70\,m$

৩৪. যেহেতু $g' = 0$: $g = \omega^2 R\cos^2\lambda \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos^2\lambda}}$

$\cos^2 45° = 0.5$, তাই $\omega = \sqrt{\frac{9.8}{6.4\times10^6\times0.5}} = \sqrt{3.0625\times10^{-6}}$

$\omega \approx 1.75\times10^{-3}\,rads^{-1}$

একদিনের দৈর্ঘ্য, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1.75\times10^{-3}} \approx 3590\,s \approx 59.8$ মিনিট

দৃঢ় বস্তু হিসেবে পৃথিবীর প্রতিটি বিন্দুর ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক বেগ একই থাকে (শুধু ব্যাসার্ধ $R\cos\lambda$ ভিন্ন হয়), তাই ঐ স্থানের কৌণিক বেগও $\approx 1.75\times10^{-3}\,rads^{-1}$।

৩৫. যেহেতু $g' = 0$: $\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos^2\lambda}}$

$\cos^2 60° = 0.25$, তাই $\omega = \sqrt{\frac{9.8}{6.4\times10^6\times0.25}} = \sqrt{6.125\times10^{-6}} \approx 2.475\times10^{-3}\,rads^{-1}$

$60°$ অক্ষাংশে **tangential** বেগ, $v_{60} = \omega R\cos 60° = 2.475\times10^{-3}\times6.4\times10^6\times0.5$

$v_{60} \approx 7920\,ms^{-1} \approx 7.92\,kms^{-1}$

বিষুবরেখায় (একই ω ব্যবহার করে), $v_{eq} = \omega R = 2.475\times10^{-3}\times6.4\times10^6 \approx 15840\,ms^{-1}$

অনুপাত, $\frac{v_{60}}{v_{eq}} = \cos 60° = 0.5$

অর্থাৎ, $60°$ অক্ষাংশের বিন্দুর **tangential** বেগ বিষুবরেখার বিন্দুর বেগের অর্ধেক।

৩৬. শক্তি সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী, $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM}$

মান বসিয়ে, $\frac{1}{r} = \frac{1}{6.4\times10^6} - \frac{(8\times10^3)^2}{2\times6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}}$

$\frac{1}{r} = 1.5625\times10^{-7} - 8.036\times10^{-8} \approx 7.589\times10^{-8}$

$r \approx 1.318\times10^7\,m$

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $h = r - R \approx 1.318\times10^7 - 6.4\times10^6 \approx 6.777\times10^6\,m$

কাজ-শক্তি উপপাদ্য অনুযায়ী, মাধ্যাকর্ষণ বলের কাজ, $W_g = \Delta KE = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$

$W_g = -\frac{1}{2}\times2000\times(8\times10^3)^2$

$W_g \approx -6.40\times10^{10}\,J$

৩৭. বৃত্তাকার কক্ষপথে গতিশক্তি, $K = \frac{GMm}{2r} = \frac{6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}\times500}{2\times10^7}$

$K \approx 9.955\times10^9\,J$

নতুন গতিশক্তি, $K' = 1.5K \approx 1.493\times10^{10}\,J$

বিভব শক্তি, $U = -\frac{GMm}{r} \approx -1.991\times10^{10}\,J$

নতুন মোট শক্তি, $E' = K' + U \approx 1.493\times10^{10} - 1.991\times10^{10} \approx -4.98\times10^9\,J$

যেহেতু $E' < 0$, উপগ্রহটি এখনও পৃথিবীর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে আবদ্ধ থাকবে, অর্থাৎ পালিয়ে যাবে না

তবে নতুন গতিশক্তি বৃত্তাকার কক্ষপথের প্রয়োজনীয় শক্তির সমান নয়, তাই এটি একই বৃত্তাকার কক্ষপথে থাকতে পারবে না; এটি একটি উপবৃত্তাকার **(elliptical)** কক্ষপথে চলে যাবে।

