Mathematics

২০০ নম্বর

১. দর্পণের অভিলম্ব বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{u} = \frac{\vec{n}}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

প্রতিফলিত রশ্মির ভেক্টর $\vec{w}$ হলে, ভেক্টর প্রতিফলনের সূত্রানুসারে:

$\vec{w} = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \hat{u})\hat{u}$

এখানে, $\vec{v} \cdot \hat{u} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \frac{2-1+1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

মান বসিয়ে পাই,

$\vec{w} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - \frac{4}{3}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$\Rightarrow \vec{w} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{7}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$

প্রতিফলিত রশ্মির মান, $|\vec{w}| = \frac{1}{3}\sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{54}}{3} = \sqrt{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $\hat{w} = \frac{\vec{w}}{|w|} = \frac{1}{3\sqrt{6}}(2\hat{i} - 7\hat{j} - \hat{k})$

২. প্রথমে $A(2, -1, 3)$ বিন্দুর সাপেক্ষে বলটির টর্ক $\vec{M}_A$ নির্ণয় করি:

অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = \overrightarrow{AP} = -\hat{i} - \hat{k}$

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 2\hat{k}$$

অক্ষের দিক ভেক্টর, $\overrightarrow{AB} = \hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{26}}(\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

অক্ষের সাপেক্ষে টর্কের উপাংশ (স্কেলার মান) $= \vec{M}_A \cdot \hat{u}$

$= \frac{2(1) - 7(3) - 2(-4)}{\sqrt{26}} = \frac{2 - 21 + 8}{\sqrt{26}} = \frac{-11}{\sqrt{26}}$

$\therefore$ টর্কের উপাংশ $-\frac{11}{\sqrt{26}}$ একক।

৩. OA রেখার দিক নির্দেশক ভেক্টর, $\vec{d}_1 = \overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$

BC রেখার দিক নির্দেশক ভেক্টর, $\vec{d}_2 = \overrightarrow{BC} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

রেখাদ্বয়ের উভয়ের ওপর লম্ব ভেক্টর, $\vec{n} = \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$

লম্ব ভেক্টরের মান, $|\vec{n}| = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$

রেখাদ্বয়ের নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয় হলো $O(0, 0, 0)$ এবং $B(0, 1, 2)$।

এদের সংযোজক ভেক্টর, $\overrightarrow{OB} = \hat{j} + 2\hat{k}$

ন্যূনতম দূরত্ব, $D = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|1 - 10|}{\sqrt{30}} = \frac{9}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{30}}{10}$

$\therefore$ ন্যূনতম দূরত্ব $\frac{3\sqrt{30}}{10}$ একক।

৪. ধরি, নির্ণেয় ভেক্টর $\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{x} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -z\hat{i} + z\hat{j} + (x-y)\hat{k}$$

প্রদত্ত সমীকরণ: $\vec{x} \times \vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$

$\Rightarrow (x-z)\hat{i} + (y+z)\hat{j} + (x-y+z)\hat{k} = 0\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}$

উভয়পাশের সহগ সমীকৃত করে পাই:

$x - z = 0 \Rightarrow x = z$ **.....(i)**

$y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z$ **.....(ii)**

$x - y + z = 1$ **.....(iii)**

(i) ও **(ii)** নং হতে x ও y এর মান **(iii)** নং এ বসিয়ে পাই:

$z - (1-z) + z = 1 \Rightarrow 3z - 1 = 1 \Rightarrow z = \frac{2}{3}$

$\therefore x = \frac{2}{3}$ এবং $y = \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভেক্টর $\vec{x} = \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

৫. ১ম সমতলের অভিলম্ব ভেক্টর, $\vec{n_1} = (\hat{i} + \hat{j}) \times (\hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

২য় সমতলের অভিলম্ব ভেক্টর, $\vec{n_2} = (\hat{k} + \hat{i}) \times (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -\hat{i} + \hat{k}$

সমতলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|n_1||n_2|}$

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (1)(-1) + (-1)(0) + (1)(1) = 0$

যেহেতু অভিলম্ব ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণফল শূন্য, তাই সমতলদ্বয় পরস্পর লম্ব।

$\therefore$ মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90^\circ$ বা $\frac{\pi}{2}$

৬. t সময়ে কণা দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব ভেক্টর,

$\vec{d}(t) = \vec{r_A}(t) - \vec{r_B}(t) = (10 - 3t)\hat{i} + (2t - 5)\hat{j}$

মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গ, $D^2 = (10-3t)^2 + (2t-5)^2 = 13t^2 - 80t + 125$

দূরত্ব ন্যূনতম হওয়ার শর্তানুসারে, $\frac{d(D^2)}{dt} = 0$

$\Rightarrow 26t - 80 = 0 \Rightarrow t = \frac{40}{13}$

$t = \frac{40}{13}$ বসালে ন্যূনতম দূরত্বের বর্গ,

$D^2_{min} = 13\left(\frac{40}{13}\right)^2 - 80\left(\frac{40}{13}\right) + 125 = \frac{25}{13}$

$\therefore$ ন্যূনতম দূরত্ব $D_{min} = \sqrt{\frac{25}{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$ একক।

৭. ধরি, বিস্তৃতিটির $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত।

সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{15}{r}(2x^2)^{15-r}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)^r = \binom{15}{r}2^{15-r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r x^{30-5r}$

পদটি x বর্জিত হওয়ার শর্তানুসারে, x এর ঘাত শূন্য হবে।

$\therefore 30 - 5r = 0 \Rightarrow r = 6$

সুতরাং, ৭ম পদটি x বর্জিত পদ।

x বর্জিত পদের মান $= \binom{15}{6}2^9\left(-\frac{1}{3}\right)^6 = 5005 \times 512 \times \frac{1}{729} = \frac{2562560}{729}$

$\therefore$ পদটি ৭ম পদ এবং এর মান $\frac{2562560}{729}$

৮. $(1+px)^{20}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা ২১ (বিজোড়)।
এর মধ্যপদ একটি: $T_{11} = \binom{20}{10}(px)^{10}$
$\therefore$ এর সহগ $= \binom{20}{10}p^{10}$
$(1-px)^{22}$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা ২৩ (বিজোড়)।
এর মধ্যপদ একটি: $T_{12} = \binom{22}{11}(-px)^{11}$
$\therefore$ এর সহগ $= -\binom{22}{11}p^{11}$
প্রশ্নমতে, সহগদ্বয় পরস্পর সমান:
$\binom{20}{10}p^{10} = -\binom{22}{11}p^{11}$
$\Rightarrow p = -\frac{\binom{20}{10}}{\binom{22}{11}} = -\frac{11\times11}{22\times21} = -\frac{121}{462} = -\frac{11}{42}$
$\therefore$ p এর নির্ণেয় মান $-\frac{11}{42}$

৯. সাধারণ পদ $T_{r+1} = \binom{n}{r}x^r$
৯ম, ১০ম ও ১১তম পদের সহগগুলো হলো যথাক্রমে $\binom{n}{8}$, $\binom{n}{9}$ এবং $\binom{n}{10}$
যেহেতু সহগগুলো সমান্তর প্রগমনে (AP) আছে, তাই:
$2\cdot\binom{n}{9} = \binom{n}{8} + \binom{n}{10}$
উভয়পক্ষকে $\binom{n}{9}$ দ্বারা ভাগ করে পাই:
$2 = \frac{9}{n-8} + \frac{n-9}{10}$
$\Rightarrow 20(n-8) = 90 + (n-9)(n-8)$
$\Rightarrow 20n - 160 = n^2 - 17n + 162$
$\Rightarrow n^2 - 37n + 322 = 0$
$\Rightarrow (n-14)(n-23) = 0$
$\therefore n = 14$ অথবা $n = 23$

