১. একসঙ্গে চললে ওপরের ব্লক **A**-এর ওপর কেবল ঘর্ষণই অনুভূমিক ত্বরণ দেয়।
$f_{s,max} = 0.40(2)(10) = 8\,N \Rightarrow a_{max} = 4\,ms^{-2}$
$F_{max} = (2+3)(4) = 20\,N$
$F = 25\,N > F_{max}$, তাই স্থিতি ঘর্ষণের সূত্র প্রযোজ্য নয়; ব্লক দুটি আপেক্ষিকভাবে পিছলাবে এবং গতীয় ঘর্ষণ কাজ করবে।
$f_k = 0.30(2)(10) = 6\,N$
$a_A = \frac{f_k}{m_A} = 3\,ms^{-2}$
$a_B = \frac{F-f_k}{m_B} = \frac{25-6}{3} = \frac{19}{3}\,ms^{-2}$
$a_B - a_A = \frac{19}{3} - 3 = \frac{10}{3}\,ms^{-2}$
প্রাথমিক আপেক্ষিক বেগ শূন্য বলে, $0.60 = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\right)t^2 \Rightarrow t = 0.600\,s$

২. স্থিতাবস্থায় পুলির কৌণিক ত্বরণ শূন্য বলে সুতার উভয় পাশের টান সমান থাকে এবং ঘর্ষণ প্রয়োজন অনুযায়ী উভয় দিকে কাজ করতে পারে।
$N = 4(10)(0.80) = 32\,N$
$|10m_B - 24| \le 0.50(32)$
$0.80\,kg \le m_B \le 4.00\,kg$
$B = 5\,kg$ এই সীমার বাইরে, তাই **B** নিচে নামবে এবং **A** ঢাল বেয়ে ওপরে উঠবে; ফলে **A**-এর ওপর গতীয় ঘর্ষণ ঢালের নিচের দিকে কাজ করবে।
$f_k = 0.25(32) = 8\,N$
$T_A - 24 - 8 = 4a$
$50 - T_B = 5a$
পুলি ঘুরতে থাকলে দুই পাশের টান অসমান হয়; সুতা পিছলায় না বলে রৈখিক ও কৌণিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক $a = R\alpha$।
$I = \frac{1}{2}(2)(0.20)^2 = 0.040\,kg\,m^2$
$(T_B - T_A)R = I\alpha = I\frac{a}{R}$
$T_B - T_A = \frac{I}{R^2}a$
$\frac{I}{R^2} = \frac{0.040}{0.20^2} = 1\,kg$
তিনটি সমীকরণ যোগ করে ত্বরণ পাই।
$a = \frac{50-24-8}{4+5+1} = 1.80\,ms^{-2}$
$T_A = 4(1.80) + 24 + 8 = 39.2\,N$
$T_B = 50 - 5(1.80) = 41.0\,N$
পুলির কেন্দ্র স্থির থাকে বলে পুলির ওজনসহ সব বলের লব্ধি অক্ষবলের সমান ও বিপরীতমুখী হতে হবে। ডানদিক ও ওপরের দিক ধনাত্মক ধরে,
$R_x = T_A\cos 37° = 39.2(0.80) = 31.36\,N$
$R_y = T_A\sin 37° + T_B + 2(10) = 39.2(0.60) + 41.0 + 20 = 84.52\,N$
$R_{axle} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 90.15\,N,\ \beta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 69.64°$
শক্তি সংরক্ষণ দিয়ে ফল যাচাই করি: স্থির অবস্থা থেকে 2 m নামলে,
$v^2 = 2as = 2(1.80)(2) = 7.20\,m^2s^{-2}$
$K = \frac{1}{2}(4+5+1)v^2 = \frac{1}{2}(10)(7.20) = 36.0\,J$
বিভবশক্তির হ্রাস থেকে ঘর্ষণের কাজ বাদ দিয়েও একই ফল পাওয়া যায়।
$\Delta U - W_f = 50(2) - 4(10)(0.60)(2) - 8(2) = 36.0\,J$

৩. উল্লম্ব দিকে ত্বরণ শূন্য বলে অনুভূমিক তল থেকে প্রতিক্রিয়া বল টানের ঊর্ধ্বমুখী উপাংশ দ্বারা হ্রাস পায়।
$N = mg - P\sin 37° = 100 - 50(0.60) = 70\,N$
$P\cos 37° = 40\,N$ যা সর্বোচ্চ স্থিতি ঘর্ষণ $f_{s,max} = \mu_s N = 35\,N$ অতিক্রম করে, তাই বাক্সটি চলবে।
$f_k = 0.25(70) = 17.5\,N$
$a = \frac{40-17.5}{10} = 2.25\,ms^{-2}$
সীমান্ত অবস্থায় অনুভূমিক উপাংশ সর্বোচ্চ স্থিতি ঘর্ষণের সমান, যেখানে অভিলম্ব বলও টানের ওপর নির্ভরশীল।
$P_{min}\cos 37° = \mu_s(mg - P_{min}\sin 37°)$
$0.80P_{min} = 0.50(100 - 0.60P_{min}) \Rightarrow P_{min} = 45.45\,N$

৪. ঢালের লম্ব দিকে বলের সাম্য থেকে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া ও ঘর্ষণ পাওয়া যায়।

$N = 4(10)\cos 30° = 20\sqrt{3}\,\text{N}$, $f = \mu N = \frac{20\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 5\,\text{N}$

ঝুলন্ত বস্তুর ওজন ঢালের নিচের দিকে বাধাদানকারী মোট বলের চেয়ে বেশি, তাই এটি নিচে নামবে।

$30\,\text{N} > 4(10)\sin 30° + 5 = 25\,\text{N}$

দুই বস্তুকে একটি সিস্টেম ধরলে টান অভ্যন্তরীণ বল হিসেবে বাদ যায়।

$30 - 4(10)\sin 30° - 5 = (4+3)a \Rightarrow a = \frac{5}{7} = 0.714\,\text{ms}^{-2}$

ঝুলন্ত বস্তুর জন্য নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে, $30 - T = 3a \Rightarrow T = \frac{195}{7} = 27.86\,\text{N}$

৫. সংঘর্ষে সুতার ঘাত উল্লম্ব, তাই অনুভূমিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে; সংঘর্ষে গতিশক্তি সংরক্ষিত হয় না।

$mu = (M+m)v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{0.010(600)}{1.00} = 6.0\,\text{ms}^{-1}$

সম্পূর্ণ বৃত্তের সীমায় শীর্ষবিন্দুতে টান শূন্য ধরে শক্তি সংরক্ষণ থেকে ন্যূনতম বেগ পাওয়া যায়।