৩৮. কুয়ার মোট আয়তন, $V = \pi r^2 H = \pi \times 1.5^2 \times 20 = 45\pi \approx 141.37\,m^3$
পানির আয়তন = $\frac{4}{5} \times 141.37 \approx 113.10\,m^3$
মোট পানির ভর, $M = \rho V = 1000 \times 113.10 \approx 113097\,kg$
গড় উত্তোলন উচ্চতা, $h = \frac{H+\frac{1}{5}H}{2} = \frac{20+4}{2} = 12\,m$
প্রথম মোটরের **input power,** $P_1 = 6 \times 746 = 4476\,W$**; useful power** $= 0.75 \times 4476 = 3357\,W$
প্রথম মোটরের **useful work,** $W_1 = 3357 \times 480 = 1611360\,J$ **(**$t_1 = 8\,min = 480\,s$**)**
$m_1 = \frac{W_1}{gh} = \frac{1611360}{9.8\times12} \approx 13701\,kg$
বাকি পানির ভর, $m_2 = 113097 - 13701 = 99396\,kg$
বাকি কাজ, $W_2 = m_2gh = 99396 \times 9.8 \times 12 \approx 1.1691 \times 10^7\,J$
সময়, $t_2 = 5\,min = 300\,s$**; useful power** $= \frac{1.1691\times10^7}{300} \approx 38970\,W$
Input power $= \frac{38970}{0.60} \approx 64950\,W$
HP-তে, $\frac{64950}{746} \approx 87.1\,HP$

৩৯. পলায়ন বেগ, $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}}{6.4\times10^6}} \approx 1.1155 \times 10^4\,ms^{-1}$
প্রথম ক্ষেত্রে গতিশক্তি, $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times (3000)^2 = 4.5 \times 10^9\,J$
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে গতিশক্তি, $K_2 = \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times (1.1155 \times 10^4)^2 \approx 6.222 \times 10^{10}\,J$
অনুপাত, $K_1 : K_2 = 4.5 \times 10^9 : 6.222 \times 10^{10} \approx 1 : 13.8$

৪০. যেহেতু M_2 ও M_3 সর্বদা M_1-এর বিপরীত পাশে থাকে, তাই M_1 থেকে M_3-এর দিক এবং M_2 থেকে কেন্দ্রের দিক একই সরলরেখায় থাকে; ফলে M_3-এর আকর্ষণও M_2-এর কেন্দ্রমুখী বলে যুক্ত হয়
M_2 ও M_3-এর মধ্যে দূরত্ব $= 2r$
কেন্দ্রমুখী বল সমীকরণ, $\frac{GM_1M_2}{r^2} + \frac{GM_2M_3}{(2r)^2} = \frac{M_2v^2}{r}$
M_2 বাতিল করে, $v^2 = \frac{G}{r}\left(M_1 + \frac{M_3}{4}\right)$
মান বসিয়ে, $v^2 = \frac{6.67\times10^{-11}}{5\times10^9}\left(8 \times 10^{25} + \frac{2\times10^{25}}{4}\right)$
$v^2 = 1.334 \times 10^{-20} \times 8.5 \times 10^{25} \approx 1.134 \times 10^6$
$v \approx 1065\,ms^{-1} \approx 1.065\,kms^{-1}$
কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{v}{r} = \frac{1065}{5\times10^9} \approx 2.13 \times 10^{-7}\,rads^{-1}$
সময়কাল, $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2.95 \times 10^7\,s \approx 341.5$ দিন

Chemistry

২০০ নম্বর

৪১. প্রদত্ত, $r_n = 0.529\frac{n^2}{Z} = 2.116$
অতএব, $\frac{n^2}{Z} = 4$
আবার, $-13.6\frac{Z^2}{n^2} = -13.6$
অর্থাৎ, $\frac{Z^2}{n^2} = 1 \Rightarrow Z = n$
দুটি সম্পর্ক মিলিয়ে, $\frac{n^2}{n} = 4 \Rightarrow n = 4$
তাই, $Z = 4$
অতএব আয়নটি এক ইলেকট্রন বিশিষ্ট $Z = 4$ প্রজাতি, Be^{3+}।
ভূমি অবস্থায়র শক্তি, $E_1 = -13.6(4)^2 = -217.6\,eV$
প্রাথমিক শক্তি $-13.6\,eV$। তাই নির্গত ফোটন এর শক্তি, $\Delta E = (-13.6) - (-217.6) = 204.0\,eV$
নির্গত ফোটন এর শক্তি $204\,eV$।