১০. প্রদত্ত দ্বিপদী: $(2^{1/2} + 3^{1/3})^{12}$
বিস্তৃতির সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{12}{r}2^{6-\frac{r}{2}}3^{\frac{r}{3}}$
পদটি মূলদ হওয়ার জন্য $\frac{r}{2}$ এবং $\frac{r}{3}$ উভয়কেই পূর্ণসংখ্যা হতে হবে।
সুতরাং r কে অবশ্যই 2 এবং 3 এর ল.সা.গু অর্থাৎ 6 এর গুণিতক হতে হবে।
এখানে $0 \le r \le 12$
$\therefore$ r এর সম্ভাব্য মানগুলো হলো: $0, 6, 12$
$r = 0$: পদ $= \binom{12}{0}2^6\cdot3^0 = 64$
$r = 6$: পদ $= \binom{12}{6}2^3\cdot3^2 = 924\times8\times9 = 66528$
$r = 12$: পদ $= \binom{12}{12}2^0\cdot3^4 = 81$
মূলদ পদসমূহের যোগফল $= 64 + 66528 + 81 = 66673$
$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল 66673

১১. প্রথম দিক থেকে ৭ম পদ $T_7 = \binom{n}{6}(\sqrt[3]{2})^{n-6}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6 = \binom{n}{6}2^{\frac{n-6}{3}}3^{-2}$
শেষের দিক থেকে ৭ম পদ, অর্থাৎ পদগুলো স্থানবিনিময় করে প্রথম দিক থেকে ৭ম পদ:
$T_7' = \binom{n}{6}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{n-6}(\sqrt[3]{2})^6 = \binom{n}{6}3^{-\frac{n-6}{3}}2^2$
প্রশ্নমতে, $\frac{T_7}{T_7'} = \frac{1}{6}$
$\Rightarrow 2^{\frac{n-6}{3}-2}\cdot3^{-2+\frac{n-6}{3}} = \frac{1}{6}$
$\Rightarrow 6^{\frac{n-12}{3}} = 6^{-1}$
$\Rightarrow \frac{n-12}{3} = -1 \Rightarrow n = 9$
$\therefore$ n এর নির্ণেয় মান 9

১২. $5^{99} = 5 \cdot 5^{98} = 5 \cdot (5^2)^{49} = 5 \cdot (25)^{49} = 5 \cdot (26-1)^{49}$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে $(26-1)^{49}$ কে বিস্তৃত করলে শেষ পদটি ছাড়া বাকি প্রতিটি পদেই 26 (অর্থাৎ 13 এর গুণিতক) বিদ্যমান।

ধরি, প্রথম অংশগুলোর যোগফল $13k$ (যেখানে k একটি পূর্ণসংখ্যা)।

$\therefore (26-1)^{49} = 13k - 1$

সম্পূর্ণ সংখ্যাটি: $5^{99} = 5(13k-1) = 65k - 5 = 13(5k) - 5$

ঋণাত্মক ভাগশেষ পরিহারের জন্য পুনর্বিন্যাস করি:

$13(5k) - 5 = 13(5k-1) + 8$

এখানে $13(5k-1)$ অংশটি 13 দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ 8

১৩. **১ম অংশ:** $\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1} = \frac{(x^{1/3}+1)(x^{2/3}-x^{1/3}+1)}{x^{2/3}-x^{1/3}+1} = x^{1/3} + 1$

২য় অংশ: $\frac{x-1}{x-x^{1/2}} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 1 + x^{-1/2}$

সম্পূর্ণ রাশিটি দাঁড়ায়: $(x^{1/3} - x^{-1/2})^{15}$

সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{15}{r}(-1)^r x^{\frac{15-r}{3}-\frac{r}{2}}$

x বর্জিত হওয়ার শর্ত: $\frac{15-r}{3} - \frac{r}{2} = 0 \Rightarrow 5r = 30 \Rightarrow r = 6$

$\therefore x$ বর্জিত পদের মান $= \binom{15}{6}(-1)^6 = 5005$

১৪. $2^3 = 8$, যাকে 7 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ 1 থাকে, তাই 2 এর ঘাতকে 3 এর গুণিতক আকারে সাজাব।

$2^{2023} = 2 \cdot 2^{2022} = 2 \cdot (2^3)^{674} = 2 \cdot 8^{674}$

8 কে $(7+1)$ আকারে লিখি: $2^{2023} = 2 \cdot (7+1)^{674}$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তৃত করলে শেষ পদটি বাদে বাকি সব পদ 7 দ্বারা বিভাজ্য।

ধরি, সেই অংশটির মান $7k$ (যেখানে k পূর্ণসংখ্যা)।

$\therefore (7+1)^{674} = 7k + 1$

মূল সংখ্যাটি: $2(7k+1) = 14k + 2$

একে 7 দ্বারা ভাগ করলে পাই: $\frac{14k+2}{7} = 2k + \frac{2}{7}$

এখানে $2k$ পূর্ণসংখ্যা অংশ এবং $\frac{2}{7}$ ভগ্নাংশ অংশ

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ অংশ $\frac{2}{7}$

১৫. ধরি, পর পর তিনটি পদ হলো r তম, $(r+1)$ তম এবং $(r+2)$ তম পদ, যাদের সহগ যথাক্রমে $\binom{n}{r-1}$, $\binom{n}{r}$ এবং $\binom{n}{r+1}$

প্রশ্নমতে, $\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \frac{7}{1} \Rightarrow \frac{n-r+1}{r} = 7 \Rightarrow n - 8r + 1 = 0$ **.....(i)**

আবার, $\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{42}{7} = 6 \Rightarrow \frac{n-r}{r+1} = 6 \Rightarrow n - 7r - 6 = 0$ **.....(ii)**

(ii) নং হতে **(i)** নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই:

$r - 7 = 0 \Rightarrow r = 7$

$r = 7$ এর মান **(i)** নং সমীকরণে বসালে: $n - 56 + 1 = 0 \Rightarrow n = 55$

$\therefore n$ এর নির্ণেয় মান 55

১৬. $x = 1$ বসালে **১ম** রাশির সহগসমূহের সমষ্টি: $S_1 = (\alpha - 2 + 1)^{35} = (\alpha - 1)^{35}$

$x = 1, y = 1$ বসালে ২য় রাশির সহগসমূহের সমষ্টি: $S_2 = (1-\alpha)^{35}$

প্রশ্নমতে, $S_1 = S_2 \Rightarrow (\alpha-1)^{35} = (1-\alpha)^{35}$

যেহেতু ঘাত 35 বিজোড়, তাই $(\alpha-1)^{35} = -(\alpha-1)^{35} \Rightarrow \alpha = 1$

