Engineering Weekly Exam 03 [Set 02] BV - উত্তরমালা

জটিল সংখ্যা + বহুপদী ও বহুপদী সমীকরণ + নিউটনীয় বলবিদ্যা + পরিমাণগত রসায়ন

পূর্ণমান: ৬০০ **সময়:** ৩ ঘণ্টা

পদার্থবিজ্ঞান: ২০০ গণিত: ২০০ রসায়ন: ২০০

পদার্থবিজ্ঞান

২০০ নম্বর

১. দুই ব্লক একই ত্বরণে চললে মোট ঘর্ষণ বাদ দিয়ে পুরো সিস্টেমের ওপর নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করি।

$f = (4+6)(0.20)(9.8) = 19.6\,\text{N}$

$a = \frac{40-19.6}{4+6} = 2.04\,\text{ms}^{-2}$

$6\,\text{kg}$ ব্লকের জন্য, $T - f_2 = 6a \Rightarrow T = 6(2.04) + 6(0.20)(9.8) = 24.0\,\text{N}$

টানটি $6\,\text{kg}$ ব্লককে ডানদিকে ত্বরান্বিত করে; $4\,\text{kg}$ ব্লকের ওপর প্রযুক্ত বল থেকে তার নিজের ঘর্ষণ ও টান বাদ দিলেও একই ত্বরণ পাওয়া যায়।

২. প্রথমে স্থিতি ঘর্ষণের সীমা যাচাই করি।

$N = 2g\cos 30^\circ = 16.97\,\text{N}$, $f_{s,max} = 0.40\text{N} = 6.79\,\text{N}$

স্থির থাকতে ঢালের ওপর প্রয়োজনীয় ঘর্ষণ, $3g - 2g\sin 30^\circ = 19.6\,\text{N}$, যা $f_{s,max}$-এর চেয়ে বেশি; তাই $3\,\text{kg}$ ভরটি নিচে নামবে।

$f_k = 0.25(16.97) = 4.24\,\text{N}$

$a = \frac{3g - 2g\sin 30^\circ - f_k}{3+2} = 3.07\,\text{ms}^{-2}$

$T - 2g\sin 30^\circ - f_k = 2a \Rightarrow T = 20.2\,\text{N}$

৩. কেন্দ্রাতিগ ছদ্মবল $\vec{F}_{cf} = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = m\Omega^2\vec{r}$

$\vec{F}_{cf} = 0.5(4)^2(2\hat{i}) = 16\hat{i}\,\text{N}$

কোরিওলিস ছদ্মবল $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}$

$\vec{F}_{cor} = -2(0.5)(4\hat{k} \times 3\hat{j}) = 12\hat{i}\,\text{N}$

অয়লার ছদ্মবল $\vec{F}_E = -m\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right) \times \vec{r}$

$\vec{F}_E = -0.5(1.5\hat{k} \times 2\hat{i}) = -1.5\hat{j}\,\text{N}$

মোট ছদ্মবল $\vec{F}_{pseudo} = 28\hat{i} - 1.5\hat{j}\,\text{N}$

কেন্দ্রাতিগ বল কেন্দ্র থেকে বাইরের দিকে, কোরিওলিস বল আপেক্ষিক বেগের ওপর লম্ব, আর অয়লার বল কৌণিক ত্বরণের কারণে সৃষ্টি হয়।

৪. ভূমির প্রসঙ্গ কাঠামোয় অনুভূমিক বেগে ট্রাকের বেগ যোগ হয়, কিন্তু উল্লম্ব বেগ অপরিবর্তিত থাকে।

$u_x = 15 + 20\cos 30^\circ = 32.32\,\text{ms}^{-1}$, $u_y = 20\sin 30^\circ = 10\,\text{ms}^{-1}$

$10 + 10t - 4.9t^2 = 0 \Rightarrow t = 2.78\,\text{s}$

$x = u_x t = 32.32(2.78) = 89.8\,\text{m}$

৫. শক্তি সংরক্ষণ থেকে নিচে ও শীর্ষের দ্রুতির সম্পর্ক পাই।

$v_{top}^2 = v_{bottom}^2 - 4gR = 20^2 - 4(9.8)(5) = 204$

$v_{top} = 14.28\,\text{ms}^{-1}$

$N_{bottom} - mg = \frac{mv_{bottom}^2}{R} \Rightarrow N_{bottom} = mg + 1000\left(\frac{400}{5}\right) = 89.8\,\text{kN}$

$N_{top} + mg = \frac{mv_{top}^2}{R} \Rightarrow N_{top} = 1000\left(\frac{204}{5} - 9.8\right) = 31.0\,\text{kN}$

দুই অবস্থানেই অভিলম্ব বলের দিক বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে; নিচে তা ঊর্ধ্বমুখী এবং শীর্ষে নিম্নমুখী।

৬. $\vec{J} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = 0.20[(-10-15)\hat{i} + (6-6)\hat{j}] = -5\hat{i}\,\text{Ns}$

$\vec{F}_{avg} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{-5\hat{i}}{0.020} = -250\hat{i}\,\text{N}$

দেয়াল কেবল লম্ব উপাংশ বদলায়; তাই স্পর্শকীয় উপাংশের ঘাত ও গড় বল শূন্য।

$|\vec{J}| = 5\,\text{Ns}$, $|\vec{F}_{avg}| = 250\,\text{N}$

৭. বাহ্যিক অনুভূমিক বল নেই বলে ভরকেন্দ্রের সরণ শূন্য। নৌকার সরণ x বিপরীত দিকে ধরা হলো।

$240x + 80(x+2.5) = 0 \Rightarrow x = -\frac{80(2.5)}{240+80} = -0.625\,\text{m}$

ব্যক্তির ভূমির সাপেক্ষে সরণ $= 2.5 - 0.625 = 1.875\,\text{m}$

নৌকার দৈর্ঘ্য ফলাফলে প্রভাব ফেলে না; ব্যক্তি নৌকার সাপেক্ষে যতটা হেঁটেছেন, সেই আপেক্ষিক সরণই ব্যবহৃত হয়েছে।

৮. $J = \int_0^3 (6-2t)\,dt = \left[6t - t^2\right]_0^3 = 9\,\text{Ns}$

$\Delta v = \frac{J}{m} = \frac{9}{2} = 4.5\,\text{ms}^{-1}$

$v(3) = 1 + 4.5 = 5.5\,\text{ms}^{-1}$ ডানদিকে

বলটি $t = 3\,\text{s}$-এ শূন্য হলেও মোট ঘাত শূন্য নয়; পুরো সময়ের বল-সময় ক্ষেত্রফলই ঘাত দেয়।

৯. $\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t 4t\,dt = 2 + 2t^2$
$\omega(3) = 2 + 2(9) = 20\,\text{rads}^{-1}$
$\theta = \int_0^3 (2 + 2t^2)\,dt = 2(3) + \frac{2}{3}(27) = 24\,\text{rad}$
$\alpha(3) = 4(3) = 12\,\text{rads}^{-2}$
$a_t = \alpha R = 12(0.30) = 3.6\,\text{ms}^{-2}$
$a_c = \omega^2 R = 20^2(0.30) = 120\,\text{ms}^{-2}$

১০. প্রতিটি ভরের অক্ষ থেকে দূরত্ব, $r = \frac{0.40}{\sqrt{2}}\,\text{m}$
$I = 4mr^2 = 4(1)\left(\frac{0.40^2}{2}\right) = 0.32\,\text{kg m}^2$
$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{2}{0.32} = 6.25\,\text{rads}^{-2}$
$\omega = \alpha t = 6.25(5) = 31.25\,\text{rads}^{-1}$
$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = 156.25\,\text{J}$