৪২. **X**-এর জন্য, $\bar{\nu}_X = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25}\right) = \frac{21}{100}R_H$
প্রশ্নমতে, $\bar{\nu}_Y = 1.1875\bar{\nu}_X = 1.1875 \times \frac{21}{100}R_H = 0.249375R_H$
রেখা **Y**-এর জন্য, $\bar{\nu}_Y = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$
তাই, $\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} = 0.249375$
অর্থাৎ, $\frac{1}{n^2} = 0.000625 \Rightarrow n^2 = 1600 \Rightarrow n = 40$
সুতরাং রেখা **Y**-এর ঊর্ধ্ব স্তর $n = 40$।
যেহেতু $\bar{\nu}_Y > \bar{\nu}_X$ এবং $\lambda = \frac{1}{\nu}$, তাই $\lambda_Y < \lambda_X$, অর্থাৎ রেখা **Y**-এর তরঙ্গদৈর্ঘ্য কম।
উভয় রেখা এর নিম্ন স্তর $n = 2$, তাই উভয়ই **Balmer** সিরিজ এর অন্তর্ভুক্ত।

৪৩. এটি ক্রোমিয়াম এর ক্ষেত্র।
প্রত্যাশিত: $[Ar]3d^4 4s^2$
কিন্তু প্রকৃত: $[Ar]3d^5 4s^1$
কারণ d^5 **half-filled** অবস্থায় পাঁচটি **d**-অরবিটালে পাঁচটি ইলেকট্রন পৃথকভাবে সমান্তরাল স্পিন নিয়ে থাকে। এতে **exchange stabilization** ও **symmetric** বণ্টন এর কারণে অতিরিক্ত স্থায়িত্ব পাওয়া যায়।
দুইটি ইলেকট্রন অপসারণে প্রথমে 4s ইলেকট্রন এবং পরে একটি 3d ইলেকট্রন বের হবে।
তাই, $Cr^{2+} = [Ar]3d^4$।

৪৪. একটি বিভাজন এর শক্তি, $200\,MeV = 200 \times 10^6\,eV$
$E = 200 \times 10^6 \times 1.602 \times 10^{-19} = 3.204 \times 10^{-11}\,J$
এক মোল এর জন্য, $E = (3.204 \times 10^{-11})(6.022 \times 10^{23}) = 1.93 \times 10^{13}\,J$
একটি নিউট্রন যদি একটি বিভাজন ঘটায় এবং সেখান থেকে তিনটি নিউট্রন উৎপন্ন হয়, তবে আদর্শভাবে পরবর্তী **generation**-এ 3টি, তার পরেরটিতে $3^2 = 9$টি, তারপর $3^3 = 27$টি ইত্যাদি বিভাজন ঘটতে পারে।
অর্থাৎ নিউট্রন সংখ্যা জ্যামিতিক **progression**-এ বাড়তে পারে। বাস্তবে সব নিউট্রন বিভাজন ঘটায় না; কিন্তু পর্যাপ্ত **effective** নিউট্রন থাকলে শৃঙ্খল বিক্রিয়া বজায় থাকে।

৪৫. অধঃক্ষেপণ শুরুতে, $AgCl(s) \rightleftharpoons Ag^+ + Cl^-$
$K_{sp} = [Ag^+][Cl^-]$
$[Cl^-] = \frac{1.7\times10^{-10}}{2.0\times10^{-3}} = 8.5 \times 10^{-8}\,M$
এখন, $[Cl^-] = 1.0 \times 10^{-3}\,M$ হলে,
$[Ag^+] = \frac{1.7\times10^{-10}}{10^{-3}} = 1.7 \times 10^{-7}\,M$
অর্থাৎ অধিকাংশ Ag^+ অধঃক্ষেপ হয়ে গেছে, কিন্তু Ca^{2+} দ্রবণে থেকে যাচ্ছে। এই ভিন্ন অধঃক্ষেপণ আচরণ এর জন্য নির্বাচনী পৃথকীকরণ সম্ভব।

৪৬. আয়নিক কঠিন পদার্থ দ্রবীভূত হওয়ার সময় দুটি প্রধান **energetic** প্রক্রিয়া বিবেচ্য।
প্রথমত কেলাস জালক ভেঙে আয়ন আলাদা করতে শক্তি লাগে। জালক শক্তি যত বেশি, কেলাস ভাঙা তত কঠিন।
দ্বিতীয়ত পৃথক আয়ন গুলো পানি **molecule** দ্বারা **hydrated** হলে শক্তি নির্গত হয়। আর্দ্রায়ন শক্তি যত বেশি ঋণাত্মক, আর্দ্রায়ন তত অনুকূল।
তাই দ্রবীভবন এর সামগ্রিক সুবিধা নির্ভর করে জালক ভাঙার শক্তি ও আর্দ্রায়ন এ প্রাপ্ত শক্তির প্রতিযোগিতার উপর।
ছোট আয়ন এর আধান ঘনত্ব বেশি হওয়ায় আর্দ্রায়ন সাধারণত শক্তিশালী; কিন্তু একই সঙ্গে জালক ও শক্তিশালী হতে পারে।
তাই শুধু আয়নিক আকার বা শুধু জালক শক্তি দেখে চূড়ান্ত দ্রাব্যতা নির্ধারণ করা যায় না।