$\therefore \alpha$ এর নির্ণেয় মান 1

১৭. $(1+x^2)^5 = 1 + 5x^2 + 10x^4 + 10x^6 + \dots$
$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$
x^5 পাওয়া যাবে যখন প্রথম বিস্তৃতির পদের ঘাত ও দ্বিতীয় বিস্তৃতির পদের ঘাতের যোগফল 5 হয়।
সম্ভাব্য জোড়া:
i. $(5x^2) \times (4x^3) = 20x^5$
ii. $(10x^4) \times (4x) = 40x^5$
$\therefore x^5$ এর মোট সহগ $= 20 + 40 = 60$

১৮. $(1-x)^{39}$ এর বিস্তৃতিতে মোট পদসংখ্যা 40 টি।
প্রথম 20 টি পদের সহগের সমষ্টি, $S = C_0 - C_1 + C_2 - \dots - C_{19}$ (যেখানে $C_r = \binom{39}{r}$)
দ্বিপদী অভেদ ব্যবহার করি: $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^m\binom{n-1}{m}$
এখানে $n = 39$ এবং $m = 19$।
$S = (-1)^{19}\binom{38}{19} = -\binom{38}{19}$
$\therefore$ প্রথম 20 টি পদের সহগের সমষ্টি $-\binom{38}{19}$

১৯. আমরা জানি, $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$
প্রদত্ত রাশিতে এই সম্পর্কটি প্রয়োগ করি:
$\sum_{r=1}^{15} r\binom{15}{r}3^{r-1} = 15\sum_{r=1}^{15}\binom{14}{r-1}3^{r-1}$
$k = r - 1$ ধরলে, k এর মান 0 থেকে 14 পর্যন্ত পরিবর্তিত হবে।
$= 15\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}3^k$
আমরা জানি, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$
$\therefore \sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}3^k = (1+3)^{14} = 4^{14}$
সুতরাং, সম্পূর্ণ রাশির মান $= 15 \times 4^{14}$

২০. হরটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি: $1 - 5x + 6x^2 = (1-2x)(1-3x)$
আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করি: $\frac{1-6x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x}$
$\Rightarrow 1 - 6x = A(1-3x) + B(1-2x)$
$x = \frac{1}{2}$ বসালে: $-2 = -\frac{A}{2} \Rightarrow A = 4$
$x = \frac{1}{3}$ বসালে: $-1 = \frac{B}{3} \Rightarrow B = -3$
প্রদত্ত রাশিটি হলো: $4(1-2x)^{-1} - 3(1-3x)^{-1}$
$(1-2x)^{-1}$ এ x^n এর সহগ 2^n, এবং $(1-3x)^{-1}$ এ x^n এর সহগ 3^n
সম্পূর্ণ রাশিতে x^n এর সহগ $= 4(2^n) - 3(3^n) = 2^{n+2} - 3^{n+1}$

Physics

২০০ নম্বর

২১. পৃষ্ঠে, $g = \frac{GM}{R^2}$
তাই, $\frac{g_A}{g_B} = \frac{M_A}{M_B}\left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2$
প্রদত্ত, $M_A = 2M_B$, $R_A = 3R_B$
অতএব, $\frac{g_A}{g_B} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$
সুতরাং, $g_A = \frac{2}{9} \times 9.8 \approx 2.18\,ms^{-2}$

২২. ঘূর্ণনের অক্ষ 30 cm প্রান্ত বরাবর, তাই **cross-section**-এর প্রাসঙ্গিক মাত্রা $b = 0.20\,m$ এবং $c = 0.10\,m$
প্রাথমিক ভরকেন্দ্রের উচ্চতা, $y_i = \frac{c}{2} = 0.05\,m$
$60°$ কোণে ঘোরানোর পর ভরকেন্দ্রের উচ্চতা, $y_f = \frac{b}{2}\sin 60° + \frac{c}{2}\cos 60°$
মান বসিয়ে, $y_f = 0.10(0.866) + 0.05(0.5) \approx 0.1116\,m$
উচ্চতার বৃদ্ধি, $\Delta y = y_f - y_i \approx 0.0616\,m$
ধীরে ধীরে ঘোরালে ন্যূনতম কাজ মহাকর্ষীয় বিভব শক্তির বৃদ্ধির সমান, $W_{min} = mg\Delta y$
অতএব, $W_{min} = 6 \times 9.8 \times 0.0616 \approx 3.62\,J$

২৩. কার্যকর পাম্প ক্ষমতা, $P = \eta P_{in} = 0.80 \times 15000 = 12000\,\text{W}$
মোট পানির আয়তন, $V = \pi R^2 H = \pi \times 1.2^2 \times 20 \approx 90.48\,\text{m}^3$
কূপের নিচ থেকে y উচ্চতায় একটি পাতলা স্তরকে উপরে তুলতে দূরত্ব $H - y$, তাই $dE_g = \rho\pi R^2 g(H - y)\,dy$
সমাকলন করে, $E_g = \rho\pi R^2 g \int_0^H (H - y)\,dy = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 g H^2$
মান বসিয়ে, $E_g \approx 8.87 \times 10^6\,\text{J}$
মোট সময় t হলে গড় প্রবাহ হার $Q = \frac{V}{t}$, এবং বের হওয়া বেগ $v = \frac{Q}{A} = \frac{V}{At}$
বের হওয়া পানির মোট গতিশক্তি, $K_{out} = \frac{1}{2}\rho V \left(\frac{V}{At}\right)^2$
শক্তি সমীকরণ, $Pt = E_g + \frac{1}{2}\rho V \left(\frac{V}{At}\right)^2$
এই সমীকরণ t-এর জন্য সংখ্যাগতভাবে সমাধান করলে, $t \approx 846.6\,\text{s} \approx 14.1$ মিনিট
তুলনার জন্য, গতিশক্তি বাদ দিলে, $t_0 = \frac{E_g}{P} \approx 739\,\text{s} \approx 12.3$ মিনিট

২৪. বৃত্তাকার কক্ষপথে, $v_c^2 = \frac{\mu}{r}$, যেখানে $\mu = GM$
থ্রাস্টের পরে, $v' = 1.2 v_c$
নতুন নির্দিষ্ট শক্তি, $\epsilon = \frac{v'^2}{2} - \frac{\mu}{r}$
$\epsilon = 0.72\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} = -0.28\frac{\mu}{r}$
উপবৃত্তাকার কক্ষপথের জন্য, $\epsilon = -\frac{\mu}{2a}$
তাই, $\frac{\mu}{2a} = 0.28\frac{\mu}{r}$, অর্থাৎ $a = \frac{r}{0.56}$
Kepler-এর তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী, একই কেন্দ্রীয় বস্তুর জন্য $\frac{T'}{T} = \left(\frac{a}{r}\right)^{3/2}$
সুতরাং, $T' = 12\left(\frac{1}{0.56}\right)^{3/2} \approx 28.6\,\text{h}$

২৫. লুপের সর্বোচ্চ বিন্দু মাটি থেকে $2R = 16\,\text{m}$ উচ্চতায় অবস্থিত
শক্তি সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী, $mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R)$
m বাতিল করলে, $gH = \frac{1}{2}v^2 + 2gR$, অর্থাৎ $v^2 = 2g(H - 2R)$
মান বসিয়ে, $v = \sqrt{2 \times 9.8 \times (25 - 16)} \approx 13.28\,\text{ms}^{-1}$
সর্বোচ্চ বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বল ও ট্র্যাকের লম্ব বল উভয়ই কেন্দ্রের দিকে কাজ করে, তাই $mg + N = \frac{mv^2}{R}$
অতএব, $N = \frac{mv^2}{R} - mg$
মান বসিয়ে, $N = \frac{250 \times 13.28^2}{8} - 250 \times 9.8 \approx 3.06 \times 10^3\,\text{N}$
এই বল লুপের কেন্দ্রের দিকে নির্দেশিত