$v_{0,\min}^2 = 5gl = 50 > v_0^2 = 36$, তাই সম্পূর্ণ বৃত্ত সম্পন্ন হবে না।

$u_{\min} = \frac{M+m}{m}\sqrt{5gl} = 707.11\,\text{ms}^{-1}$

সর্বনিম্ন অবস্থান থেকে ϕ কোণ ঘুরলে, সুতা টানটান থাকা পর্যন্ত শক্তি সংরক্ষণ ও কেন্দ্রমুখী বলের সমীকরণ প্রযোজ্য।

$v^2 = v_0^2 - 2gl(1-\cos\phi)$, $T = (M+m)\left(\frac{v^2}{l} + g\cos\phi\right)$

প্রথমবার $T = 0$ হওয়ার শর্ত বসিয়ে, $\cos\phi = \frac{2gl - v_0^2}{3gl} = -\frac{8}{15} \Rightarrow \phi = 122.23°$

শূন্যের পর ঋণাত্মক টান সম্ভব নয়; এরপর বস্তু প্রক্ষেপক হিসেবে চলে। $v_s^2 = -gl\cos\phi = \frac{16}{3} \Rightarrow v_s = 2.309\,\text{ms}^{-1}$

সুতা ঢিলে হওয়ার মুহূর্তে উচ্চতা ও বেগের ঊর্ধ্বমুখী উপাংশ নির্ণয় করি।

$h_s = l(1-\cos\phi) = \frac{23}{15}\,\text{m}$, $\sin\phi = \frac{\sqrt{161}}{15}$, $v_{y,s}^2 = v_s^2\sin^2\phi = \frac{2576}{675}\,\text{m}^2\text{s}^{-2}$

মুক্ত প্রক্ষেপণে অতিরিক্ত উচ্চতা যোগ করে সর্বোচ্চ উচ্চতা পাই।

$h_{\max} = h_s + \frac{v_{y,s}^2}{2g} = \frac{23}{15} + \frac{2576}{13500} = 1.7241\,\text{m}$

৬. লিফটের ফ্রেমে নিম্নমুখী ছদ্মবল যোগ হওয়ায় কার্যকর অভিকর্ষজ ত্বরণ বৃদ্ধি পায়।

$g_{\text{eff}} = g + A = 10 + 2 = 12\,\text{ms}^{-2}$

বেশি ভর লিফটের সাপেক্ষে নিচে নামে; দুই ভরের সমীকরণ যোগ করে আপেক্ষিক ত্বরণ পাওয়া যায়।

$a_{\text{rel}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g_{\text{eff}} = \frac{1}{5}(12) = 2.40\,\text{ms}^{-2}$

3 kg ভরের সমীকরণ থেকে টান এবং পুলির দুই পাশের টানের যোগফল থেকে তুলার পাঠ পাওয়া যায়।

$T = m_1(g_{\text{eff}} - a_{\text{rel}}) = 3(12 - 2.4) = 28.8\,\text{N}$, $S = 2T = 57.6\,\text{N}$

ভূমির সাপেক্ষে ত্বরণ পেতে লিফটের ত্বরণের সঙ্গে আপেক্ষিক ত্বরণ ভেক্টর হিসেবে যোগ করতে হবে। ওপরের দিক ধনাত্মক ধরে,

$a_{\text{ground}} = A - a_{\text{rel}} = 2 - 2.40 = -0.40\,\text{ms}^{-2}$, অর্থাৎ 3 kg ভরটি ভূমির সাপেক্ষে নিচের দিকে ত্বরিত হয়।

৭. ওপরের দিক ধনাত্মক ধরি; আঘাতের ঠিক আগের বেগ ঋণাত্মক এবং ঠিক পরের বেগ ধনাত্মক।

$v_i = -\sqrt{2(10)(5)} = -10\,\text{ms}^{-1}$, $v_f = \sqrt{2(10)(3.2)} = 8\,\text{ms}^{-1}$

লব্ধি বলের ঘাত ভরবেগের পরিবর্তনের সমান।

$J_{\text{net}} = m(v_f - v_i) = 0.20(8 - (-10)) = 3.60\,\text{Ns}$

মেঝের স্পর্শবল থেকে ওজনের ঘাত বাদ দিলে লব্ধি ঘাত পাওয়া যায়; তাই গড় স্পর্শবল কেবল $\frac{J_{\text{net}}}{\Delta t}$ থেকে পাওয়া যাবে না।

$(N_{\text{avg}} - mg)\Delta t = J_{\text{net}} \Rightarrow N_{\text{avg}} = \frac{3.60}{0.040} + 2 = 92.0\,\text{N}$

স্থির মেঝের ক্ষেত্রে প্রত্যাবর্তন সহগ হলো বিচ্ছেদের দ্রুতি ও অভিগমনের দ্রুতির অনুপাত।

$e = \frac{8}{10} = 0.80$

৮. জ্বালানি নির্গমনের হার ধ্রুব বলে ভর সময়ের সঙ্গে সরলরৈখিকভাবে কমে।

$m(t) = 1000 - 10t$, $t_b = \frac{200}{10} = 20\,\text{s}$, $m_f = 800\,\text{kg}$

নির্গত গ্যাসের আপেক্ষিক ভরবেগ প্রবাহ ঊর্ধ্বমুখী থ্রাস্ট দেয়; রকেট সমীকরণ থেকে,

$F_{\text{th}} = u_e\beta = 2000(10) = 20000\,\text{N}$, $m\frac{dv}{dt} = F_{\text{th}} - mg$

ভর কমার সঙ্গে সঙ্গে একই থ্রাস্টে ত্বরণ বাড়ে।

$a_0 = \frac{F_{\text{th}}}{m_0} - g = \frac{20000}{1000} - 10 = 10\,\text{ms}^{-2}$, $a_f = \frac{F_{\text{th}}}{m_f} - g = \frac{20000}{800} - 10 = 15\,\text{ms}^{-2}$

ত্বরণ ধ্রুব নয় বলে সরল গতিসূত্র প্রযোজ্য নয়; পরিবর্তনশীল ভরসহ সমীকরণ সমাকলন করতে হয়।

$v(t) = u_e \ln\frac{m_0}{m_0 - \beta t} - gt$

$t = t_b = 20\,\text{s}$ বসিয়ে, $v_b = 2000\ln\frac{1000}{800} - 10(20) = 246.29\,\text{ms}^{-1}$

৯. বাহ্যিক অনুভূমিক ঘাত নেই বলে মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।
$\vec{p} = 2(6\hat{i} + 2\hat{j}) + 1(-3\hat{i} + 4\hat{j}) = 9\hat{i} + 8\hat{j}\ \text{kgms}^{-1}$
মোট ভর দিয়ে ভরবেগ ভাগ করলে যৌথ বেগ পাওয়া যায়।
$\vec{v} = 3\hat{i} + \frac{8}{3}\hat{j}\ \text{ms}^{-1}$, $|\vec{v}| = \frac{\sqrt{145}}{3} = 4.014\ \text{ms}^{-1}$
সংঘর্ষের আগে ও পরের গতিশক্তি হিসাব করি।
$K_i = \frac{1}{2}(2)(6^2 + 2^2) + \frac{1}{2}(1)(3^2 + 4^2) = 52.5\ \text{J}$
$K_f = \frac{1}{2}(3)\left(3^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2\right) = \frac{145}{6}\ \text{J}$
ভরবেগ সংরক্ষিত হলেও গতিশক্তি সংরক্ষিত নয়; হারানো অংশ বিকৃতি, তাপ ও শব্দে যায়।
$\Delta K = K_i - K_f = \frac{85}{3} = 28.33\ \text{J}$