৪৭. বণ্টন সহগ হলো সাম্যাবস্থা অবস্থায় দুটি অমিশ্রণীয় **phase**-এ দ্রব এর ঘনমাত্রা এর অনুপাত। নির্দিষ্ট তাপমাত্রা এ এটি দ্রব এর দুই দ্রাবক এর প্রতি আপেক্ষিক আসক্তি নির্দেশ করে।
প্রতিটি নিষ্কাশন এর পরে জলীয় দশা এ দ্রব এর একটি নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ থেকে যায়। দ্বিতীয় তাজা দ্রাবক **portion** আবার সেই অবশিষ্ট দ্রব এর একটি ভগ্নাংশ সরিয়ে নেয়। তাই ক্রমিক নিষ্কাশন এ অবশিষ্ট ভগ্নাংশ গুণিতকভাবে কমতে থাকে, ফলে দুই ভাগে নিষ্কাশন করলে অপসারিত দ্রব এর পরিমাণ বেশি হয়।
উপযুক্ত নিষ্কাশন দ্রাবক এর ক্ষেত্রে সাধারণত প্রয়োজন: মূল দ্রাবক এর সাথে প্রায় অমিশ্রণীয় হওয়া, এবং **target** দ্রব এর জন্য বণ্টন সহগ যথেষ্ট বেশি হওয়া।

৪৮. $PbI_2 \rightleftharpoons Pb^{2+} + 2I^-$
$K_{sp} = [Pb^{2+}][I^-]^2$
তাই, $[I^-] = \sqrt{\frac{4.0\times10^{-9}}{1.0\times10^{-3}}} = \sqrt{4.0\times10^{-6}} = 2.0\times10^{-3}\ M$
এখন 5.0×10^{-3} M আয়োডাইড হলে,
$Q = (10^{-3})(5\times10^{-3})^2 = 2.5\times10^{-8}$
যেহেতু, $Q > K_{sp}$, তাই দ্রবণ অতিপৃক্ত এবং অধঃক্ষেপণ ঘটবে।

৪৯. হাইড্রোজেন সদৃশ প্রজাতি এর একই স্থানান্তর এর জন্য, $\bar{\nu} \propto Z^2 \Rightarrow \lambda \propto \frac{1}{Z^2}$
তাই, $Z^2 = \frac{486.2}{121.6} \approx 4 \Rightarrow Z = 2$
অতএব আয়ন হলো He^+।
ব্যাসার্ধ, $r_4 = 0.529\frac{16}{2} = 4.232\ \mathring{A}$
n = 4-এর শক্তি, $E_4 = -13.6\frac{2^2}{4^2} = -3.4\ eV$
তাই আয়নীভবন শক্তি = 3.4 eV।

৫০. প্রথমে নমুনা কে ছোট ছোট অংশে ভাগ করে **parallel** নিশ্চিতকারী পরীক্ষা করা ভালো।
Fe^{3+}-এর জন্য থায়োসায়ানেট বিকারক দিলে লাল **complex**/বর্ণ পাওয়া যায়। ফেরোসায়ানাইড এর সাথেও বৈশিষ্ট্যসূচক নীল অধঃক্ষেপ পাওয়া যায়।
Fe^{2+}-এর ক্ষেত্রে ফেরিসায়ানাইড বিকারক বৈশিষ্ট্যসূচক নীল অধঃক্ষেপ দেয়, কিন্তু থায়োসায়ানেট পরীক্ষা এ Fe^{3+}-এর মতো লাল **response** পাওয়া যায় না।
Al^{3+} ও Zn^{2+} উভয়েই NH_4OH-এর সাথে সাদা হাইড্রক্সাইড দিতে পারে এবং উভধর্মী হওয়ায় NaOH-এ দ্রবীভূত হতে পারে। তাই এখানেই সিদ্ধান্ত দেওয়া যাবে না।
Al^{3+}-এর সোডিয়াম অ্যালুমিনেট দ্রবণ থেকে NH_4Cl দিয়ে $Al(OH)_3$ পুনঃপ্রাপ্তি করা যায়।
Zn^{2+}-এর জন্য ফেরোসায়ানাইড নিশ্চিতকারী অধঃক্ষেপ ব্যবহার করা যায়।
একটি **single** পর্যবেক্ষণ একই রকম আচরণ দেখানো একাধিক আয়নের কারণে বিভ্রান্তিকর হতে পারে। তাই নিশ্চিতকারী **cross-check** প্রয়োজন।