২৬. বিষুবরেখায় ওজনহীনতার শর্ত হলো $\omega'^2 R = g$, অর্থাৎ $\omega'^2 = \frac{g}{R}$
$60°$ অক্ষাংশে কেন্দ্রাতিগ ত্বরণের **radial** উপাংশ, $a_c = \omega'^2 R\cos^2 60°$
সুতরাং, $g'_{eff} = g - \omega'^2 R\cos^2 60°$
এখন $\omega'^2 R = g$ বসিয়ে, $g'_{eff} = g - g\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}g$
$g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$ হলে, $g'_{eff} = 7.35\,\text{ms}^{-2}$

২৭. 0 থেকে $2\,\text{m}$ পর্যন্ত কাজ, $W = \int_0^2 (12x - 3x^2)\,dx = \left[6x^2 - x^3\right]_0^2 = 24 - 8 = 16\,\text{J}$
প্রাথমিক গতিশক্তি, $K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4^2 = 24\,\text{J}$
Work-Energy theorem অনুযায়ী, $K_2 = K_1 + W = 24 + 16 = 40\,\text{J}$
তাই, $\frac{1}{2}mv_2^2 = 40$, অর্থাৎ $v_2 = \sqrt{\frac{80}{3}} \approx 5.164\,\text{ms}^{-1}$
$x = 2\,\text{m}$-এ বল, $F(2) = 12 \times 2 - 3 \times 2^2 = 24 - 12 = 12\,\text{N}$
তাৎক্ষণিক ক্ষমতা, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$
বল ও বেগ একই দিকে, তাই $P = Fv = 12 \times 5.164 \approx 62.0\,\text{W}$

২৮. পৃথিবীর পৃষ্ঠে, $E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}$

বায়ু প্রতিরোধ প্রাথমিক গতিশক্তির 20% অপসারণ করে, তাই অবশিষ্ট গতিশক্তি $K_f = 0.8\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)$

সর্বোচ্চ উচ্চতায় $v = 0$, তাই $E_f = -\frac{GMm}{R+h}$

শক্তি সংরক্ষণ থেকে, $0.8\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h}$

m দিয়ে ভাগ করে, $0.4v_0^2 - \frac{GM}{R} = -\frac{GM}{R+h}$

অতএব, $\frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} - \frac{0.4v_0^2}{GM}$

মান বসিয়ে ($R = 6.4 \times 10^6$ m, $v_0 = 8.0 \times 10^3$ ms^{-1}), $R + h \approx 1.0836 \times 10^7$ m

অতএব, $h \approx 4.436 \times 10^6$ m $\approx 4.44 \times 10^3$ km

২৯. গোলীয়ভাবে সমমিত গ্রহের একটি পাতলা গোলীয় স্তরের ভর $dm = 4\pi r^2\rho(r)\,dr$

মোট ভর, $M = 4\pi\int_0^R r^2(\rho_0 r + r^2)\,dr = 4\pi\left[\rho_0\frac{R^4}{4} + \frac{R^5}{5}\right] = \pi\rho_0 R^4 + \frac{4\pi R^5}{5}$

সুতরাং, $\rho_0 = \frac{M - \frac{4\pi R^5}{5}}{\pi R^4}$

R-এর ভিতরে a দূরত্বে বিভবের দুটি অবদান থাকে: 0 থেকে a পর্যন্ত আবদ্ধ ভরের অবদান এবং a থেকে R পর্যন্ত বাইরের গোলীয় স্তরগুলোর অবদান

তাই, $V(a) = -G\frac{M(a)}{a} - 4\pi G\int_a^R \rho(r)\,r\,dr$, যেখানে $M(a) = 4\pi\int_0^a r^2\rho(r)\,dr$

$M(a) = 4\pi\int_0^a(\rho_0 r^3 + r^4)\,dr = 4\pi\left(\frac{\rho_0 a^4}{4} + \frac{a^5}{5}\right) = \pi\rho_0 a^4 + \frac{4\pi a^5}{5}$

$a = \frac{R}{3}$ বসিয়ে, $M\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{\pi\rho_0 R^4}{81} + \frac{4\pi R^5}{1215}$

প্রথম অংশ, $-G\frac{M(a)}{a} = -G\left(\pi\rho_0 a^3 + \frac{4\pi a^4}{5}\right)$

দ্বিতীয় অংশ, $-4\pi G\int_a^R(\rho_0 r + r^2)r\,dr = -4\pi G\left[\frac{\rho_0}{3}(R^3 - a^3) + \frac{R^4 - a^4}{4}\right]$

উভয় অংশ যোগ করে ও $a = \frac{R}{3}$ বসিয়ে সরল করলে, $V\left(\frac{R}{3}\right) = -\frac{\pi GR^3}{405}(535\rho_0 + 404R)$

শুধু মোট ভর M দিয়ে লিখলে, $\rho_0 = \frac{M}{\pi R^4} - \frac{4R}{5}$ বসিয়ে, $V\left(\frac{R}{3}\right) = -\frac{G(535M - 24\pi R^5)}{405R}$

৩০. ধরি, $m_1 = 2 \times 10^{30}$ kg, $m_2 = 4 \times 10^{30}$ kg

স্পর্শের সময় কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব, $d = R_1 + R_2 = 7 \times 10^8 + 1.3 \times 10^9 = 2.0 \times 10^9$ m

প্রাথমিক অবস্থায় নক্ষত্র দুটি অসীম দূরে ও স্থির, তাই মোট শক্তি শূন্য

স্পর্শের সময়, $\frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 - \frac{Gm_1m_2}{d} = 0$, যেখানে **reduced mass** $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

সুতরাং, $v_{rel} = \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{d}}$

মান বসিয়ে, $v_{rel} = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times6\times10^{30}}{2.0\times10^9}} \approx 6.326 \times 10^5$ ms^{-1}

ভরবেগ সংরক্ষণ থেকে, $m_1v_1 = m_2v_2$ এবং $v_{rel} = v_1 + v_2$

অতএব, $v_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}v_{rel}$

তাই, $v_1 = \frac{4}{6} \times 6.326 \times 10^5 \approx 4.22 \times 10^5$ ms^{-1} $= 422$ kms^{-1}

৩১. ঊর্ধ্বমুখী চলার সময় ঢালের বরাবর নিচের দিকে দুটি প্রতিরোধী বল কাজ করে: $mg\sin\theta$ এবং $f_k = \mu_k mg\cos\theta$

তাই, $a_\uparrow = -g(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$

মান বসিয়ে, $a_\uparrow = -9.8(0.5 + 0.25 \times 0.866) \approx -7.02$ ms^{-2}

$v^2 = v_0^2 + 2a_\uparrow d$ এবং থামার সময় $v = 0$ থেকে, $0 = 8^2 + 2(-7.02)d$

অতএব, $d \approx 4.56$ m

নিচে নামার সময় মহাকর্ষ ঢালের নিচের দিকে এবং ঘর্ষণ ঢালের উপরের দিকে কাজ করে, তাই $a_\downarrow = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$