১০. কণাগুলো পরস্পরের দিকে এগোয়; অভিগমনের আপেক্ষিক দ্রুতি দিয়ে মিলিত হওয়ার সময় এবং **A**-এর গতি দিয়ে স্থান পাই।
$t_c = \frac{12}{5-(-1)} = 2.0\ \text{s}$, $x_c = 5(2) = 10.0\ \text{m}$
বাহ্যিক অনুভূমিক ঘাত নেই বলে ভরবেগ সংরক্ষিত; সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষে বিচ্ছেদের আপেক্ষিক দ্রুতি অভিগমনের আপেক্ষিক দ্রুতির সমান।
$2v_A + 3v_B = 2(5) + 3(-1) = 7$, $v_B - v_A = 5 - (-1) = 6$
দুটি সমীকরণ সমাধান করে, $v_A = -\frac{11}{5} = -2.2\ \text{ms}^{-1}$, $v_B = \frac{19}{5} = 3.8\ \text{ms}^{-1}$; **A**-এর ঋণাত্মক বেগ মানে সংঘর্ষের পর সে বামদিকে ফিরে যায়।
অভ্যন্তরীণ সংঘর্ষে ভরকেন্দ্রের বেগ বদলায় না।
$v_{CM} = \frac{7}{5} = 1.4\ \text{ms}^{-1}$, $x_{CM,0} = \frac{2(0)+3(12)}{5} = 7.2\ \text{m}$
$x_{CM}(2) = 7.2 + 1.4(2) = 10.0\ \text{m}$, যা x_c-এর সঙ্গে মিলে যায়।

১১. দ্বিতীয় সংঘর্ষটি সম্পূর্ণ অস্থিতিস্থাপক; যৌথ ভরে বুলেটের ভর অন্তর্ভুক্ত করতে হবে।
$0.020w = (1.98 + 0.020)(3.0) \Rightarrow w = 300\ \text{ms}^{-1}$
প্রথম সংঘর্ষে বুলেট ও প্রথম ব্লকের মোট ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।
$0.020u = 1.00(2.0) + 0.020(300) \Rightarrow u = 400\ \text{ms}^{-1}$
প্রথম সংঘর্ষের আগে ও পরে উভয় চলমান বস্তুর শক্তি নিয়ে ক্ষয় নির্ণয় করি।
$\Delta K_1 = \frac{1}{2}(0.020)(400)^2 - \left[\frac{1}{2}(1.00)(2.0)^2 + \frac{1}{2}(0.020)(300)^2\right] = 698\ \text{J}$
দ্বিতীয় সংঘর্ষের শক্তিক্ষয় আলাদাভাবে নির্ণয় করি।
$\Delta K_2 = \frac{1}{2}(0.020)(300)^2 - \frac{1}{2}(2.00)(3.0)^2 = 891\ \text{J}$

১২. দণ্ডের প্রান্তীয় জড়তার ভ্রামকের সঙ্গে বিন্দুভরগুলোর অবদান যোগ করি।
$I = \frac{1}{3}(3)(2)^2 + 1(2)^2 + 2(1)^2 = 10\ \text{kg m}^2$
চক্রগতির ব্যাসার্ধের জন্য মোট ভর নিতে হয়, শুধু দণ্ডের ভর নয়।
$k = \sqrt{\frac{I}{M_{total}}} = \sqrt{\frac{10}{6}} = 1.291\ \text{m}$
ধ্রুব টর্কে কৌণিক ত্বরণও ধ্রুব থাকে।
$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{5}{10} = 0.50\ \text{rads}^{-2}$, $\omega = \alpha t = 2.0\ \text{rads}^{-1}$
ঘূর্ণনগত গতিশক্তি নির্ণয় করি।
$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(10)(2.0)^2 = 20\ \text{J}$

১৩. বিশুদ্ধ গড়ানোর শর্ত এবং নিরেট গোলকের কেন্দ্রীয় জড়তার ভ্রামক ব্যবহার করি।
$v = R\omega$, $I = \frac{2}{5}mR^2$
স্থিতি ঘর্ষণ পিছলানো রোধ করে, স্পর্শবিন্দুতে কাজ করে না বলে বিভবশক্তি সম্পূর্ণ সরণগত ও ঘূর্ণনগত গতিশক্তিতে যায়।
$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2$
$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{20} = 4.472\ \text{ms}^{-1}$, $\omega = \frac{v}{R} = 22.36\ \text{rads}^{-1}$
$K_{trans} = \frac{1}{2}mv^2 = 20\ \text{J}$, $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = 8\ \text{J}$

১৪. ডানদিকে সরণ ও ঘড়ির কাঁটার বিপরীত ঘূর্ণন ধনাত্মক ধরে, কেন্দ্রীয় জড়তার ভ্রামক ও অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া লিখি।
$I = mk^2 = 4(0.30)^2 = 0.36\,\text{kg m}^2$, $N = mg - P\sin\theta$
কেন্দ্রের সরণ ও কেন্দ্রের চারদিকে ঘূর্ণনের সমীকরণ লিখি; বিশুদ্ধ গড়ানোর শর্তে $\alpha = -\frac{a}{R}$।
$P\cos\theta + f = ma$, $Pr + fR = I\alpha$
f বাদ দিয়ে ত্বরণ পাই।
$a = \frac{P\left(\cos\theta - \frac{r}{R}\right)}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{P(\cos\theta - 0.50)}{6.25}$
$\theta = 30°$ ও $P = 10\,\text{N}$ বসিয়ে, $a = 0.5856\,\text{ms}^{-2}$
$f = -\frac{Pr}{R} - \frac{Ia}{R^2} = -6.318\,\text{N}$ (অর্থাৎ ঘর্ষণ বামদিকে), $N = 40 - P\sin 30° = 35\,\text{N}$
পিছলানো রোধে প্রয়োজনীয় ঘর্ষণ সর্বোচ্চ স্থিতি ঘর্ষণ অতিক্রম করতে পারবে না।
$0.6318P \le 0.20(40 - 0.50P) \Rightarrow P_{max} = \frac{8}{0.7318} = 10.93\,\text{N}$
ত্বরণের দিক $\cos\theta$ ও $\frac{r}{R}$-এর ব্যবধান দ্বারা নির্ধারিত হয়, যা কেবল স্থিতি ঘর্ষণের সীমার মধ্যে প্রযোজ্য।
$\cos\theta_c = \frac{r}{R} = 0.50 \Rightarrow \theta_c = 60°$; $\theta < 60°$ হলে ত্বরণ ডানে, $\theta > 60°$ হলে বামে।