৫১. শূন্যস্থান এ সব তড়িৎচুম্বকীয় বিকিরণ এর বেগ, $c = \lambda\nu$
বেগুনি এর তরঙ্গদৈর্ঘ্য লাল এর তুলনায় ছোট। তাই বেগুনি এর কম্পাঙ্ক বেশি।
ফোটন শক্তি, $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$
অতএব তরঙ্গদৈর্ঘ্য কম হলে শক্তি বেশি।
তাই বেগুনি ফোটন এর শক্তি লাল ফোটন এর চেয়ে বেশি।

৫২. $AB \rightleftharpoons A^+ + B^-$
$K_{sp} = s^2 = (2.0\times10^{-5})^2 = 4.0\times10^{-10}$

৫৩. **Ratio:** $\frac{10000}{1} = 10000 : 1$
অধিকাংশ কণা খুব কম **deflection** নিয়ে চলে যাওয়ায় বোঝা যায় পরমাণুর অধিকাংশ স্থান ফাঁকা।
খুব অল্প কণা বড় **angle**-এ বিচ্যুত হওয়া নির্দেশ করে যে **positive** আধান ও অধিকাংশ ভর অত্যন্ত ক্ষুদ্র অঞ্চলে **concentrated**।
170°-এ **back**-বিক্ষেপণ দেখায় যে পরমাণুর কেন্দ্রে অত্যন্ত ক্ষুদ্র কিন্তু ঘন ও ধনাত্মক নিউক্লিয়াস আছে। **Diffuse positive**-আধান মডেলেই ফলাফল সহজে ব্যাখ্যা করতে পারে না।

৫৪. দৃশ্যমান হাইড্রোজেন রেখা গুলো যেগুলো n = 2-এ শেষ হয় সেগুলো **Balmer** সিরিজ।
ফোটন শক্তি, $E \propto \frac{1}{\lambda}$
তাই **increasing** শক্তি এর ক্রম: P < Q < R < S (অর্থাৎ 656.3 nm-এর শক্তি সর্বনিম্ন এবং 410.2 nm-এর সর্বাধিক)।
উচ্চ n-এ শক্তিস্তর গুলো পরস্পরের কাছাকাছি হতে থাকে। তাই ক্রমিক উর্ধ্ব স্তর থেকে n = 2-এ স্থানান্তর এর শক্তি পার্থক্য ক্রমে ছোট হয়। ফলে বর্ণালী রেখা গুলো সিরিজ **limit**-এর কাছে ঘন হয়ে আসে।

৫৫. অধঃক্ষেপণ শুরু হওয়ার মুহূর্তে, $Q_{sp} \approx K_{sp}$
$K_{sp} \approx [M][X] = (2.0 \times 10^{-4})(8.0 \times 10^{-7}) = 1.6 \times 10^{-10}$
প্রথম চিহ্ন এর সময় দ্রবণ **saturation threshold**-এ থাকে, অর্থাৎ আয়ন গুণফল প্রায় K_{sp}-এর সমান।
ভারী অধঃক্ষেপ পর্যায় এ ইতোমধ্যে উল্লেখযোগ্য পরিমাণ আয়ন দ্রবণ থেকে সরে গেছে; প্রাথমিক ঘনমাত্রা আর সাম্যাবস্থা **free**-আয়ন ঘনমাত্রা এর সমান নয়। তাই এই পর্যায় এ **simple** গুণফল ব্যবহার করলে ভুল হবে।