মান বসিয়ে, $a_\downarrow = 9.8(0.5 - 0.25 \times 0.866) \approx 2.78$ ms^{-2}

প্রাথমিক বেগ শূন্য ধরে, $v_f^2 = 2a_\downarrow d$

তাই, $v_f = \sqrt{2 \times 2.78 \times 4.56} \approx 5.03$ ms^{-1}

৩২. ঘর্ষণে হারানো শক্তি, $W_f = \int_0^L f(x)\,dx = f_0 \int_0^L \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx$

সুতরাং, $W_f = f_0 \left(L + \frac{L}{2}\right) = \frac{3}{2} f_0 L$

মান বসিয়ে, $W_f = \frac{3}{2} \times 3 \times 2 = 9.0\,J$

প্রাথমিক গতিশক্তি, $K_i = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \times 1.5 \times 10^2 = 75\,J$

উচ্চতা বৃদ্ধির জন্য প্রয়োজনীয় শক্তি, $\Delta U = mgh = 1.5 \times 9.8 \times 1.2 = 17.64\,J$

তাই ট্র্যাকের প্রান্তে, $K_f = 75 - 9 - 17.64 = 48.36\,J$

অতএব, $\frac{1}{2} m v_f^2 = 48.36$, যা থেকে $v_f \approx 8.03\,ms^{-1}$

ব্লকটি অনুভূমিকভাবে বের হয়, তাই উল্লম্ব দিকে প্রাথমিক বেগ শূন্য, $2.5 = \frac{1}{2} g t^2$

সুতরাং, $t = \sqrt{\frac{2 \times 2.5}{9.8}} \approx 0.714\,s$

অনুভূমিক দূরত্ব, $d = v_f t = 8.03 \times 0.714 \approx 5.74\,m$

৩৩. গোলকের মোট ভর, $M_s = 4\pi \int_0^R r^2 \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dr$

সমাকলন করে, $M_s = 4\pi\rho_0 \left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5R^2}\right] = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}$

কণাটি L এবং $x_0 - R$-এর মধ্যবিন্দুতে, তাই কণার অবস্থান $x_p = \frac{L + x_0 - R}{2}$

দণ্ডের প্রতিটি বিন্দু গোলকের বাইরে থাকায়, গোলকীয় প্রতিসাম্যের কারণে গোলককে কেন্দ্রস্থিত M_s ভরের বিন্দু ভর হিসেবে ধরা যায়

দণ্ডের রৈখিক ভরঘনত্ব, $\lambda = \frac{M}{L}$

দণ্ড-গোলক বিভব শক্তি, $U_{rs} = -GM_s\lambda \int_0^L \frac{dx}{x_0 - x} = -\frac{GMM_s}{L} \ln\left(\frac{x_0}{x_0 - L}\right)$

দণ্ড-কণা বিভব শক্তি, $U_{rp} = -Gm_0\lambda \int_0^L \frac{dx}{x_p - x} = -\frac{GMm_0}{L} \ln\left(\frac{x_p}{x_p - L}\right)$

কণাটিও গোলকের বাইরে থাকায়, গোলক-কণা বিভব শক্তি, $U_{sp} = -\frac{GM_s m_0}{x_0 - x_p}$

তিনটি অবদান যোগ করে, $U_{total} = U_{rs} + U_{rp} + U_{sp}$

সুতরাং, $U_{total} = -\frac{GMM_s}{L} \ln\left(\frac{x_0}{x_0 - L}\right) - \frac{GMm_0}{L} \ln\left(\frac{x_p}{x_p - L}\right) - \frac{GM_s m_0}{x_0 - x_p}$

যেখানে $M_s = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15}$ এবং $x_p = \frac{L + x_0 - R}{2}$

৩৪. মুক্তিবেগের সূত্র, $v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

আবার পৃষ্ঠে, $g = \frac{GM}{R^2}$, তাই $\frac{GM}{R} = gR$

সুতরাং, $v_{esc} = \sqrt{2gR}$

এখন, $R = 3200\,km = 3.2 \times 10^6\,m$

মান বসিয়ে, $v_{esc} = \sqrt{2 \times 4.9 \times 3.2 \times 10^6} = 5600\,ms^{-1}$

অতএব, $v_{esc} = 5.60\,kms^{-1}$

৩৫. ধ্রুব বেগে নিট বল শূন্য, তাই ইঞ্জিনের বল $F_{engine} = F_d = bv^2$

অতএব, $F_{engine} = 1.2 \times 30^2 = 1080\,N$

ইঞ্জিনের ক্ষমতা, $P = F\,v = 1080 \times 30 = 32400\,W = 32.4\,kW$

একই ক্ষমতার জন্য $20\,ms^{-1}$ বেগে, $F'_{engine} = \frac{P}{v} = \frac{32400}{20} = 1620\,N$

নতুন ড্র্যাগ, $F'_d = 1.2 \times 20^2 = 480\,N$

তাই নিট বল, $F_{net} = 1620 - 480 = 1140\,N$

অতএব, $a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{1140}{1200} = 0.95\,ms^{-2}$

৩৬. ধরি, স্প্রিংটি x পরিমাণ সংকুচিত হয়েছে

শক্তি সংরক্ষণ থেকে, $\frac{1}{2}mv^2 = mg(h+x) - \frac{1}{2}kx^2$

সর্বোচ্চ বেগের মুহূর্তে ত্বরণ শূন্য, তাই স্প্রিংয়ের পুনরুদ্ধার বল ও ওজন সমান, $kx = mg$

অতএব, $x = \frac{mg}{k} = \frac{2\times9.8}{400} = 0.049\,m$

মান বসিয়ে, $\frac{1}{2} \times 2 \times v_{max}^2 = 2 \times 9.8 \times (0.40 + 0.049) - \frac{1}{2} \times 400 \times 0.049^2$

$v_{max}^2 \approx 8.320$

অতএব, $v_{max} \approx 2.88\,ms^{-1}$

৩৭. প্রথমে যাচাই করতে হবে দড়িটি পুরো বৃত্তে টানটান থাকতে পারবে কি না

সর্বোচ্চ বিন্দুতে দড়ি টানটান থাকার সীমান্তিক শর্তে $T_{top} = 0$, তখন কেন্দ্রের দিকে একমাত্র বল ওজন, তাই $\frac{mv_{top}^2}{L} = mg$

অতএব, $v_{top,min} = \sqrt{gL}$

নিচ থেকে সর্বোচ্চ বিন্দুতে উচ্চতা বৃদ্ধি $2L$, তাই শক্তি সংরক্ষণ থেকে $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_{top}^2 + mg(2L)$

তাই, $v_{top}^2 = v_0^2 - 4gL$

মান বসিয়ে, $v_{top}^2 = 64 - 4 \times 9.8 \times 1.2 = 16.96$, অর্থাৎ $v_{top} \approx 4.118\,ms^{-1}$

দড়ি টানটান থাকার জন্য প্রয়োজন, $v_{top,min} = \sqrt{9.8 \times 1.2} \approx 3.43\,ms^{-1} < 4.118\,ms^{-1}$, তাই দড়ি সম্পূর্ণ বৃত্তে টানটান থাকবে