১৫. অভিলম্ব বলের উল্লম্ব উপাংশ ওজন সামলায় এবং অনুভূমিক উপাংশ কেন্দ্রমুখী বল দেয়।
$N\cos\theta = mg$, $N\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$
সমীকরণ দুটির অনুপাত নিলে ভর বাদ যায়।
$v = \sqrt{rg\tan\theta} = \sqrt{80(10)\left(\frac{1}{4}\right)} = 14.14\,\text{ms}^{-1}$
$\tan\theta = \frac{1}{4}$ থেকে $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ নিয়ে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া পাওয়া যায়।
$N = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{8000\sqrt{17}}{4} = 8246\,\text{N}$
1.50 m দূরত্বটি ঢাল বরাবর, অনুভূমিক নয়; তাই উচ্চতার জন্য সাইন ব্যবহার করি।
$h = 1.50\sin\theta = \frac{1.50}{\sqrt{17}} = 0.364\,\text{m}$

১৬. কণার উল্লম্ব ত্বরণ নেই বলে টানের উল্লম্ব উপাংশ ওজন সামলায়।
$T\cos 60° = mg \Rightarrow T = 10\,\text{N}$
জ্যামিতি থেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = l\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{m}$
টানের অনুভূমিক উপাংশই কেন্দ্রমুখী বল দেয়।
$T\sin 60° = m\omega^2 r \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l\cos 60°} = 20\,\text{rad}^2\text{s}^{-2}$
$v = \omega r = \sqrt{15} = 3.873\,\text{ms}^{-1}$, $P = \frac{2\pi}{\omega} = 1.405\,\text{s}$
কেন্দ্রমুখী ত্বরণ সর্বদা বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে।
$a_c = \omega^2 r = 10\sqrt{3} = 17.32\,\text{ms}^{-2}$

১৭. হাত গুটানোর সময় বাহ্যিক টর্ক নেই বলে কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।
$I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{6(2)}{2} = 6\,\text{rads}^{-1}$
কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত হলেও গতিশক্তি সংরক্ষিত নয়; ব্যক্তির কাজ শক্তির বৃদ্ধি ঘটায়।
$W = \frac{1}{2}(2)(6)^2 - \frac{1}{2}(6)(2)^2 = 24\,\text{J}$
ব্রেকিং পর্যায়ে বাহ্যিক টর্ক থাকায় এই পর্যায়ে কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষণ প্রযোজ্য নয়।
$\alpha = -\frac{3}{2} = -1.5\,\text{rads}^{-2}$, $t = \frac{6}{1.5} = 4.0\,\text{s}$
কৌণিক বেগ সমহারে কমায়, গড় কৌণিক বেগ দিয়ে কৌণিক সরণ পাওয়া যায়।
$\phi = \frac{6+0}{2}(4) = 12\,\text{rad}$
ব্রেকের কাজ ঋণাত্মক; অপচয় হওয়া শক্তি ব্রেকিং শুরুর গতিশক্তির সমান।
$E_{loss} = \frac{1}{2}(2)(6)^2 = 36\,\text{J}$

১৮. প্রতি সেকেন্ডে কত ভর পাতে আঘাত করে তা প্রবাহের ক্ষেত্রফল থেকে পাই।
$\dot{m} = \varrho Av = 1000\pi(0.01)^2(20) = 2\pi\,\text{kgs}^{-1}$
দ্রুতি অপরিবর্তিত থাকলেও বেগের দিক বদলায়; তাই ভরবেগ পরিবর্তনের হার নির্ণয় করি।
$\vec{v}_i = 20\hat{i}\,\text{ms}^{-1}$, $\vec{v}_f = 20\cos 120°\hat{i} + 20\sin 120°\hat{j} = -10\hat{i} + 10\sqrt{3}\hat{j}\,\text{ms}^{-1}$
ভরবেগ পরিবর্তনের হারই পানির ওপর পাতের বল।
$\vec{F}_{water} = \dot{m}(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = -60\pi\hat{i} + 20\sqrt{3}\pi\hat{j}\,\text{N}$
নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুযায়ী পানির থেকে পাতের ওপর বল বিপরীতমুখী।
$\vec{F}_{plate} = 60\pi\hat{i} - 20\sqrt{3}\pi\hat{j}\,\text{N}$, $|\vec{F}_{plate}| = 40\sqrt{3}\pi = 217.66\,\text{N}$
স্থির পাতের লব্ধি বল শূন্য হতে হবে; ধারক বা সাপোর্টের বল পানির বলকে সাম্য দেবে।
$\vec{F}_{support} = -60\pi\hat{i} + 20\sqrt{3}\pi\hat{j} = (-188.50\hat{i} + 108.83\hat{j})\,\text{N}$

১৯. অবস্থানকে সময়ের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে বেগ এবং পুনরায় অন্তরীকরণ করে ত্বরণ পাওয়া যায়।

$\vec{v} = -6\sin 2t\hat{i} + 4\cos 2t\hat{j}$, $\vec{a} = -12\cos 2t\hat{i} - 8\sin 2t\hat{j} = -4\vec{r}$

কৌণিক ভরবেগের z উপাংশে অবস্থান ও ভরবেগের ক্রস গুণন প্রয়োগ করি।

$L_z = m(xv_y - yv_x) = \frac{1}{2}\left(12\cos^2 2t + 12\sin^2 2t\right) = 6\,\text{kg}\,\text{m}^2\text{s}^{-1}$

বল সর্বদা মূলবিন্দুর দিকে অবস্থান ভেক্টরের বিপরীতমুখী, তাই এটি কেন্দ্রীয় বল; টর্ক শূন্য হওয়ায় কৌণিক ভরবেগ ধ্রুব থাকে।

$\vec{F} = m\vec{a} = -2\vec{r}$, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

এটি একটি সমদিকীয় প্রত্যাবর্তী বল, বলের ধ্রুবক $2\,\text{Nm}^{-1}$; মূলবিন্দুতে বিভবশক্তি শূন্য ধরে,

$U = \frac{1}{2}(2)r^2 = 9\cos^2 2t + 4\sin^2 2t\,\text{J}$

গতিশক্তির সঙ্গে বিভবশক্তি যোগ করলে সময়নির্ভর পদগুলো বাদ যায়।

$K = \frac{1}{2}mv^2 = 9\sin^2 2t + 4\cos^2 2t\,\text{J}$, $E = K + U = 13\,\text{J}$

২০. ডানদিকে কীলকের স্থানাঙ্ক X এবং ঢাল বরাবর নিচের দিকে আপেক্ষিক সরণ s ধরি। বাহ্যিক অনুভূমিক বল শূন্য বলে অনুভূমিক ভরবেগ সংরক্ষিত।