১১. নিরেট সিলিন্ডারের জড়তার ভ্রামক $I = \frac{1}{2}mR^2$; বিশুদ্ধ গড়ানোর শর্তে $v = R\omega$।
$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2$
$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = \sqrt{\frac{4(9.8)(1.4)}{3}} = 4.28\,\text{ms}^{-1}$
$\omega = \frac{v}{R} = \frac{4.28}{0.20} = 21.4\,\text{rads}^{-1}$
$a = \frac{g\sin 37^\circ}{1+\frac{1}{2}} = 3.92\,\text{ms}^{-2}$
$f = mg\sin 37^\circ - ma = 7.84\,\text{N}$
ঘর্ষণটি ঢালের ঊর্ধ্বমুখী এবং এটি সিলিন্ডারের ঘূর্ণন ত্বরান্বিত করে; বিশুদ্ধ গড়ানোর জন্য স্থিতি ঘর্ষণ প্রয়োজন।

১২. মইয়ের ওপর দেয়ালের প্রতিক্রিয়া R অনুভূমিক এবং মেঝের অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া $N = mg$। নিচের প্রান্তের সাপেক্ষে টর্ক সাম্য লিখি।
$R(L\sin 60^\circ) = mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos 60^\circ$
$R = \frac{mg\cos 60^\circ}{2\sin 60^\circ} = \frac{mg}{2\sqrt{3}}$
মেঝেতে ঘর্ষণ $f = R$ এবং $f \le \mu_s mg$
$\mu_{s,\min} = \frac{R}{mg} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.289$

১৩. প্রবাহের ক্ষেত্রফল থেকে প্রতি সেকেন্ডে আঘাতকারী ভর নির্ণয় করি।
$A = \pi(0.0075)^2 = 1.767 \times 10^{-4}\,\text{m}^2$
$\dot{m} = \varrho A v = 1000(1.767\times10^{-4})(30) = 5.30\,\text{kgs}^{-1}$
$F = \dot{m}(v_{in} - v_{out}) = 5.30[30 - (-30)] = 318\,\text{N}$
জেটের ভরবেগের দিক সম্পূর্ণ বিপরীত হওয়ায় ভরবেগ পরিবর্তনের হার $\dot{m}$-এর সঙ্গে $60\,\text{ms}^{-1}$ গুণ হয়।

১৪. $m(t) = 10 + 0.50t$; অনুভূমিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে বলে $mv = m_0 v_0 = 20\,\text{kg ms}^{-1}$
$v(4) = \frac{20}{10+0.50(4)} = 1.667\,\text{ms}^{-1}$
$m\frac{dv}{dt} = -v\frac{dm}{dt} \Rightarrow a = -\frac{(0.50)(1.667)}{12} = -0.0694\,\text{ms}^{-2}$
স্থির বালি কার্টে যুক্ত হওয়ার সময় অনুভূমিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে, কিন্তু কার্টের মোট ভর বাড়ায় বেগ কমে।

১৫. সমান ভর ও দ্বিতীয় কণার প্রাথমিক স্থির অবস্থার জন্য ভরবেগ ও গতিশক্তি সংরক্ষণ একসঙ্গে ব্যবহার করি।
$u^2 = v_1^2 + v_2^2$
ভরবেগের y-দিক থেকে, $0 = v_1\sin 30^\circ - v_2\sin\phi$
x ও শক্তির সমীকরণ থেকে, $v_1 = u\cos 30^\circ = 8.66\,\text{ms}^{-1}$, $v_2 = u\sin 30^\circ = 5.00\,\text{ms}^{-1}$
$\phi = 60^\circ$; দুই চূড়ান্ত বেগ পরস্পর লম্ব।

১৬. কীলকের ত্বরণ A হলে, ব্লকের ওপর অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া কীলকের অভ্যন্তরীণ প্রসঙ্গ কাঠামোয় হিসাব করি।
$N = m(g\cos 30^\circ + A\sin 30^\circ)$
ঢাল বরাবর সাম্যের জন্য, $|m(g\sin 30^\circ - A\cos 30^\circ)| \le \mu_s N$
নিচের সীমায় ($A_{\min}$, ঘর্ষণ ঊর্ধ্বমুখী সর্বোচ্চ মানে), $m(g\sin 30^\circ - A\cos 30^\circ) = \mu_s m(g\cos 30^\circ + A\sin 30^\circ)$
$A_{\min} = \frac{g(\sin 30^\circ - \mu_s\cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ + \mu_s\sin 30^\circ} = 3.32\,\text{ms}^{-2}$
ওপরের সীমায় ($A_{\max}$, ঘর্ষণ নিম্নমুখী সর্বোচ্চ মানে), $m(A\cos 30^\circ - g\sin 30^\circ) = \mu_s m(g\cos 30^\circ + A\sin 30^\circ)$
$A_{\max} = \frac{g(\sin 30^\circ + \mu_s\cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ - \mu_s\sin 30^\circ} = 8.62\,\text{ms}^{-2}$
কীলক ও ব্লক একসঙ্গে একই ত্বরণে চলে বলে, $P = (M+m)A$, যেখানে $M + m = 8\,\text{kg}$।
$P_{\min} = 8(3.32) = 26.5\,\text{N}$, $P_{\max} = 8(8.62) = 68.9\,\text{N}$
এই সীমার মধ্যে ঘর্ষণ প্রয়োজনমতো দিক বদলাতে পারে; সীমা দুটির বাইরে ব্লক কীলকের তুলনায় পিছলে যাবে।

১৭. $v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6t \Rightarrow v(2) = 12\,\text{ms}^{-1}$
$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 6 \Rightarrow a(2) = 18\,\text{ms}^{-2}$
$F = ma = 2(18) = 36\,\text{N}$
$v(0) = 0$; কাজ-শক্তি উপপাদ্য থেকে, $W_{\text{net}} = \Delta K = \frac{1}{2}(2)(12^2 - 0) = 144\,\text{J}$
লব্ধি বলের কাজ নির্ণয়ে সরণ-ভিত্তিক ইন্টিগ্রেশন না করেও কাজ-শক্তি উপপাদ্য ব্যবহার করা যায়।

১৮. $I = mr^2 = 2(0.5)^2 = 0.50\,\text{kg m}^2$, $\tau = F\,r = 4(0.5) = 2\,\text{Nm}$
$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{2}{0.50} = 4\,\text{rads}^{-2}$
$\omega = 6 + 4(3) = 18\,\text{rads}^{-1}$
$\Delta L = I(\omega - \omega_0) = 0.50(12) = 6\,\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 18 + 18 = 36\,\text{rad}$
$W = \tau\theta = 72\,\text{J}$

১৯. $x_{cm} = \frac{2(0)+3(4)+5(0)}{10} = 1.2\,\text{m}$
$y_{cm} = \frac{2(0)+3(0)+5(3)}{10} = 1.5\,\text{m}$
$\vec{F}_{ext} = 3\hat{i} + (-\hat{i} + 2\hat{j}) + 4\hat{j} = 2\hat{i} + 6\hat{j}\,\text{N}$
$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M} = \frac{2\hat{i}+6\hat{j}}{10} = 0.2\hat{i} + 0.6\hat{j}\,\text{ms}^{-2}$
অভ্যন্তরীণ বলগুলো পরস্পরকে বাতিল করে; ভরকেন্দ্রের ত্বরণ শুধু মোট বাহ্যিক বলের ওপর নির্ভর করে।