দড়ির টান, $T_{top} = \frac{mv_{top}^2}{L} - mg \approx 2.17\,N$

৩৮. আকর্ষণীয় বলের জন্য $F_r = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)$ এবং $F_r = -\frac{dU}{dr}$

অতএব, $\frac{dU}{dr} = \frac{GMm}{r^2} + \frac{GM m\alpha}{r^3}$

$U(\infty) = 0$ নিলে, $U(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM m\alpha}{2r^2}$

বৃত্তাকার কক্ষপথের জন্য কেন্দ্রাভিমুখী বলের সমীকরণ, $\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)$

অতএব, $v^2 = \frac{GM}{r}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)$

গতিশক্তি, $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)$

তাই, $E_0 = K + U = \frac{GMm}{2r}\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{GMm}{r} - \frac{GM m\alpha}{2r^2}$

α-নির্ভর পদগুলো বাতিল হয়ে যায়, $E_0 = -\frac{GMm}{2r}$

সুতরাং, $r = -\frac{GMm}{2E_0}$

পর্যায়কাল, $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)}}$

এখন $r = -\frac{GMm}{2E_0}$ বসালে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(-\frac{GMm}{2E_0}\right)^3}{GM\left(1-\frac{2\alpha E_0}{GMm}\right)}}$

৩৯. ধরি, M_1 থেকে শূন্য ক্ষেত্রের বিন্দুর দূরত্ব x। তাহলে M_2 থেকে দূরত্ব $D - x$

শূন্য ক্ষেত্রের জন্য, $\frac{GM_1}{x^2} = \frac{GM_2}{(D-x)^2}$

G বাতিল করে, $\frac{\sqrt{M_1}}{x} = \frac{\sqrt{M_2}}{D-x}$

অতএব, $x = \frac{D\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1}+\sqrt{M_2}}$

এখন $M_2 = 4M_1$, তাই $\sqrt{M_2} = 2\sqrt{M_1}$

সুতরাং, $x = \frac{D}{3} = \frac{6.0\times10^8}{3} = 2.0 \times 10^8\,m$

৪০. প্রাথমিক অবস্থান থেকে সর্বনিম্ন বিন্দুতে নামার উচ্চতা, $h = L(1 - \cos 60°)$
অতএব, $h = 1.5(1 - 0.5) = 0.75\,m$
প্রাথমিকভাবে বস্তুটি স্থির, তাই শক্তি সংরক্ষণ থেকে $mgh = \frac{1}{2}mv^2$
অতএব, $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.75} \approx 3.83\,ms^{-1}$
সর্বনিম্ন বিন্দুতে কেন্দ্রাভিমুখী দিক ঊর্ধ্বমুখী, তাই $T - mg = \frac{mv^2}{L}$
সুতরাং, $T = mg + \frac{mv^2}{L}$
মান বসিয়ে, $T = 0.8 \times 9.8 + \frac{0.8 \times 3.83^2}{1.5} \approx 15.7\,N$

Chemistry ২০০ নম্বর

৪১. বক্তব্যটি আংশিক সত্য। রাদারফোর্ড এর α-কণা বিচ্ছুরণ পরীক্ষা থেকে বোঝা যায় যে পরমাণুর অধিকাংশ স্থান ফাঁকা এবং প্রায় সমস্ত ধনাত্মক আধান ও ভর অত্যন্ত ক্ষুদ্র নিউক্লিয়াসে কেন্দ্রীভূত।
কিন্তু **classical electrodynamics** অনুযায়ী নিউক্লিয়াসের চারদিকে ঘূর্ণায়মান ইলেকট্রন ত্বরণপ্রাপ্ত **charged** কণা। তাই তার ক্রমাগত শক্তি বিকিরণ করে নিউক্লিয়াসের দিকে **spiral** আকারে পতিত হওয়ার কথা। সেক্ষেত্রে পরমাণু স্থায়ী হতে পারত না।
এছাড়া রাদারফোর্ড মডেল হাইড্রোজেনের **discrete** রেখা বর্ণালী ব্যাখ্যা করতে পারেনি।
বোর নির্দিষ্ট স্থির কক্ষপথ অনুমোদন করে এবং $mvr = \frac{nh}{2\pi}$ শর্ত আরোপ করেন। ইলেকট্রন কেবল কক্ষপথ পরিবর্তনের সময় $\Delta E = h\nu$ পরিমাণ শক্তি শোষণ বা বিকিরণ করে। ফলে পারমাণবিক স্থিতিশীলতা ও হাইড্রোজেন রেখা বর্ণালী ব্যাখ্যা করা সম্ভব হয়।

৪২. **d**-উপস্তরের জন্য, $l = 2$
আবার, $n + l = 5$
তাই, $n + 2 = 5 \Rightarrow n = 3$
অর্থাৎ উপস্তর হলো 3d।
d-এর জন্য, $m_l = -2, -1, 0, +1, +2$
ঋণাত্মক হলে, $m_l = -2, -1$
মোট অরবিটাল সংখ্যা, $2l + 1 = 5$
সর্বোচ্চ ইলেকট্রন সংখ্যা, $2(2l + 1) = 10$
d^6-এর ভূমি অবস্থা **arrangement** অনুযায়ী পাঁচটি অরবিটালের একটিতে দুটি ইলেকট্রন **paired** থাকে এবং বাকি চারটি অরবিটালে একটি করে অযুগ্ম ইলেকট্রন থাকে।
তাই, 4টি অযুগ্ম ইলেকট্রন।

৪৩. α-ক্ষয় তে, $A \rightarrow A - 4$, $Z \rightarrow Z - 2$
তাই প্রথম ধাপের পর, $A = 222$, $Z = 86$
β^--ক্ষয় তে নিউট্রন **proton**-এ রূপান্তরিত হয়। তাই ভরসংখ্যা অপরিবর্তিত থাকে এবং পারমাণবিক সংখ্যা 1 বাড়ে।
অতএব, $A = 222$, $Z = 87$
চূড়ান্ত নিউক্লিয়াস: $^{222}_{87}Y$
γ**-ray** মূলত উচ্চশক্তির তড়িৎচুম্বকীয় বিকিরণ; এতে **proton** বা নিউট্রন নির্গত হয় না। তাই A ও Z পরিবর্তিত হয় না।

৪৪. রিডবার্গ **equation,** $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
656.3 nm-এর জন্য মান বসিয়ে পাওয়া যায়, $\frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{9}$
তাই, $n = 3$, অর্থাৎ স্থানান্তর: $3 \rightarrow 2$
486.1 nm-এর জন্য, $\frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{16}$
তাই, $n = 4$, অর্থাৎ স্থানান্তর: $4 \rightarrow 2$
দুটি রেখা ই **Balmer** সিরিজ এর অন্তর্ভুক্ত।