$(M + m)\dot{X} + m\dot{s}\cos\theta = 0 \Rightarrow \dot{X} = -\frac{m\cos\theta}{M+m}\dot{s}$

প্রাথমিক অবস্থার তুলনায় ভরকেন্দ্রের অনুভূমিক স্থানাঙ্ক অপরিবর্তিত থাকে বলে,

$\Delta X = -\frac{ms\cos\theta}{M+m} = -\frac{\sqrt{3}}{4} = -0.4330\,\text{m}$

শক্তি সংরক্ষণ প্রয়োগ করি; ভূমি প্রসঙ্গ কাঠামোয় ব্লকের মোট গতিশক্তি হিসাব করতে হবে, শুধু কীলকের সাপেক্ষে নয়।

$mgs\sin\theta = \frac{1}{2}\left[m - \frac{m^2\cos^2\theta}{M+m}\right]\dot{s}^2$

$\dot{s} = \sqrt{\frac{2mgs\sin\theta}{m - \frac{m^2\cos^2\theta}{M+m}}} = 4.961\,\text{ms}^{-1}$

আপেক্ষিক দ্রুতি থেকে কীলকের বেগ এবং ব্লকের বেগের দুই উপাংশ নির্ণয় করি।

$\dot{X} = -\frac{m\cos\theta}{M+m}\dot{s} = -1.074\,\text{ms}^{-1}$

$v_x = \dot{X} + \dot{s}\cos\theta = 3.223\,\text{ms}^{-1}$, $v_y = -\dot{s}\sin\theta = -2.481\,\text{ms}^{-1}$

শক্তির সম্পর্ককে s-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করলে ধ্রুব আপেক্ষিক ত্বরণ পাওয়া যায়।

$\ddot{s} = \frac{g\sin\theta}{1 - \frac{m\cos^2\theta}{M+m}} = \frac{80}{13}\,\text{ms}^{-2}$

ভরবেগের সম্পর্ক পুনরায় অন্তরীকরণ করে কীলকের ত্বরণ পাই।

$A = -\frac{m\cos\theta}{M+m}\ddot{s} = -\frac{10\sqrt{3}}{13} = -1.332\,\text{ms}^{-2}$

কীলকের ওপর নেট অনুভূমিক বল হলো অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার অনুভূমিক উপাংশ।

$M|A| = N\sin 30° \Rightarrow N = 7.994\,\text{N}$

২১. ধরি, $z = x + iy$

প্রদত্ত সমীকরণ: $|x + iy - 3| + |x + iy + 3| = 10$

$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$

$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

উভয়পক্ষ বর্গ করে পাই, $(x-3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + (x+3)^2 + y^2$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 100 - 20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + x^2 + 6x + 9$

$\Rightarrow -12x - 100 = -20\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

$\Rightarrow 3x + 25 = 5\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$

পুনরায় বর্গ করে পাই, $9x^2 + 150x + 625 = 25(x^2 + 6x + 9 + y^2)$

$\Rightarrow 9x^2 + 150x + 625 = 25x^2 + 150x + 225 + 25y^2$

$\Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 400$

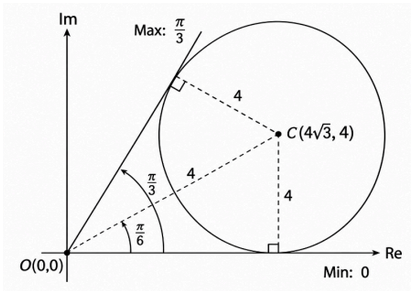
$\Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

এটি একটি উপবৃত্তের সমীকরণ, যার $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ এবং $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$।

উপবৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi ab = \pi(5)(4) = 20\pi$ বর্গ একক।

২২. প্রথমে প্রদত্ত জটিল সংখ্যা $z = 16\sqrt{3} + 16i$ কে পোলার আকারে প্রকাশ করি।
এখানে, বাস্তব অংশ $x = 16\sqrt{3}$ এবং কাল্পনিক অংশ $y = 16$।
মডুলাস, $r = \sqrt{(16\sqrt{3})^2 + (16)^2} = \sqrt{768 + 256} = \sqrt{1024} = 32$
যেহেতু সংখ্যাটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত,
আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{16}{16\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$
সুতরাং, z এর সাধারণ পোলার আকার:
$z = 32\left[\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 32e^{i\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right)}$
$\Rightarrow z = 32e^{i\left(\frac{12k\pi+\pi}{6}\right)}$ (যেখানে $k \in \mathbb{Z}$)
ডি-ময়াভারের উপপাদ্য প্রয়োগ করে z এর পঞ্চম মূলসমূহ নির্ণয় করি:
$z^{\frac{1}{5}} = \left[32e^{i\left(\frac{12k\pi+\pi}{6}\right)}\right]^{\frac{1}{5}} = (32)^{\frac{1}{5}}e^{i\left(\frac{12k\pi+\pi}{30}\right)} = 2e^{i\left(\frac{12k+1}{30}\right)\pi}$
5টি মূল পাওয়ার জন্য $k = 0, 1, 2, 3, 4$ বসিয়ে পাই:
$k = 0$ হলে, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{30}}$
$k = 1$ হলে, $z_2 = 2e^{i\frac{13\pi}{30}}$
$k = 2$ হলে, $z_3 = 2e^{i\frac{25\pi}{30}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
$k = 3$ হলে, $z_4 = 2e^{i\frac{37\pi}{30}} = 2e^{-i\frac{23\pi}{30}}$
$k = 4$ হলে, $z_5 = 2e^{i\frac{49\pi}{30}} = 2e^{-i\frac{11\pi}{30}}$
$\therefore$ নির্ণেয় 5ম মূলগুলো হলো $2e^{i\frac{\pi}{30}}, 2e^{i\frac{13\pi}{30}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{-i\frac{23\pi}{30}}, 2e^{-i\frac{11\pi}{30}}$ ।

২৩. প্রদত্ত অসমতাটি একটি বৃত্ত এবং তার অভ্যন্তরভাগ নির্দেশ করে।
বৃত্তের সমীকরণ: $|z - (4\sqrt{3} + 4i)| = 4$
এর কেন্দ্র, $C(4\sqrt{3}, 4)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = 4$
মূলবিন্দু $O(0, 0)$ হতে কেন্দ্রের দূরত্ব,
$OC = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{48 + 16} = \sqrt{64} = 8$
যেহেতু $OC > r$, মূলবিন্দু বৃত্তের সম্পূর্ণ বাইরে অবস্থিত।
মূলবিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় z এর আর্গুমেন্টের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন সীমা নির্দেশ করে।



কেন্দ্র C এর আর্গুমেন্ট, $\theta_c = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$
ধরি, মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শক OC রেখার সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,
$\sin\alpha = \frac{r}{OC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$
$\therefore$ সর্বোচ্চ আর্গুমেন্ট $= \theta_c + \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$
$\therefore$ সর্বনিম্ন আর্গুমেন্ট $= \theta_c - \alpha = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 0$
$\therefore$ z এর সর্বোচ্চ আর্গুমেন্ট $\frac{\pi}{3}$ এবং সর্বনিম্ন আর্গুমেন্ট 0।