৫৬. প্রথম অংশে শীর্ষ তাপমাত্রা প্রায় 78–79°C স্থির থাকছে, অর্থাৎ **more** উদ্বায়ী উপাদান বেশি পরিমাণে পাতিত হওয়া করছে।
মধ্যবর্তী অংশে তাপমাত্রা ধীরে বাড়ছে; এখানে দুই উপাদানের মিশ্রণ পাতিত হওয়া হচ্ছে।
শেষে তাপমাত্রা 100°C-এর দিকে যাওয়ায় **less** উদ্বায়ী উপাদানের ভগ্নাংশ বৃদ্ধি পাচ্ছে।
দুই স্ফুটনাঙ্ক তুলনামূলক কাছাকাছি হওয়ায় সরল পাতন এ **middle** ভগ্নাংশ এ **overlap** বেশি থাকবে। আংশিক পাতন স্তম্ভ পুনরাবৃত্ত **vaporization-condensation** ঘটিয়ে **low-boiling** উপাদানকে বাষ্প এ **enrich** করবে এবং পৃথকীকরণ উন্নত করবে।

৫৭. বোর মডেলের গুরুত্বপূর্ণ সাফল্য হলো হাইড্রোজেন পরমাণুর স্থিতিশীলতা ব্যাখ্যা করা এবং হাইড্রোজেন রেখা বর্ণালী এর তরঙ্গদৈর্ঘ্য সম্পর্ক সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা।
কিন্তু এর সীমাবদ্ধতা: এটি মূলত হাইড্রোজেন ও হাইড্রোজেন সদৃশ প্রজাতি এর জন্যই কার্যকর।
ইলেকট্রনের নির্দিষ্ট বৃত্তাকার কক্ষপথ ধারণা ইলেকট্রনের তরঙ্গ ধর্ম এর সাথে পূর্ণ সামঞ্জস্যপূর্ণ নয়।
এটি বহু ইলেকট্রন পরমাণুর বর্ণালী ব্যাখ্যায় ব্যর্থ, এবং বর্ণালী রেখা এর **finer details** ও **electron** সম্ভাব্যতা বণ্টন ব্যাখ্যা করে না, এমনকি অরবিটালের **shape** ও **quantum-number**-ভিত্তিক ত্রিমাত্রিক বর্ণনাও দেয় না।
তাই তরঙ্গ অপেক্ষক ও সম্ভাব্যতা ভিত্তিক কোয়ান্টাম বলবিজ্ঞান মডেল প্রয়োজন হয়।

৫৮. প্রথম বিক্রিয়া এ ভরসংখ্যা অপরিবর্তিত, কিন্তু পারমাণবিক সংখ্যা 89 থেকে 90 হয়েছে। এটি β^--ক্ষয়; নির্গত কণা: $^{0}_{-1}e$ (বা β^-)।
দ্বিতীয় বিক্রিয়া এ ভর-**number balance:**
বামদিকে: $235 + 1 = 236$
ডানদিকে: $141 + 92 + x = 233 + x$
তাই, $233 + x = 236 \Rightarrow x = 3$
প্রথমটি স্বতঃস্ফূর্ত তেজস্ক্রিয় β^--ক্ষয়। দ্বিতীয়টি আপতিত নিউট্রন দ্বারা ^{235}U-এর ভারী নিউক্লিয়াস বিভক্ত হয়ে **lighter** নিউক্লিয়াস ও নিউট্রন উৎপন্ন করার বিভাজন বিক্রিয়া।

৫৯. দ্রবণের বর্ণ ঘনমাত্রা, অপদ্রব্য, আলোকসজ্জা এবং **oxidation**-এর কারণে পরিবর্তিত হতে পারে। Fe^{2+} বাতাসে আংশিকভাবে জারিত হওয়া হয়ে Fe^{3+}-এও রূপান্তরিত হতে পারে। তাই শুধু প্রাথমিক বর্ণ নির্ভরযোগ্য নয়।
ফেরিসায়ানাইড/ফেরোসায়ানাইড বিকারক ব্যবহার করলে বৈশিষ্ট্যসূচক নীল অধঃক্ষেপ এর পার্থক্য দেখা যায়।
এছাড়া থায়োসায়ানেট বিকারক Fe^{3+}-এর সাথে বৈশিষ্ট্যসূচক **blood**-লাল বর্ণ দেয়, যা Fe^{2+}-এর ক্ষেত্রে একইভাবে পাওয়া যায় না।
একাধিক নিশ্চিতকারী পরীক্ষা ব্যবহার করলে মিথ্যা শনাক্তকরণ কমে।

৬০. অবশিষ্ট ভগ্নাংশ, $f = \frac{V_w}{V_w + K_D V_o}$
প্রদত্ত, $0.40 = \frac{100}{100 + 3V_o}$
$0.4(100 + 3V_o) = 100$
$40 + 1.2V_o = 100$
$1.2V_o = 60 \Rightarrow V_o = 50\,mL$