৪৫. প্রথম অবস্থায়, $NH_4OH \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$
ধরি, $[OH^-] = x$
তাহলে, $K_b \approx \frac{x^2}{0.10} \Rightarrow x = \sqrt{1.8 \times 10^{-6}} \approx 1.34 \times 10^{-3}\,M$
NH_4Cl যোগের পর সমআয়ন NH_4^+ প্রায় $0.50\,M$।
$K_b = \frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_4OH]}$
$1.8 \times 10^{-5} = \frac{(0.50)[OH^-]}{0.10} \Rightarrow [OH^-] = 3.6 \times 10^{-6}\,M$
হ্রাসের **factor:** $\frac{1.34\times10^{-3}}{3.6\times10^{-6}} \approx 372$
অর্থাৎ হাইড্রক্সাইড ঘনমাত্রা প্রায় 3.7×10^2 গুণ কমেছে। কারণ NH_4^+ সমআয়ন যোগে সাম্যাবস্থা বামদিকে সরে গিয়ে NH_4OH-এর আয়নীভবন **suppress** করে।

৪৬. স্ফুটনাঙ্ক এর পার্থক্য মাত্র $82 - 78 = 4°C$। তাই সরল পাতন এ কার্যকর পৃথকীকরণ হবে না। বাষ্প **phase**-এ দুই উপাদানই উল্লেখযোগ্য পরিমাণে থাকবে।
আংশিক পাতন স্তম্ভ ব্যবহার করলে কলামের বিভিন্ন স্তরে বারবার **vaporization** ও **condensation** ঘটে। প্রতিবার তুলনামূলক বেশি উদ্বায়ী উপাদানটি বাষ্প **phase**-এ বেশি সমৃদ্ধ হয়।
অতএব কাছাকাছি স্ফুটনাঙ্ক এর তরল পৃথক করার জন্য আংশিক পাতন অধিক উপযুক্ত।

৪৭. স্থির দশা তন্ত্র এর মধ্যে স্থির থাকে, আর গতিশীল দশা স্থির দশা এর মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হয়ে নমুনা এর উপাদানগুলো বহন করে।
শোষণ ক্রোমাটোগ্রাফি তে পৃথকীকরণ মূলত কঠিন **surface**-এ বিভিন্ন উপাদানের **adsorption strength**-এর পার্থক্যের উপর নির্ভর করে।
বণ্টন ক্রোমাটোগ্রাফি তে উপাদানগুলো দুই **phase**-এর মধ্যে ভিন্ন মাত্রায় **partition** বা বণ্টন করে।
যে উপাদান কলামে ধীরে চলে, স্থির দশা এর প্রতি তার আকর্ষণ তুলনামূলক বেশি অথবা গতিশীল দশা এর প্রতি আসক্তি কম। দ্রুত চলা উপাদানের ক্ষেত্রে বিপরীত।

৪৮. Al^{3+} থেকে $Al(OH)_3$ এবং Zn^{2+} থেকে $Zn(OH)_2$ উৎপন্ন হতে পারে। উভয় হাইড্রক্সাইড উভধর্মী হওয়ায় অতিরিক্ত NaOH-এ দ্রবীভূত হতে পারে।
তাই শুধু "সাদা অধঃক্ষেপ + **NaOH**-এ দ্রবীভূত" পর্যবেক্ষণ যথেষ্ট নয়।
Al^{3+}-এর ক্ষেত্রে সোডিয়াম অ্যালুমিনেট দ্রবণ তৈরি হওয়ার পর উপযুক্তভাবে NH_4Cl যোগ করলে $Al(OH)_3$ পুনরায় অধঃক্ষেপ করা যায়।
Zn^{2+}-এর জন্য পটাশিয়াম ফেরোসায়ানাইড ব্যবহার করে সাদা জিংক ফেরোসায়ানাইড অধঃক্ষেপ জাত নিশ্চিতকারী পর্যবেক্ষণ নেওয়া যায়।
অতএব নিশ্চিতকারী পরীক্ষা ছাড়া চূড়ান্ত সিদ্ধান্ত দেওয়া উচিত নয়।

৪৯. মূল কাঙ্ক্ষিত লবণ: $20.0 \times 0.80 = 16.0\,g$
পুনঃকেলাসন এর পরে: $16.0 \times 0.75 = 12.0\,g$
নিষ্কাশন এ 10% ক্ষতি হলে অবশিষ্ট থাকবে 90%: $12.0 \times 0.90 = 10.8\,g$
অতএব চূড়ান্ত কাঙ্ক্ষিত লবণ: $10.8\,g$
সামগ্রিক পুনরুদ্ধার: $\frac{10.8}{16.0} \times 100 = 67.5\%$

৫০. অ্যাজিওট্রোপ নির্দিষ্ট গঠন এ এমনভাবে **boil** করে যে বাষ্প ও তরল এর গঠন একই হয়ে যায়। তাই সাধারণ আংশিক পাতন এ গঠন আর ইথানল এর দিকে উন্নত হয় না।
$100\,g$ 95.6% অ্যাজিওট্রোপ এ ইথানল: $95.6\,g$
পানি: $100 - 95.6 = 4.4\,g$
ইথানল ক্ষতি না হলে নির্জল ইথানল পেতে এই $4.4\,g$ পানি সম্পূর্ণ সরাতে হবে।
তাই অ্যাজিওট্রোপিক গঠন অতিক্রম করতে অতিরিক্ত রাসায়নিক বা অ্যাজিওট্রোপ-**breaking method** প্রয়োজন।

৫১. **AgCl**-এর সাম্যাবস্থা: $AgCl(s) \rightleftharpoons Ag^+ + Cl^-$
NaCl সম্পূর্ণ আয়নিত করা হয়ে অতিরিক্ত Cl^- দেয়। ফলে সমআয়ন Cl^--এর ঘনমাত্রা বৃদ্ধি পায়। ল্য শাতেলিয়ার এর নীতি অনুযায়ী সাম্যাবস্থা বামদিকে সরে যায় এবং আরও কম **AgCl** দ্রবীভূত হয়।
এটাই সমআয়ন প্রভাব।

৫২. $M_1V_1 = M_2V_2$
$0.20 \times 10.0 = M_2 \times 50.0$
$M_2 = 0.040\ M$

৫৩. $300\ nm \rightarrow$ UV region
$650\ nm \rightarrow$ Visible region **(**লাল অংশের কাছাকাছি**)**
$8.0\ \mu m = 8000\ nm \rightarrow$ IR region
ফোটন শক্তি, $E = \frac{hc}{\lambda}$
তাই সবচেয়ে কম তরঙ্গদৈর্ঘ্য এর বিকিরণ এর শক্তি সবচেয়ে বেশি।
অতএব, $300\ nm$ **UV** বিকিরণ এর ফোটন শক্তি সর্বাধিক।

৫৪. ক্যাটায়ন বড় হলে সাধারণত **interionic** আকর্ষণ কমে এবং জালক শক্তি কমে, যা দ্রবীভবন এর পক্ষে যায়।
কিন্তু একই সঙ্গে ক্যাটায়ন বড় হলে আধান ঘনত্ব কমে এবং পানি এর সঙ্গে আর্দ্রায়ন দুর্বল হয়। অর্থাৎ আর্দ্রায়ন শক্তি ও কম অনুকূল হতে পারে।
তাই জালক ভাঙতে প্রয়োজনীয় শক্তি এবং আর্দ্রায়ন থেকে পাওয়া শক্তি দুটোই পরিবর্তিত হয়।
চূড়ান্ত দ্রাব্যতা হলো এই **competing** প্রভাব এর ফল। তাই শুধু জালক শক্তি প্রবণতা দেখে যথাযথ দ্রাব্যতা ক্রম নিশ্চিত করা যায় না।