২৪. ধরি, $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$
প্রদত্ত সমীকরণ: $(x + iy)^2 + (x - iy) = 0$
$\Rightarrow x^2 + 2ixy - y^2 + x - iy = 0$
$\Rightarrow (x^2 - y^2 + x) + i(2xy - y) = 0$
উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই:
বাস্তব অংশ: $x^2 - y^2 + x = 0$ **.....(i)**
কাল্পনিক অংশ: $2xy - y = 0 \Rightarrow y(2x - 1) = 0$ **.....(ii)**
(ii) হতে পাই, $y = 0$ অথবা $x = \frac{1}{2}$
Case 1: যখন $y = 0$
(i) এ বসিয়ে পাই, $x^2 - 0 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1$
সুতরাং, মূলসমূহ: $z = 0, -1$
Case 2: যখন $x = \frac{1}{2}$
(i) এ বসিয়ে পাই, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 + \frac{1}{2} = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
সুতরাং, মূলসমূহ: $z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $z = 0, -1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$।

২৫. ধরি, $w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$
কোনো জটিল সংখ্যা w বাস্তব হবে যদি এবং কেবল যদি $w = \bar{w}$ হয়।
w এর অনুবন্ধী নির্ণয় করি:
$\bar{w} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1} + \bar{z_2}}{1 + z_1 z_2}$
দেওয়া আছে, $|z_1| = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1\bar{z_1} = 1 \Rightarrow \bar{z_1} = \frac{1}{z_1}$
একইভাবে, $|z_2| = 1 \Rightarrow \bar{z_2} = \frac{1}{z_2}$
এই মানগুলো $\bar{w}$ তে বসিয়ে পাই:
$\bar{w} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right)}$
$\Rightarrow \bar{w} = \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}}$
$\Rightarrow \bar{w} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = w$
যেহেতু $w = \bar{w}$, সুতরাং $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ একটি বাস্তব সংখ্যা। **(প্রমাণিত)**

২৬. দেওয়া আছে, $|z + 2i| \leq 1$
এটি আরগ্যান্ড সমতলে এমন একটি বৃত্ত বা তার অভ্যন্তরভাগ নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $C_1(0, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = 1$।
আমাদের $|z - 3 + 4i| = |z - (3 - 4i)|$ এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বের করতে হবে।
জ্যামিতিক অর্থে এটি হলো বৃত্তের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু z হতে নির্দিষ্ট বিন্দু $C_2(3, -4)$ এর দূরত্বের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান।
বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(0, -2)$ এবং বিন্দু $C_2(3, -4)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব d হলে,
$d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-4 - (-2))^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$
আমরা জানি, বৃত্তের কোনো বিন্দু হতে বহিঃস্থ বিন্দুর:
সর্বোচ্চ দূরত্ব $= d + R = \sqrt{13} + 1$
সর্বনিম্ন দূরত্ব $= |d - R| = \sqrt{13} - 1$
$\therefore$ সর্বোচ্চ মান $\sqrt{13} + 1$ এবং সর্বনিম্ন মান $\sqrt{13} - 1$।

২৭. দেওয়া আছে, $x = -1 + i\sqrt{2}$
$\Rightarrow x + 1 = i\sqrt{2}$
$\Rightarrow (x + 1)^2 = (i\sqrt{2})^2$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$ **.....(i)**
এখন প্রদত্ত রাশি $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9$ কে $(x^2 + 2x + 3)$ এর সাপেক্ষে সাজিয়ে লিখি:
$= x^2(x^2 + 2x + 3) + 2x(x^2 + 2x + 3) - 1(x^2 + 2x + 3) + 12$
$= x^2(0) + 2x(0) - 1(0) + 12$ **[**সমীকরণ **(i)** হতে মান বসিয়ে**]**
$= 12$
বিকল্প পদ্ধতি:
$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9 = (x + 1)^4 + 8$
$= (i\sqrt{2})^4 + 8 = (\sqrt{2})^4 i^4 + 8 = 4(1) + 8 = 12$।

২৮. ধরি, $z = x + iy$

$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}$

$= \frac{[(x-1)+iy][(x+1)-iy]}{(x+1)^2+y^2}$

$= \frac{(x^2-1)-i(x-1)y+i(x+1)y-i^2y^2}{(x+1)^2+y^2}$

$= \frac{(x^2+y^2-1)+i(2y)}{(x+1)^2+y^2}$

দেওয়া আছে, $\text{Arg}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}}{\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{2y}{x^2+y^2-1} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Rightarrow 2y = x^2 + y^2 - 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ, যার কেন্দ্র $(0, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{0^2 + (-1)^2 - (-1)} = \sqrt{2}$

$\therefore$ সঞ্চারপথটির সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ এবং এটি একটি বৃত্ত।

২৯. ধরি, $P(x) = (x^2 - 3x + 1)(x^2 + cx + 1)$

গুণ করে পাই, $P(x) = x^4 + (c - 3)x^3 + (2 - 3c)x^2 + (c - 3)x + 1$

অতএব, $a = c - 3, \quad b = 2 - 3c$

$P(x) = 0$-এর ঠিক তিনটি ভিন্ন বাস্তব মূল থাকার জন্য $x^2 + cx + 1 = 0$-এর মূলদ্বয় সমান হতে হবে।

$c^2 - 4 = 0 \; c = \pm 2$

যখন $c = 2$, $a = -1, \quad b = -4$

এবং, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ তাই পুনরাবৃত্ত মূল -1।

যখন $c = -2$, $a = -5, \quad b = 8$

এবং, $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ তাই পুনরাবৃত্ত মূল 1।

অতএব, $\boxed{(a, b) = (-1, -4), \text{ পুনরাবৃত্ত মূল } -1}$

অথবা, **(a,b)=(−5,8),** পুনরাবৃত্ত মূল **1**

৩০. দেওয়া আছে, $z = \cos\theta + i\sin\theta$

(i) এর প্রমাণ:

L.H.S $= \frac{2}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$

ত্রিকোণমিতির সূত্র $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ এবং $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ প্রয়োগ করে পাই:

$= \frac{2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}$

$= \frac{2}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)}$

$= \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1}$

ডি-ময়াভারের উপপাদ্য অনুযায়ী:

$= \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} - i\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = 1 - i\tan\frac{\theta}{2}$ = **R.H.S (প্রমাণিত)**

(ii) এর প্রমাণ:

(i) হতে আমরা পেয়েছি,

$1 + z = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\therefore (1+z)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n$

ডি-ময়াভারের উপপাদ্য প্রয়োগ করে:

$(1+z)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$ **.....(i)**

আবার, $\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$

$1 + \bar{z} = 1 + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - i\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow 1 + \bar{z} = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$\therefore (1+\bar{z})^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}-i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$ **.....(ii)**