২০. প্রাথমিক ভরবেগ $= (100 + 50)(2) = 300\,\text{kg ms}^{-1}$
$v_{person} - v_{cart} = 4$, $50v_{person} + 100v_{cart} = 300$
দুই সমীকরণ সমাধান করে, $v_{cart} = 0.667\,\text{ms}^{-1}$, $v_{person} = 4.667\,\text{ms}^{-1}$
$K_i = \frac{1}{2}(150)(2)^2 = 300\,\text{J}$
$K_f = \frac{1}{2}(100)(0.667)^2 + \frac{1}{2}(50)(4.667)^2 = 566.7\,\text{J}$
গতিশক্তির বৃদ্ধি $= 566.7 - 300 = 266.7\,\text{J}$
অনুভূমিক ভরবেগ সংরক্ষিত হলেও ব্যক্তির পেশিশক্তি ব্যবহৃত হওয়ায় মোট গতিশক্তি বৃদ্ধি পেয়েছে।

গণিত

২০০ নম্বর

২১. ধরি, $z^6 = -729$
আমরা জানি, $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$
সাধারণ আকারে, $-1 = e^{i(2k\pi+\pi)}$ যেখানে $k \in \mathbb{Z}$
$\therefore z^6 = 729e^{i(2k\pi+\pi)} = 3^6e^{i(2k\pi+\pi)}$
উভয়পক্ষে $\frac{1}{6}$ ঘাত নিলে ডি-ময়াভারের সূত্র অনুযায়ী পাই:
$z = (3^6)^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{6}}$
$\Rightarrow z = 3\left[\cos\left(\frac{2k+1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2k+1}{6}\pi\right)\right]$
৬টি মূল পাওয়ার জন্য $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ বসিয়ে পাই:
$k = 0 \Rightarrow z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
$k = 1 \Rightarrow z_2 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = 3(0 + i) = 3i$
$k = 2 \Rightarrow z_3 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$
$k = 3 \Rightarrow z_4 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$
$k = 4 \Rightarrow z_5 = 3\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = 3(0 - i) = -3i$
$k = 5 \Rightarrow z_6 = 3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

২২. ধরি, $z = x + iy$
প্রদত্ত সমীকরণ: $|x + iy - 5| - |x + iy + 5| = 8$
$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 8$
$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$
$\Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 64 + 16\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + (x+5)^2 + y^2$
$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 64 + 16\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + x^2 + 10x + 25$
$\Rightarrow -20x - 64 = 16\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$
$\Rightarrow -5x - 16 = 4\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$
$\Rightarrow 25x^2 + 160x + 256 = 16(x^2 + 10x + 25 + y^2)$
$\Rightarrow 25x^2 + 160x + 256 = 16x^2 + 160x + 400 + 16y^2$
$\Rightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144$
$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
এটি একটি অধিবৃত্তের প্রমিত সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ নির্দেশ করে। (প্রমাণিত)
এখানে $a^2 = 16$ এবং $b^2 = 9$
উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$।

২৩. দেওয়া আছে, $(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots$
এই সমীকরণে $x = i$ বসিয়ে পাই:
$(1+i)^n = c_0 + c_1i + c_2i^2 + c_3i^3 + c_4i^4 + \dots$
আমরা জানি, $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ ইত্যাদি।
$\therefore (1+i)^n = c_0 + ic_1 - c_2 - ic_3 + c_4 + \dots$
$\Rightarrow (1+i)^n = (c_0 - c_2 + c_4 - \dots) + i(c_1 - c_3 + c_5 - \dots)$ **.....(i)**
মডুলাস $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ এবং আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$
$\therefore 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
ডি-ময়াভারের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই:
$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4} + i2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$ **.....(ii)**
(i) এবং **(ii)** নং সমীকরণ তুলনা করে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করি:
বাস্তব অংশ: $c_0 - c_2 + c_4 - \dots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ **(প্রমাণিত)**
কাল্পনিক অংশ: $c_1 - c_3 + c_5 - \dots = 2^{\frac{n}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ **(প্রমাণিত)**

২৪. প্রদত্ত সমীকরণ: $|z-(4+3i)| = 2$
এটি আরগ্যান্ড সমতলে এমন একটি বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $C(4,3)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = 2$।
বৃত্তের উপরিস্থ যেকোনো বিন্দু z হতে মূলবিন্দু $O(0,0)$ এর দূরত্ব হলো $|z|$।
জ্যামিতিক ধর্ম অনুসারে, বৃত্তের কেন্দ্র হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব d হলে,
সর্বোচ্চ দূরত্ব $= d + R$
সর্বনিম্ন দূরত্ব $= |d - R|$
কেন্দ্র $C(4,3)$ হতে মূলবিন্দু $O(0,0)$ এর দূরত্ব,
$d = OC = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
$\therefore$ মূলবিন্দু হতে বৃত্তের উপরিস্থ বিন্দুর সর্বোচ্চ দূরত্ব $= 5 + 2 = 7$ একক
এবং সর্বনিম্ন দূরত্ব $= 5 - 2 = 3$ একক।

২৫. দেওয়া আছে, $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$
$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 2\cos\theta$
$\Rightarrow x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$
এটি x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সমাধান করে পাই:
$x = \frac{-(-2\cos\theta) \pm \sqrt{(-2\cos\theta)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$
$= \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{-(1-\cos^2\theta)} = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$
ধরি, $x = \cos\theta + i\sin\theta$
(যদি আমরা ঋণাত্মক চিহ্নটি ধরি, তবুও প্রমাণটি একইভাবে মিলে যাবে**)**।
ডি-ময়াভারের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই:
$x^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ **.....(i)**
এবং $\frac{1}{x^n} = x^{-n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$
$\Rightarrow \frac{1}{x^n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$ **.....(ii)**
(i) এবং **(ii)** যোগ করে পাই:
$x^n + \frac{1}{x^n} = (\cos n\theta + i\sin n\theta) + (\cos n\theta - i\sin n\theta)$
$= 2\cos n\theta$ **(প্রমাণিত)**

২৬. ধরি, $w = \frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$
কোনো জটিল সংখ্যা w সম্পূর্ণ কাল্পনিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\bar{w} = -w$ হয়।
দেওয়া আছে, $|z_1| = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1\bar{z_1} = 1 \Rightarrow \bar{z_1} = \frac{1}{z_1}$
একইভাবে, $|z_2| = 1 \Rightarrow \bar{z_2} = \frac{1}{z_2}$
এখন w এর অনুবন্ধী নির্ণয় করি:
$\bar{w} = \overline{\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}+\bar{z_2}}{\bar{z_1}-\bar{z_2}}$
$\Rightarrow \bar{w} = \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_2+z_1}{z_1z_2}}{\frac{z_2-z_1}{z_1z_2}} = \frac{z_1+z_2}{-(z_1-z_2)}$
$\Rightarrow \bar{w} = -\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)$
$\Rightarrow \bar{w} = -w$
যেহেতু $\bar{w} = -w$, সুতরাং $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ একটি সম্পূর্ণ কাল্পনিক সংখ্যা। **(প্রমাণিত)**

২৭. ধরি, $z = x + iy$

প্রদত্ত সমীকরণ: $\left|\frac{x+iy-3}{x+iy+3}\right| = 2$

$\Rightarrow |(x-3)+iy| = 2|(x+3)+iy|$

$\Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4[(x+3)^2 + y^2]$

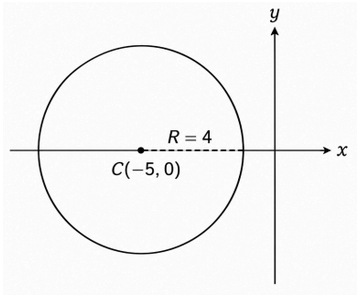
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4(x^2 + 6x + 9 + y^2)$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 30x + 27 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$

এটি একটি বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর অনুরূপ। **(প্রমাণিত)**