৫৫. $20°C$-এ **X** দ্রবীভূত থাকবে সর্বোচ্চ $8\ g$।
তাই **X** কেলাস: $50 - 8 = 42\ g$
Y দ্রবীভূত থাকবে সর্বোচ্চ $30\ g$।
তাই **Y** কেলাস: $35 - 30 = 5\ g$
মোট কেলাস: $47\ g$
X-এর শতকরা পরিমাণ: $\frac{42}{47} \times 100 \approx 89.4\%$
X-এর দ্রাব্যতা তাপমাত্রা এর সাথে খুব বেশি পরিবর্তিত হয়, কিন্তু **Y**-এর পরিবর্তন তুলনামূলক কম। তাই **cooling**-এ **X** অগ্রাধিকারমূলকভাবে কেলাসিত হবে করে, যা আংশিক কেলাসন এর জন্য সুবিধাজনক।

৫৬. যে উপাদান কম দ্রাবক আয়তন এই বের হয়ে আসে, স্থির দশা এর সাথে তার মিথস্ক্রিয়া তুলনামূলক দুর্বল।
তাই মিথস্ক্রিয়া বৃদ্ধির ক্রম: $P < Q < R$
P-এর প্রাথমিক ভর $30\ mg$।
পুনরুদ্ধার 90% হলে, $30 \times 0.90 = 27\ mg$

৫৭. একই মৌলের সমস্থানিক গুলোর পারমাণবিক সংখ্যা একই। নিরপেক্ষ অবস্থায় ইলেকট্রন সংখ্যাও একই এবং তাই ইলেকট্রন বিন্যাস প্রায় একই।
রাসায়নিক বিক্রিয়া প্রধানত **valence electron**-এর উপর নির্ভর করে। তাই সমস্থানিক গুলোর রাসায়নিক **properties** প্রায় একই।
কিন্তু সমস্থানিক গুলোর নিউট্রন সংখ্যা ভিন্ন হওয়ায় নিউক্লিয়াসের গঠন ও স্থিতিশীলতা ভিন্ন হতে পারে। কোনো সমস্থানিক **stable,** অন্যটি তেজস্ক্রিয় হতে পারে।
তেজস্ক্রিয় ক্ষয় নিউক্লীয় প্রক্রিয়া; রাসায়নিক বিক্রিয়া ইলেকট্রনিক প্রক্রিয়া। তাই রাসায়নিক **similarity** থাকা সত্ত্বেও নিউক্লীয় আচরণ ভিন্ন হতে পারে।

৫৮. $Z = 26$ হলো **Fe**।
নিরপেক্ষ **Fe:** $[Ar]3d^64s^2$
d^6-এ চারটি অযুগ্ম ইলেকট্রন থাকে।
আয়নীভবন এর সময় $4s$ ইলেকট্রন আগে অপসারিত হয়।
তাই, $Fe^{2+} = [Ar]3d^6$
এখানেও d^6-এর জন্য চারটি অযুগ্ম ইলেকট্রন থাকে।
উভয় ক্ষেত্রেই **d**-উপস্তরে 4টি করে অযুগ্ম ইলেকট্রন।

৫৯. বড় আয়ন এর ক্ষেত্রে আয়ন আয়ন **distance** বাড়ায় জালক আকর্ষণ দুর্বল হতে পারে। ফলে কেলাস ভাঙা সহজ হওয়ায় দ্রাব্যতা বাড়ার প্রবণতা থাকতে পারে।
কিন্তু বড় আয়ন এর আধান ঘনত্ব কম হওয়ায় পানি **molecule**-এর সঙ্গে আয়ন-**dipole** আকর্ষণ দুর্বল হয়। ফলে আর্দ্রায়ন শক্তি এর মান কমে।
সুতরাং একটি প্রভাব দ্রবীভবন কে সাহায্য করলেও অন্য প্রভাব বিপরীত দিকে যেতে পারে।
চূড়ান্ত দ্রাব্যতা নির্ভর করে জালক শক্তি ও আর্দ্রায়ন শক্তি এর মোট **balance**-এর উপর।
তাই শুধু আয়নিক আকার থেকে একটি **universal** দ্রাব্যতা **rule** দেওয়া যায় না।

৬০. প্রথমে নমুনা এর প্রকৃতি অনুযায়ী অজৈব ও জৈব অংশকে আলাদাভাবে **handle** করা উচিত।
অজৈব অংশে শিখা পরীক্ষা প্রাথমিক ইঙ্গিত দিতে পারে, কিন্তু এটি চূড়ান্ত **confirmation** নয়। এরপর নির্দিষ্ট অধঃক্ষেপণ বিকারক ব্যবহার করে আয়ন শনাক্ত করা হবে। অধঃক্ষেপণ সম্ভব কি না বোঝার জন্য ঘনমাত্রা ও K_{sp}-এর ভিত্তিতে আয়নিক গুণফল বিবেচনা করা যায়।
একই ধরনের অধঃক্ষেপ পাওয়া আয়নের ক্ষেত্রে দ্বিতীয় নিশ্চিতকারী পরীক্ষা ব্যবহার করতে হবে। যেমন Al^{3+} ও Zn^{2+}-এর সাদা হাইড্রক্সাইড আচরণ একা যথেষ্ট নয়; Fe^{2+} ও Fe^{3+}-এর ক্ষেত্রেও নির্দিষ্ট বিকারক প্রয়োজন।
কঠিন মিশ্রণ হলে তাপমাত্রা নির্ভর দ্রাব্যতা যথেষ্ট ভিন্ন হলে আংশিক কেলাসন ব্যবহার করা যায়।
অমিশ্রণীয় তরল **phase**-এর মধ্যে কোনো দ্রব অগ্রাধিকারমূলকভাবে **distribute** করলে দ্রাবক নিষ্কাশন উপযোগী; একাধিক ছোট নিষ্কাশন একবার বড় নিষ্কাশন এর চেয়ে কার্যকর হতে পারে।
উদ্বায়ী তরল মিশ্রণ এর স্ফুটনাঙ্ক অনেক দূরে হলে সরল পাতন, কাছাকাছি হলে আংশিক পাতন প্রয়োজন। পানি অদ্রবণীয়, **steam**-উদ্বায়ী ও উচ্চ **boiling** জৈব যৌগ এর জন্য বাষ্প পাতন সুবিধাজনক। অ্যাজিওট্রোপিক তন্ত্র সাধারণ আংশিক পাতন দিয়ে সম্পূর্ণ পৃথক করা যায় না।
শেষে **closely related** রঙিন/**non**-উদ্বায়ী জৈব উপাদান কলাম ক্রোমাটোগ্রাফি দ্বারা স্থির ও গতিশীল দশা এর প্রতি ভিন্ন আসক্তি ব্যবহার করে আলাদা করা যায়।
সুতরাং একটি যৌক্তিক **flow:** প্রাথমিক পর্যবেক্ষণ → নির্দিষ্ট আয়ন পরীক্ষা → নিশ্চিতকারী পরীক্ষা → উপযুক্ত **physical** পৃথকীকরণ → চূড়ান্ত বিশুদ্ধতা **check**।
মূল নীতি হলো কোনো একক পর্যবেক্ষণ এর উপর চূড়ান্ত শনাক্তকরণ নির্ভর না করা।