এখন **(i)** ও **(ii)** নং সমীকরণ যোগ করে পাই:

$(1+z)^n + (1+\bar{z})^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}+\cos\frac{n\theta}{2}-i\sin\frac{n\theta}{2}\right]$

$= 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[2\cos\frac{n\theta}{2}\right]$

$= 2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ **(প্রমাণিত)**

৩১. ধরি, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূলটি হলো α।

তাহলে,

$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ **.....(i)**

$c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$ **.....(ii)**

(i) হতে **(ii)** বিয়োগ করে পাই:

$(a-c)\alpha^2 + (c-a) = 0$

$\Rightarrow (a-c)\alpha^2 - (a-c) = 0$

$\Rightarrow (a-c)(\alpha^2-1) = 0$

যেহেতু প্রশ্নে বলা আছে $a \neq c$, তাই $a - c \neq 0$।

সুতরাং, $\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$

Case 1: যখন $\alpha = 1$

সমীকরণ **(i)** এ $\alpha = 1$ বসিয়ে পাই: $a(1)^2 + b(1) + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

Case 2: যখন $\alpha = -1$

সমীকরণ **(i)** এ $\alpha = -1$ বসিয়ে পাই: $a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল থাকলে, $a + b + c = 0$ অথবা $a - b + c = 0$ হবে। **(প্রমাণিত)**

৩২. ধরি, $y = \frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$

$\Rightarrow y(x^2 + 2x - 7) = x^2 + 34x - 71$

$\Rightarrow yx^2 + 2yx - 7y - x^2 - 34x + 71 = 0$

$\Rightarrow (y - 1)x^2 + 2(y - 17)x - (7y - 71) = 0$ **.....(i)**

যেহেতু x সর্বদা বাস্তব সংখ্যা, তাই **(i)** নং সমীকরণটিকে x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ হিসেবে বিবেচনা করলে এর নিশ্চায়ক $D \geq 0$ হবে।

$\therefore D = b^2 - 4ac \geq 0$

$\Rightarrow \{2(y - 17)\}^2 - 4(y - 1)\{-(7y - 71)\} \geq 0$

$\Rightarrow 4(y - 17)^2 + 4(y - 1)(7y - 71) \geq 0$

$\Rightarrow (y^2 - 34y + 289) + (7y^2 - 78y + 71) \geq 0$

$\Rightarrow 8y^2 - 112y + 360 \geq 0$

$\Rightarrow y^2 - 14y + 45 \geq 0$

$\Rightarrow y^2 - 9y - 5y + 45 \geq 0$

$\Rightarrow y(y - 9) - 5(y - 9) \geq 0$

$\Rightarrow (y - 5)(y - 9) \geq 0$

অসমতার নিয়মানুযায়ী, দুটি রাশির গুণফল ধনাত্মক বা শূন্য হওয়ার অর্থ হলো:

$y \leq 5$ অথবা $y \geq 9$

অর্থাৎ, y এর মান 5 এর সমান বা তার চেয়ে ছোট হবে, অথবা 9 এর সমান বা তার চেয়ে বড় হবে। সুতরাং, y এর মান কোনোভাবেই 5 এবং 9 এর মাঝে অবস্থান করতে পারে না।

$\therefore$ প্রদত্ত উক্তিটি সম্পূর্ণ সত্য। **(যাচাইকৃত)**

৩৩. প্রদত্ত সমীকরণ: $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$

$\Rightarrow (x^2 - (a + b)x + ab) + (x^2 - (b + c)x + bc) + (x^2 - (c + a)x + ca) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(a + b + c)x + (ab + bc + ca) = 0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক D:

$D = \{-2(a + b + c)\}^2 - 4(3)(ab + bc + ca)$

$= 4(a + b + c)^2 - 12(ab + bc + ca)$

$= 4\{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) - 3(ab + bc + ca)\}$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= 2\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

যেহেতু বাস্তব সংখ্যার বর্গের সমষ্টি সর্বদা অঋণাত্মক **(non-negative)** হয়,

তাই $D \geq 0$

সুতরাং সমীকরণটির মূলগুলো সর্বদা বাস্তব হবে। **(প্রমাণিত)**

মূলগুলো সমান হওয়ার শর্ত হলো $D = 0$

$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$

এটি তখনই সম্ভব যখন $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$ হয়।

অর্থাৎ, $a = b = c$ হলে মূলগুলো সমান হবে।

৩৪. দেওয়া আছে, $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β।

$\therefore \alpha + \beta = p$ এবং $\alpha\beta = q$

এখন, দ্বিতীয় সমীকরণটি হলো: $q^2x^2 - (p^3 - 3pq)x + q = 0$

সমীকরণটিতে p এবং q এর মান α ও β এর মাধ্যমে বসিয়ে পাই:

$(\alpha\beta)^2x^2 - [(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)]x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha^2\beta^2x^2 - (\alpha^3 + \beta^3)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha^2\beta^2x^2 - \alpha^3x - \beta^3x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha^2x(\beta^2x - \alpha) - \beta(\beta^2x - \alpha) = 0$

$\Rightarrow (\beta^2x - \alpha)(\alpha^2x - \beta) = 0$

হয়, $\beta^2x - \alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\beta^2}$

অথবা, $\alpha^2x - \beta = 0 \Rightarrow x = \frac{\beta}{\alpha^2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির মূলদ্বয় হলো $\frac{\alpha}{\beta^2}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha^2}$।

৩৫. যেহেতু সমীকরণের মূলগুলো গুণোত্তর প্রগমনে **(GP)** আছে,
ধরি মূল তিনটি হলো $\frac{a}{k}, a, ak$
মূলত্রয়ের গুণফল: $\left(\frac{a}{k}\right)(a)(ak) = -r$
$\Rightarrow a^3 = -r \Rightarrow a = (-r)^{\frac{1}{3}}$
যেহেতু a সমীকরণটির একটি মূল, তাই এটি প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।
$a^3 + 3pa^2 + 3qa + r = 0$
$\Rightarrow -r + 3pa^2 + 3qa + r = 0$
$\Rightarrow 3pa^2 + 3qa = 0 \Rightarrow 3a(pa + q) = 0$
যেহেতু $a \neq 0$ (নতুবা $r = 0$ হয়ে মূলগুলো 0 হবে এবং **GP** সম্ভব নয়),
তাই $pa + q = 0 \Rightarrow a = -\frac{q}{p}$
এখন $a^3 = -r$ সম্পর্কে $a = -\frac{q}{p}$ বসিয়ে পাই:
$\left(-\frac{q}{p}\right)^3 = -r$
$\Rightarrow -\frac{q^3}{p^3} = -r$
$\therefore r = \frac{q^3}{p^3}$।
ব্যাখ্যা: মূল সমীকরণের ধাপগুলোকে $3a(pa + q) = 0$ (যেখানে $a \neq 0$) থেকে সরাসরি $a = -\frac{q}{p}$ নির্ণয় করে $a^3 = -r$ তে বসিয়ে সরলীকৃত করা হয়েছে; ফলাফল $r = \frac{q^3}{p^3}$ অপরিবর্তিত।