কেন্দ্র $(-g, -f) = (-5, 0)$

ব্যাসার্ধ $R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 - 9} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ একক।

২৮. ধরি, জটিল সংখ্যাটি $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore z = r\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{r}{\sqrt{2}} + i\frac{r}{\sqrt{2}}$

দেওয়া আছে, $|z - 6| = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left|\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - 6\right) + i\frac{r}{\sqrt{2}}\right| = 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{r}{\sqrt{2}} - 6\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = 18$

$\Rightarrow \frac{r^2}{2} - 6\sqrt{2}r + 36 + \frac{r^2}{2} = 18$

$\Rightarrow r^2 - 6\sqrt{2}r + 18 = 0$

$\Rightarrow (r - 3\sqrt{2})^2 = 0$

$\Rightarrow r = 3\sqrt{2}$

এখন r এর মান z এ বসিয়ে পাই:

$z = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3 + 3i$।

২৯. ধরি, $y = \frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$

$\Rightarrow y(x^2 + 2x + 4) = x^2 - 2x + 4$

$\Rightarrow yx^2 + 2yx + 4y - x^2 + 2x - 4 = 0$

$\Rightarrow (y-1)x^2 + 2(y+1)x + 4(y-1) = 0$ **.....(i)**

যেহেতু x বাস্তব সংখ্যা, তাই **(i)** নং সমীকরণটিকে x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ধরলে এর নিশ্চায়ক $D \geq 0$ হবে।

$D = b^2 - 4ac \geq 0$

$\Rightarrow \{2(y+1)\}^2 - 4(y-1)\{4(y-1)\} \geq 0$

$\Rightarrow 4(y+1)^2 - 16(y-1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow (y+1)^2 - \{2(y-1)\}^2 \geq 0$

$\Rightarrow \{(y+1) - (2y-2)\}\{(y+1) + (2y-2)\} \geq 0$

$\Rightarrow (3-y)(3y-1) \geq 0$

$\Rightarrow (y-3)(3y-1) \leq 0$

অসমতার নিয়মানুযায়ী, এর সমাধান হলো: $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$

$\therefore f(x)$ এর মান $\frac{1}{3}$ এবং 3 এর মধ্যবর্তী হবে। **(দেখানো হলো)**

৩০. প্রদত্ত বিন্দুগুলো হলো: $A(z), B(iz)$ এবং $C(z+iz)$।
এখন, ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি:
$AB = |z - iz| = |z(1-i)| = |z| \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}|z|$
$BC = |iz - (z+iz)| = |-z| = |z|$
$CA = |(z+iz) - z| = |iz| = |i| \cdot |z| = 1 \cdot |z| = |z|$
এখানে, $BC = CA = |z|$
সুতরাং, ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।
আবার, বাহুগুলোর বর্গের ক্ষেত্রে:
$BC^2 + CA^2 = |z|^2 + |z|^2 = 2|z|^2$
$AB^2 = (\sqrt{2}|z|)^2 = 2|z|^2$
অর্থাৎ, $BC^2 + CA^2 = AB^2$, যা পিথাগোরাসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে।
সুতরাং, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle C = 90^\circ$।
$\therefore ABC$ একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। **(প্রমাণিত)**
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা
$\Rightarrow \Delta = \frac{1}{2} \times BC \times CA = \frac{1}{2} \times |z| \times |z| = \frac{1}{2}|z|^2$
প্রশ্নমতে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 18 বর্গ একক।
$\therefore \frac{1}{2}|z|^2 = 18$
$\Rightarrow |z|^2 = 36$
$\Rightarrow |z| = 6$ **(যেহেতু মডুলাস সর্বদা অঋণাত্মক)**
দেওয়া আছে, z এর আর্গুমেন্ট, $\theta = \frac{\pi}{6}$
পোলার আকারের সাহায্যে আমরা লিখতে পারি:
$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
$\Rightarrow z = 6\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
$\Rightarrow z = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$
$\Rightarrow z = 3\sqrt{3} + 3i$।

৩১. প্রদত্ত সমীকরণ: $x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$
সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হওয়ায় মূলগুলোর যোগফল:
$\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -2$
নির্ণেয় সমীকরণের মূলগুলোকে y চলক দ্বারা প্রকাশ করলে,
$y = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$
আমরা জানি, $\beta + \gamma = -2 - \alpha$
$\therefore y = \frac{\alpha}{-2-\alpha}$
এখন α কে y এর মাধ্যমে প্রকাশ করি:
$y(-2-\alpha) = \alpha$
$\Rightarrow -2y - \alpha y = \alpha$
$\Rightarrow \alpha + \alpha y = -2y$
$\Rightarrow \alpha(1+y) = -2y$
$\Rightarrow \alpha = \frac{-2y}{y+1}$
যেহেতু α মূল সমীকরণটির একটি মূল, তাই এটি $x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$ কে সিদ্ধ করবে।
অর্থাৎ, সমীকরণে $x = \frac{-2y}{y+1}$ বসিয়ে পাই:
$\left(\frac{-2y}{y+1}\right)^3 + 2\left(\frac{-2y}{y+1}\right)^2 - 3\left(\frac{-2y}{y+1}\right) + 4 = 0$
উভয়পক্ষকে $(y+1)^3$ দ্বারা গুণ করে পাই:
$-8y^3 + 2(4y^2)(y+1) - 3(-2y)(y+1)^2 + 4(y+1)^3 = 0$
$\Rightarrow -8y^3 + 8y^2(y+1) + 6y(y+1)^2 + 4(y+1)^3 = 0$
$\Rightarrow -8y^3 + 8y^3 + 8y^2 + 6y(y^2+2y+1) + 4(y^3+3y^2+3y+1) = 0$
$\Rightarrow 8y^2 + 6y^3 + 12y^2 + 6y + 4y^3 + 12y^2 + 12y + 4 = 0$
$\Rightarrow (6+4)y^3 + (8+12+12)y^2 + (6+12)y + 4 = 0$
$\Rightarrow 10y^3 + 32y^2 + 18y + 4 = 0$
$\therefore 5x^3 + 16x^2 + 9x + 2 = 0$।

৩২. ধরি, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি হলো α
তাহলে,
$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ **.....(i)**
$b\alpha^2 + c\alpha + a = 0$ **.....(ii)**
বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে পাই:
$\frac{\alpha^2}{ab-c^2} = \frac{\alpha}{bc-a^2} = \frac{1}{ca-b^2}$
এখান থেকে পাই:
$\alpha = \frac{bc-a^2}{ca-b^2}$ এবং $\alpha^2 = \frac{ab-c^2}{ca-b^2}$
প্রথম সম্পর্কটিকে বর্গ করে দ্বিতীয়টির সাথে সমীকৃত করি:
$\left(\frac{bc-a^2}{ca-b^2}\right)^2 = \frac{ab-c^2}{ca-b^2}$
$\Rightarrow (bc-a^2)^2 = (ab-c^2)(ca-b^2)$
$\Rightarrow b^2c^2 - 2a^2bc + a^4 = a^2bc - ab^3 - ac^3 + b^2c^2$
$\Rightarrow a^4 + ab^3 + ac^3 - 3a^2bc = 0$
$a \neq 0$ ধরে a দ্বারা ভাগ করে পাই:
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
$\Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 0$
হয় $a+b+c = 0$
অথবা, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$
যা তখনই সম্ভব যখন $a = b = c$ হয়। **(প্রমাণিত)**

৩৩. প্রদত্ত সমীকরণ $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$
সমীকরণের মূলগুলোর সম্পর্ক হতে পাই:
$\sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma = -2$
$\sum \alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$
$\alpha\beta\gamma = -4$
আমরা জানি, $\sum \alpha^2 = (\sum \alpha)^2 - 2\sum \alpha\beta$
$= (-2)^2 - 2(3) = 4 - 6 = -2$
বীজগণিতের সূত্রানুসারে আমরা জানি,
$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$
$\Rightarrow \sum \alpha^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\sum \alpha)(\sum \alpha^2 - \sum \alpha\beta)$
মান বসিয়ে পাই:
$\sum \alpha^3 - 3(-4) = (-2)(-2-3)$
$\Rightarrow \sum \alpha^3 + 12 = (-2)(-5)$
$\Rightarrow \sum \alpha^3 + 12 = 10$
$\Rightarrow \sum \alpha^3 = 10 - 12 = -2$
$\therefore \sum \alpha^3 = -2$।

৩৪. যেহেতু মূলদ্বয়ের অনুপাত $m : n$, ধরি সমীকরণটির মূলদ্বয় হলো $m\alpha$ এবং $n\alpha$
মূলদ্বয়ের যোগফল:
$m\alpha + n\alpha = -\frac{b}{a}$
$\Rightarrow \alpha(m+n) = -\frac{b}{a}$
$\Rightarrow \alpha = \frac{-b}{a(m+n)}$ **.....(i)**
মূলদ্বয়ের গুণফল:
$(m\alpha)(n\alpha) = \frac{c}{a}$
$\Rightarrow mn\alpha^2 = \frac{c}{a}$ **.....(ii)**
(i) নং হতে α এর মান **(ii)** নং এ বসিয়ে পাই:
$mn\left(\frac{-b}{a(m+n)}\right)^2 = \frac{c}{a}$
$\Rightarrow \frac{mnb^2}{a^2(m+n)^2} = \frac{c}{a}$
$\therefore mnb^2 = ac(m+n)^2$ **(প্রমাণিত)**

৩৫. যেহেতু ত্রিঘাত সমীকরণটির মূল তিনটি সমান্তর প্রগমনে **(A.P)** আছে,
ধরি, মূল তিনটি হলো: $a-d, a, a+d$
মূলগুলোর যোগফল:
$(a-d)+a+(a+d)=-\frac{-12}{1}$
$\Rightarrow 3a=12$
$\Rightarrow a=4$
যেহেতু $a=4$ সমীকরণটির একটি মূল, তাই এটি সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।
x এর স্থলে 4 বসিয়ে পাই:
$(4)^3-12(4)^2+39(4)+k=0$
$\Rightarrow 64-12(16)+156+k=0$
$\Rightarrow 64-192+156+k=0$
$\Rightarrow 28+k=0 \Rightarrow k=-28$
এখন, দুটি করে মূলের গুণফলের যোগফল হতে পাই:
$(a-d)a+a(a+d)+(a-d)(a+d)=\frac{39}{1}$
$\Rightarrow a^2-ad+a^2+ad+a^2-d^2=39$
$\Rightarrow 3a^2-d^2=39$
এখানে $a=4$ বসিয়ে পাই:
$3(4)^2-d^2=39$
$\Rightarrow 3(16)-d^2=39$
$\Rightarrow 48-d^2=39$
$\Rightarrow d^2=48-39=9$
$\Rightarrow d=\pm 3$
d এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন, মূলগুলো একই আসবে।
$d=3$ হলে মূলগুলো:
$4-3, 4, 4+3$
অর্থাৎ, $1, 4, 7$
$\therefore k$ এর মান -28 এবং নির্ণেয় সমাধান **(মূলগুলো):** $1, 4, 7$।

৩৬. আমরা জানি, বাস্তব সহগবিশিষ্ট সমীকরণে জটিল মূলগুলো সর্বদা অনুবন্ধী জোড়ায় **(Conjugate pairs)** থাকে।
যেহেতু সমীকরণটির একটি মূল $2-i\sqrt{3}$, তাই অপর একটি মূল অবশ্যই $2+i\sqrt{3}$ হবে।
ধরি, ত্রিঘাত সমীকরণটির তৃতীয় মূলটি হলো α।
প্রশ্নমতে, মূলগুলোর যোগফল $=5$
$\therefore (2-i\sqrt{3})+(2+i\sqrt{3})+\alpha=5$
$\Rightarrow 4+\alpha=5$
$\Rightarrow \alpha=1$
তাহলে সমীকরণটির মূল তিনটি হলো: $1, 2-i\sqrt{3}$ এবং $2+i\sqrt{3}$।
জটিল মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত দ্বিঘাত উৎপাদক:
x^2- (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x+$ (মূলদ্বয়ের গুণফল) $=0$
$\Rightarrow x^2-(4)x+(2^2+(\sqrt{3})^2)=0$
$\Rightarrow x^2-4x+7=0$
$\alpha=1$ মূলের জন্য উৎপাদকটি হলো $(x-1)$।
$\therefore$ সম্পূর্ণ ত্রিঘাত সমীকরণটি হবে:
$(x-1)(x^2-4x+7)=0$
$\Rightarrow x^3-4x^2+7x-x^2+4x-7=0$
$\Rightarrow x^3-5x^2+11x-7=0$।

৩৭. দেওয়া আছে, $x^2 - 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β
$\therefore \alpha + \beta = 3$ এবং $\alpha\beta = 5$
নতুন সমীকরণের প্রথম মূল, ধরি r_1:
$r_1 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
$= 3^2 - 2(5) = 9 - 10 = -1$
নতুন সমীকরণের দ্বিতীয় মূল, ধরি r_2:
$r_2 = \alpha^{-2} + \beta^{-2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}$
$= \frac{r_1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{-1}{5^2} = -\frac{1}{25}$
নতুন সমীকরণের মূলদ্বয়ের যোগফল:
$S = r_1 + r_2 = -1 - \frac{1}{25} = -\frac{26}{25}$
নতুন সমীকরণের মূলদ্বয়ের গুণফল:
$P = r_1 \cdot r_2 = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{25}\right) = \frac{1}{25}$
নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - Sx + P = 0$
$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{26}{25}\right)x + \frac{1}{25} = 0$
$\Rightarrow x^2 + \frac{26}{25}x + \frac{1}{25} = 0$
$\Rightarrow 25x^2 + 26x + 1 = 0$।

৩৮. প্রদত্ত সমীকরণ: $px^2 + qx + r = 0$
এর মূলদ্বয় a, b হওয়ায়:
মূলদ্বয়ের যোগফল, $a + b = -\frac{q}{p}$
মূলদ্বয়ের গুণফল, $ab = \frac{r}{p}$
ধরি, নতুন সমীকরণের মূলদ্বয় $A = a^2 + a$ এবং $B = b^2 + b$
নতুন মূলদ্বয়ের যোগফল:
$A + B = (a^2 + b^2) + (a + b) = (a + b)^2 - 2ab + (a + b)$
$= \left(-\frac{q}{p}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{p}\right) + \left(-\frac{q}{p}\right) = \frac{q^2}{p^2} - \frac{2r}{p} - \frac{q}{p} = \frac{q^2-2pr-pq}{p^2}$
নতুন মূলদ্বয়ের গুণফল:
$AB = (a^2 + a)(b^2 + b) = a^2b^2 + a^2b + ab^2 + ab$
$= (ab)^2 + ab(a + b) + ab = \left(\frac{r}{p}\right)^2 + \frac{r}{p}\left(-\frac{q}{p}\right) + \frac{r}{p}$
$= \frac{r^2}{p^2} - \frac{qr}{p^2} + \frac{r}{p} = \frac{r^2-qr+pr}{p^2}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - (A + B)x + AB = 0$
$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{q^2-pq-2pr}{p^2}\right)x + \frac{r^2-qr+pr}{p^2} = 0$
$\Rightarrow p^2x^2 - (q^2 - pq - 2pr)x + (r^2 - qr + pr) = 0$

নিশ্চায়কের অনুপাত নির্ণয়:
$Ax^2 + Bx + C = 0$ আকারের কোনো সমীকরণের মূলদ্বয় r_1, r_2 হলে, নিশ্চায়ক $\Delta = B^2 - 4AC = A^2(r_1 - r_2)^2$।
প্রদত্ত সমীকরণের ক্ষেত্রে, $\Delta_{old} = p^2(a - b)^2$
নতুন সমীকরণের ক্ষেত্রে (যার সহগ p^2), $\Delta_{new} = (p^2)^2(A - B)^2 = p^4(A - B)^2$
$\therefore \frac{\Delta_{new}}{\Delta_{old}} = \frac{p^4(A-B)^2}{p^2(a-b)^2} = p^2 \cdot \frac{(A-B)^2}{(a-b)^2}$
এখন, $A - B = (a^2 + a) - (b^2 + b) = (a^2 - b^2) + (a - b) = (a - b)(a + b + 1)$
$\therefore \frac{(A-B)^2}{(a-b)^2} = (a + b + 1)^2$
$\therefore \frac{\Delta_{new}}{\Delta_{old}} = p^2(a + b + 1)^2$
যেহেতু $a + b = -\frac{q}{p}$, তাই $a + b + 1 = 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}$
$\therefore \frac{\Delta_{new}}{\Delta_{old}} = p^2 \cdot \frac{(p-q)^2}{p^2} = (p - q)^2$।

৩৯. ধরি, সমীকরণটির মূল তিনটি হলো α, α এবং β (যেহেতু দুটি মূল সমান)।
মূলগুলোর যোগফল: $\alpha + \alpha + \beta = -3p \Rightarrow \beta = -3p - 2\alpha$ **.....(i)**
দুটি করে মূলের গুণফলের যোগফল: $\alpha \cdot \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta = 3q \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta = 3q$ **.....(ii)**
মূলত্রয়ের গুণফল: $\alpha \cdot \alpha \cdot \beta = -r \Rightarrow \alpha^2\beta = -r$ **.....(iii)**
(i) নং হতে β এর মান **(ii)** নং এ বসিয়ে পাই:
$\alpha^2 + 2\alpha(-3p - 2\alpha) = 3q$
$\Rightarrow \alpha^2 - 6p\alpha - 4\alpha^2 = 3q$
$\Rightarrow -3\alpha^2 - 6p\alpha = 3q$
$\Rightarrow \alpha^2 + 2p\alpha + q = 0$ **.....(iv)**
আবার, **(i)** নং হতে β এর মান **(iii)** নং এ বসিয়ে পাই:
$\alpha^2(-3p - 2\alpha) = -r$
$\Rightarrow -3p\alpha^2 - 2\alpha^3 = -r$
$\Rightarrow 2\alpha^3 + 3p\alpha^2 = r$
(iv) নং হতে আমরা জানি, $\alpha^2 = -2p\alpha - q$। সুতরাং $\alpha^3 = \alpha(-2p\alpha - q) = -2p\alpha^2 - q\alpha$
মানগুলো বসিয়ে পাই:
$2(-2p\alpha^2 - q\alpha) + 3p\alpha^2 = r$
$\Rightarrow -4p\alpha^2 - 2q\alpha + 3p\alpha^2 = r$
$\Rightarrow -p\alpha^2 - 2q\alpha = r$
$\alpha^2 = -2p\alpha - q$ পুনরায় বসিয়ে পাই:
$-p(-2p\alpha - q) - 2q\alpha = r$
$\Rightarrow 2p^2\alpha + pq - 2q\alpha = r$
$\Rightarrow 2(p^2 - q)\alpha = r - pq$
$\Rightarrow \alpha = \frac{r-pq}{2(p^2-q)}$ **.....(v)**
যেহেতু α সমীকরণ **(iv)** এর একটি মূল, তাই **(v)** নং এর মান **(iv)** এ বসিয়ে পাই:
$\left(\frac{r-pq}{2(p^2-q)}\right)^2 + 2p\left(\frac{r-pq}{2(p^2-q)}\right) + q = 0$
$\Rightarrow (r - pq)^2 + 4p(r - pq)(p^2 - q) + 4q(p^2 - q)^2 = 0$
এটিই হলো নির্ণেয় শর্ত।

৪০. প্রদত্ত সমীকরণের মূলগুলো হলো $x = \alpha, \beta, \gamma$
নির্ণেয় সমীকরণের মূলগুলোকে y চলক দ্বারা প্রকাশ করলে,
$y = \frac{1+x}{1-x}$
এখন x কে y এর মাধ্যমে প্রকাশ করি:
$y(1 - x) = 1 + x$
$\Rightarrow y - yx = 1 + x$
$\Rightarrow x + yx = y - 1$
$\Rightarrow x(y + 1) = y - 1$
$\Rightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$
যেহেতু x মূল সমীকরণটির একটি মূল, তাই এটি $x^3 - x - 1 = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।
সমীকরণে $x = \frac{y-1}{y+1}$ বসিয়ে পাই:
$\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 - \left(\frac{y-1}{y+1}\right) - 1 = 0$
$\Rightarrow (y - 1)^3 - (y - 1)(y + 1)^2 - (y + 1)^3 = 0$
$\Rightarrow (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) - (y - 1)(y^2 + 2y + 1) - (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) = 0$
$\Rightarrow (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) - (y^3 + 2y^2 + y - y^2 - 2y - 1) - (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) = 0$
$\Rightarrow y^3 - 3y^2 + 3y - 1 - y^3 - y^2 + y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y - 1 = 0$
$\Rightarrow -y^3 - 7y^2 + y - 1 = 0$
$\Rightarrow y^3 + 7y^2 - y + 1 = 0$
y এর স্থলে x বসিয়ে নির্ণেয় সমীকরণ পাই:
$x^3 + 7x^2 - x + 1 = 0$।

রসায়ন

২০০ নম্বর

৪১. মূলনীতি: অম্লীয় মাধ্যমে $KMnO_4$ একটি তীব্র জারক হিসেবে Fe^{2+} কে Fe^{3+} এ জারিত করে। $KMnO_4$ নিজেই স্বয়ং-নির্দেশক।
জারণ অর্ধ-বিক্রিয়া: $5 \times (Fe^{2+} \rightarrow Fe^{3+} + e^-)$
বিজারণ অর্ধ-বিক্রিয়া: $MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$
সর্বমোট সমীকরণ: $MnO_4^- + 5Fe^{2+} + 8H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 4H_2O$

৪২. $n(HCl)_{\text{মোট}} = 0.050 \times 0.20 = 0.0100\,\text{mol}$
$n(HCl)_{\text{অতিরিক্ত}} = 0.0164 \times 0.15 = 2.46 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$Mg(OH)_2$ দ্বারা ব্যবহৃত $HCl = 0.0100 - 2.46 \times 10^{-3} = 7.54 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$Mg(OH)_2 + 2HCl \rightarrow MgCl_2 + 2H_2O$
$n(Mg(OH)_2) = \frac{7.54 \times 10^{-3}}{2} = 3.77 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$m(Mg(OH)_2) = 3.77 \times 10^{-3} \times 58.32 = 0.220\,\text{g}$
শতকরা বিশুদ্ধতা $= \frac{0.220}{0.50} \times 100 = 44.0\%$

৪৩. $n(H^+) = 2 \times (0.025 \times 0.10) = 5.0 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$n(OH^-) = (0.035 \times 0.12) + 2 \times (0.010 \times 0.05) = 4.2 \times 10^{-3} + 1.0 \times 10^{-3} = 5.2 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$BaSO_4$ অধঃক্ষেপ পৃথক হলেও H^+ ও OH^--এর মোট পরিমাণে তা প্রভাব ফেলে না, কারণ Ba^{2+} ও SO_4^{2-} নিরপেক্ষ আয়ন।
অবশিষ্ট $OH^- = 5.2 \times 10^{-3} - 5.0 \times 10^{-3} = 2.0 \times 10^{-4}\,\text{mol}$
$[OH^-] = \frac{2.0 \times 10^{-4}}{0.100} = 2.0 \times 10^{-3}\,\text{M}$
$pOH = -\log(2.0 \times 10^{-3}) = 2.70$
$pH = 14 - 2.70 = 11.30$

৪৪. $2Cu^{2+} + 4I^- \rightarrow 2CuI + I_2$, $I_2 + 2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$
$n(Na_2S_2O_3) = 0.03240 \times 0.100 = 3.24 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
সামগ্রিক স্টয়কিওমেট্রি থেকে, $1\,\text{mol}\,Cu^{2+} \equiv 1\,\text{mol}\,Na_2S_2O_3$, তাই $n(Cu) = 3.24 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$m(Cu) = 3.24 \times 10^{-3} \times 63.55 = 0.2059\,\text{g}$
শতকরা হার $= \frac{0.2059}{2.00} \times 100 = 10.30\%$

৪৫. গাঢ় এসিডের মোলারিটি, $S_1 = \frac{10 \times 70.0 \times 1.42}{63.01} = 15.77\,\text{M}$
লঘুকরণ সূত্র $V_1S_1 = V_2S_2$ থেকে, $V_1 \times 15.77 = 2.50 \times 0.10$
$V_1 = \frac{0.250}{15.77} = 0.01585\,\text{L} = 15.85\,\text{mL}$
লঘু দ্রবণের ঘনমাত্রা, $\text{ppm} = 0.10\,\text{M} \times 63.01\,\text{gmol}^{-1} \times 1000 = 6301\,\text{ppm}$

৪৬. KOH শোষিত আয়তনই CO_2-এর আয়তন, $V\,(CO_2) = 60.0 - 30.0 = 30.0\,\text{mL}$
C_xH_y ধরলে, $x = \frac{V\,(CO_2)}{V\,(\text{হাইড্রোকার্বন})} = \frac{30.0}{10.0} = 3$
আয়তন সংকোচন $= (10.0 + 75.0) - 60.0 = 25.0\,\text{mL}$
$C_xH_y + \left(x + \frac{y}{4}\right)O_2 \rightarrow xCO_2 + \frac{y}{2}H_2O$ থেকে, সংকোচন $= V\,(\text{হাইড্রোকার্বন})\left(1 + \frac{y}{4}\right)$
$10\left(1 + \frac{y}{4}\right) = 25 \Rightarrow 1 + \frac{y}{4} = 2.5 \Rightarrow y = 6$
আণবিক সংকেত C_3H_6 (প্রোপিন)।

৪৭. $n(HCl)_{\text{মোট}} = 0.0400 \times 0.50 = 0.0200\,\text{mol}$
$n(HCl)_{\text{অতিরিক্ত}} = 0.0280 \times 0.20 = 5.6 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
বিক্রিয়াকৃত $HCl = 0.0200 - 5.6 \times 10^{-3} = 0.0144\,\text{mol}$
$M_2CO_3 + 2HCl \rightarrow 2MCl + H_2O + CO_2$
$n(M_2CO_3) = \frac{0.0144}{2} = 7.2 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
আণবিক ভর $M\,(M_2CO_3) = \frac{1.00}{7.2 \times 10^{-3}} = 138.89\,\text{gmol}^{-1}$
$2M + 12 + 48 = 138.89 \Rightarrow 2M = 78.89 \Rightarrow M = 39.45\,\text{gmol}^{-1}$; ধাতুটি পটাশিয়াম (K)।

৪৮. H_2SO_4-এর মিলিইকুইভ্যালেন্ট, $\text{mEq} = 50.0 \times 0.20 \times 2 = 20.0\,\text{mEq}$
$NaOH$-এর মিলিইকুইভ্যালেন্ট, $\text{mEq} = 24.0 \times 0.25 \times 1 = 6.0\,\text{mEq}$
NH_3 দ্বারা ব্যবহৃত এসিড $= 20.0 - 6.0 = 14.0\,\text{mEq}$
নাইট্রোজেনের সমতুল্য ভর $14\,\text{gmol}^{-1}$ (একটি N পরমাণু একটি H^+-এর সঙ্গে বিক্রিয়া করে) ব্যবহার করে,
$\%N = \frac{14.0 \times 0.014}{0.80} \times 100 = 24.5\%$

৪৯. মিথাইল অরেঞ্জ ধাপে ব্যবহৃত HCl মূল Na_2CO_3-এর সমপরিমাণ, তাই $n(Na_2CO_3) = 0.10 \times 0.006 = 6.0 \times 10^{-4}\,\text{mol}$
ফেনলফথ্যালিন ধাপে, $n(NaOH) + n(Na_2CO_3) = 0.10 \times 0.018 = 1.8 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$n(NaOH) = 1.8 \times 10^{-3} - 6.0 \times 10^{-4} = 1.2 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$250\,\text{mL}$-এ (১০ গুণ), $W\,(Na_2CO_3) = (6.0 \times 10^{-4} \times 10) \times 106 = 0.636\,\text{g}$
$W\,(NaOH) = (1.2 \times 10^{-3} \times 10) \times 40 = 0.480\,\text{g}$

৫০. সমতাকৃত সমীকরণ: $Cr_2O_7^{2-} + 6Fe^{2+} + 14H^+ \rightarrow 2Cr^{3+} + 6Fe^{3+} + 7H_2O$
$n(K_2Cr_2O_7) = 0.040 \times 0.05 = 2.0 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$n(FeSO_4 \cdot 7H_2O) = 6 \times 2.0 \times 10^{-3} = 0.0120\,\text{mol}$
$m(FeSO_4 \cdot 7H_2O) = 0.0120 \times 278.01 = 3.336\,\text{g}$

৫১. $\text{n}(\text{H}_2) = \frac{5.00}{2.016} = 2.480\,\text{mol}$, $\text{n}(\text{O}_2) = \frac{40.00}{32.00} = 1.250\,\text{mol}$
$2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$; $1.250\,\text{mol}$ O_2 সম্পূর্ণ বিক্রিয়ায় লাগবে $2.50\,\text{mol}$ H_2
প্রদত্ত H_2 ($2.480\,\text{mol}$) এই প্রয়োজনের চেয়ে কম, তাই H_2 লিমিটিং রিয়েক্ট্যান্ট।
উৎপন্ন $\text{H}_2\text{O} = 2.480\,\text{mol} \times 18.016\,\text{gmol}^{-1} = 44.68\,\text{g}$
ব্যবহৃত $\text{O}_2 = \frac{2.480}{2} = 1.240\,\text{mol}$, অবশিষ্ট $\text{O}_2 = 1.250 - 1.240 = 0.010\,\text{mol}$
অবশিষ্ট O_2-এর **STP** আয়তন $= 0.010 \times 22.4 = 0.224\,\text{L}$

৫২. $\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$-এর Fe^{2+}-সমতুল্য জারণ ক্ষমতা, $\text{n} = 6 \times (0.050 \times 0.04) = 0.0120\,\text{mol}$
KMnO_4-এর Fe^{2+}-সমতুল্য জারণ ক্ষমতা, $\text{n} = 5 \times (0.030 \times 0.10) = 0.0150\,\text{mol}$
মোট জারণ ক্ষমতা $= 0.0120 + 0.0150 = 0.0270\,\text{mol}$ Fe^{2+}-সমতুল্য।
কিন্তু পাত্রে মোট Fe^{2+} আছে $= 0.100 \times 0.20 = 0.0200\,\text{mol}$, যা জারণ ক্ষমতার চেয়ে কম।
অর্থাৎ বিজারক (Fe^{2+}) সম্পূর্ণ ফুরিয়ে যাবে এবং কিছু জারক ($\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ বা MnO_4^-) অবিক্রিয়িত থেকে যাবে।
যেহেতু দ্রবণে আর কোনো বিজারক অবশিষ্ট নেই (Fe^{2+} সম্পূর্ণ জারিত হয়ে Fe^{3+}-এ পরিণত হয়েছে), তাই 'অবশিষ্ট বিজারককে জারিত করতে' কোনো অক্সালিক এসিডের প্রয়োজন নেই।
অক্সালিক এসিড নিজেই একটি বিজারক; দুটি বিজারক পরস্পরের সঙ্গে বিক্রিয়া করে না।
প্রয়োজনীয় অক্সালিক এসিডের ভর $= 0\,\text{g}$।

৫৩. পাইরোগ্যাললে শোষিত গ্যাসই অবিক্রিয়িত O_2, $\text{V}\,(\text{O}_2)_{\text{অতিরিক্ত}} = 85 - 75 = 10\,\text{mL}$
ব্যবহৃত $\text{O}_2 = 50 - 10 = 40\,\text{mL}$
$2\text{CO} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{CO}_2$ বিক্রিয়া থেকে, $\text{V}\,(\text{CO}) = 2 \times 40 = 80\,\text{mL}$
মূল মিশ্রণ ছিল $100\,\text{mL}$ মাত্র, তাই $\text{CO} = 80\,\text{mL}$ হলে অবশিষ্ট CO_2 ও N_2 একত্রে $20\,\text{mL}$।
KOH-এ শোষিত মোট $\text{CO}_2 = 135 - 85 = 50\,\text{mL}$, যা CO থেকে উৎপন্ন প্রত্যাশিত $80\,\text{mL}$-এর চেয়ে কম।
এই অসঙ্গতির কারণ শীতলীকরণের সময় কিছু CO_2 আংশিকভাবে তরলীভূত/দ্রবীভূত হয়ে পরিমাপ থেকে বাদ পড়েছিল।
অবশিষ্ট $20\,\text{mL}$ (মূল মিশ্রণের CO_2 ও N_2) সমান দুই ভাগে বিভক্ত বলে ধরে নেওয়া হয়েছে।
মূল মিশ্রণের গঠন: $\text{CO} = 80\,\text{mL}$, $\text{CO}_2 = 10\,\text{mL}$, $\text{N}_2 = 10\,\text{mL}$।

৫৪. $\text{CaCO}_3 + 2\text{HCl} \rightarrow \text{CaCl}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$
$\text{n}(\text{CO}_2) = \frac{1.68}{22.4} = 0.0750\,\text{mol}$
CaCO_3 দ্বারা ব্যবহৃত $\text{HCl} = 2 \times 0.0750 = 0.150\,\text{mol}$
সরবরাহকৃত মোট $\text{HCl} = 0.100 \times 2.0 = 0.200\,\text{mol}$
অতিরিক্ত $\text{HCl} = 0.200 - 0.150 = 0.0500\,\text{mol}$
$\text{V}\,(\text{NaOH}) = \frac{0.0500}{1.0} = 0.0500\,\text{L} = 50.0\,\text{mL}$

৫৫. $\text{n}(\text{H}^+) = 2 \times (0.100 \times 0.15) + (0.050 \times 0.2) = 0.0300 + 0.0100 = 0.0400\,\text{mol}$
$\text{n}(\text{OH}^-) = 2 \times (0.100 \times 0.2) = 0.0400\,\text{mol}$
H^+ ও OH^--এর মোল সংখ্যা সমান হওয়ায় ($0.0400\,\text{mol}$), এসিড ও ক্ষার সম্পূর্ণরূপে প্রশমিত হবে।
BaSO_4 অধঃক্ষেপ পৃথক করা এই সাম্যকে প্রভাবিত করে না, কারণ Ba^{2+} ও SO_4^{2-} নিরপেক্ষ আয়ন হিসেবে কাজ করেছে।
চূড়ান্ত দ্রবণ সম্পূর্ণ প্রশমিত হওয়ায়, $\text{pH} = 7.00$।

৫৬. মূল গাঢ় দ্রবণের মোলারিটি, $\text{S}_1 = \frac{10 \times 20 \times 1.20}{40} = 6.0\,\text{M}$
লঘুকরণ সূত্র থেকে, $\text{V}_1 \times 6.0 = 500 \times 0.1 \Rightarrow \text{V}_1 = 8.33\,\text{mL}$
লঘুকৃত দ্রবণের ঘনমাত্রা, $\text{ppm} = 0.1\,\text{M} \times 40\,\text{gmol}^{-1} \times 1000 = 4000\,\text{ppm}$

৫৭. মোলারিটি, $\text{M} = \frac{10 \times 15 \times 1.10}{98} = 1.684\,\text{M}$
$100\,\text{g}$ দ্রবণে দ্রবের ভর $= 15\,\text{g}$, দ্রাবকের ভর $= 85\,\text{g} = 0.085\,\text{kg}$
দ্রবের মোল $= \frac{15}{98} = 0.153\,\text{mol}$
মোলালিটি, $\text{m} = \frac{0.153}{0.085} = 1.80\,\text{m}$

৫৮. $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 6\text{Fe}^{2+} + 14\text{H}^+ \rightarrow 2\text{Cr}^{3+} + 6\text{Fe}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$
$\text{n}(\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7) = 0.120 \times 0.02 = 2.40 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$1\,\text{mol}\,\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} \equiv 6\,\text{mol}\,\text{Fe}^{2+}$, তাই $\text{n}(\text{FeCO}_3) = 6 \times 2.40 \times 10^{-3} = 0.0144\,\text{mol}$
বিশুদ্ধ FeCO_3-এর ভর $= 0.0144 \times 115.85 = 1.668\,\text{g}$
শতকরা বিশুদ্ধতা $= \frac{1.668}{2.0} \times 100 = 83.40\%$

৫৯. মোট H^+-এর মোল $= 2 \times (0.100 \times 0.2) + (0.200 \times 0.1) = 0.0400 + 0.0200 = 0.0600\,\text{mol}$
প্রয়োজনীয় চূড়ান্ত মোট আয়তন, $\text{V}_2 = \frac{0.0600}{0.05} = 1.200\,\text{L} = 1200\,\text{mL}$
প্রাথমিক মোট আয়তন $= 100 + 200 = 300\,\text{mL}$
অতিরিক্ত যোগ করতে হবে এমন পানির আয়তন $= 1200 - 300 = 900\,\text{mL}$

৬০. $2MnO_4^- + 10I^- + 16H^+ \rightarrow 2Mn^{2+} + 5I_2 + 8H_2O$, $I_2 + 2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$
$n(KMnO_4) = 0.050 \times 0.02 = 1.00 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
তুল্য সম্পর্ক থেকে, $2\,\text{mol}\,KMnO_4 \equiv 5\,\text{mol}\,I_2 \equiv 10\,\text{mol}\,Na_2S_2O_3$**, অর্থাৎ** $1\,\text{mol}\,KMnO_4 \equiv 5\,\text{mol}\,Na_2S_2O_3$
$n(Na_2S_2O_3) = 5 \times 1.00 \times 10^{-3} = 5.00 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$V\,(Na_2S_2O_3) = \frac{5.00 \times 10^{-3}}{0.1} = 0.0500\,\text{L} = 50.0\,\text{mL}$