৩৬. ধরি, সমীকরণটির মূলদ্বয় হলো α এবং α^n।
মূলদ্বয়ের যোগফল: $\alpha + \alpha^n = -\frac{b}{a}$ **.....(i)**
মূলদ্বয়ের গুণফল: $\alpha \cdot \alpha^n = \frac{c}{a}$
$\Rightarrow \alpha^{n+1} = \frac{c}{a}$
$\Rightarrow \alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ **.....(ii)**
(ii) নং হতে α এর মান **(i)** নং এ বসিয়ে পাই:
$\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} = -\frac{b}{a}$
উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে পাই:
$a\left(\frac{c^{\frac{1}{n+1}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}\right) + a\left(\frac{c^{\frac{n}{n+1}}}{a^{\frac{n}{n+1}}}\right) = -b$
$\Rightarrow a^{1-\frac{1}{n+1}} c^{\frac{1}{n+1}} + a^{1-\frac{n}{n+1}} c^{\frac{n}{n+1}} = -b$
$\Rightarrow a^{\frac{n}{n+1}} c^{\frac{1}{n+1}} + a^{\frac{1}{n+1}} c^{\frac{n}{n+1}} = -b$
$\therefore (a^n c)^{\frac{1}{n+1}} + (ac^n)^{\frac{1}{n+1}} = -b$।

৩৭. **১ম** সমীকরণ: $x^2 - 2cx + ab = 0$
যেহেতু এর মূলগুলো বাস্তব ও অসমান, তাই এর নিশ্চায়ক $D_1 > 0$ হবে।
$D_1 = (-2c)^2 - 4(1)(ab) = 4c^2 - 4ab$
$\therefore 4c^2 - 4ab > 0 \Rightarrow c^2 > ab$ **.....(i)**

২য় সমীকরণ: $x^2 - 2(a + b)x + (a^2 + b^2 + 2c^2) = 0$
এর নিশ্চায়ক D_2 বের করি:
$D_2 = \{-2(a + b)\}^2 - 4(1)(a^2 + b^2 + 2c^2)$
$= 4(a + b)^2 - 4(a^2 + b^2 + 2c^2)$
$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 - 2c^2)$
$= 4(2ab - 2c^2) = -8(c^2 - ab)$
(i) নং হতে আমরা জানি, $c^2 > ab \Rightarrow c^2 - ab > 0$
যেহেতু $(c^2 - ab)$ একটি ধনাত্মক রাশি, তাই $-8(c^2 - ab)$ অবশ্যই ঋণাত্মক হবে।
অর্থাৎ, $D_2 < 0$
যেহেতু ২য় সমীকরণের নিশ্চায়ক ঋণাত্মক, তাই এর মূলগুলো জটিল বা কাল্পনিক হবে। **(প্রমাণিত)**

৩৮. প্রদত্ত সমীকরণ $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$
সমীকরণের মূলগুলোর সম্পর্ক হতে পাই:
মূলত্রয়ের যোগফল, $\sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma = -(-2) = 2$
দুটি করে মূলের গুণফলের যোগফল, $\sum \alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$
মূলত্রয়ের গুণফল, $\alpha\beta\gamma = -(-4) = 4$

১ম অংশ: $\sum \alpha^2\beta$ এর মান নির্ণয়
$\Rightarrow \sum \alpha^2\beta = (\sum \alpha)(\sum \alpha\beta) - 3\alpha\beta\gamma$
মান বসিয়ে পাই:
$\sum \alpha^2\beta = (2)(3) - 3(4) = 6 - 12 = -6$

২য় অংশ: $\sum \alpha^3\beta$ এর মান নির্ণয়
প্রথমে $\sum \alpha^2$ নির্ণয় করি: $\sum \alpha^2 = (\sum \alpha)^2 - 2\sum \alpha\beta = (2)^2 - 2(3) = 4 - 6 = -2$
$\Rightarrow \sum \alpha^3\beta = (\sum \alpha^2)(\sum \alpha\beta) - \alpha\beta\gamma(\sum \alpha)$
মান বসিয়ে পাই:
$\sum \alpha^3\beta = (-2)(3) - (4)(2) = -6 - 8 = -14$
$\therefore$ নির্ণেয় মানসমূহ হলো যথাক্রমে -6 এবং -14।

৩৯. যেহেতু ত্রিঘাত সমীকরণটির মূল তিনটি সমান্তর প্রগমনে **(A.P)** আছে,
ধরি, মূল তিনটি হলো: $a - d, a, a + d$
মূলগুলোর যোগফল:
$(a - d) + a + (a + d) = -\frac{-48}{32}$
$\Rightarrow 3a = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$
$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$
যেহেতু $a = \frac{1}{2}$ সমীকরণটির একটি মূল, তাই এটি প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।
x এর স্থলে $\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই:
$32\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 48\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{1}{2}\right) - k = 0$
$\Rightarrow 32\left(\frac{1}{8}\right) - 48\left(\frac{1}{4}\right) + 11 - k = 0$
$\Rightarrow 4 - 12 + 11 - k = 0$
$\Rightarrow 3 - k = 0 \Rightarrow k = 3$
এখন, দুটি করে মূলের গুণফলের যোগফল:
$(a - d)a + a(a + d) + (a - d)(a + d) = \frac{22}{32}$
$\Rightarrow a^2 - ad + a^2 + ad + a^2 - d^2 = \frac{11}{16}$
$\Rightarrow 3a^2 - d^2 = \frac{11}{16}$
এখানে $a = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই:
$3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - d^2 = \frac{11}{16}$
$\Rightarrow \frac{3}{4} - d^2 = \frac{11}{16}$
$\Rightarrow d^2 = \frac{3}{4} - \frac{11}{16} = \frac{12-11}{16} = \frac{1}{16}$
$\Rightarrow d = \pm\frac{1}{4}$
d এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন, মূলগুলো একই আসবে।
$d = \frac{1}{4}$ হলে মূলগুলো: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
অর্থাৎ, $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$
$\therefore$ k এর মান 3 এবং নির্ণেয় সমাধান (মূলগুলো): $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$।

৪০. ধরি, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল হলো α।
সুতরাং α উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করবে:
$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ **.....(i)**
$\alpha^2 + q\alpha + p = 0$ **.....(ii)**
(i) নং হতে **(ii)** নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই:
$(p - q)\alpha + (q - p) = 0$
$\Rightarrow (p - q)\alpha - (p - q) = 0$
$\Rightarrow (p - q)(\alpha - 1) = 0$
যেহেতু প্রশ্নে বলা আছে $p \neq q$, তাই $p - q \neq 0$
$\therefore \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$
এখন $\alpha = 1$ মানটি **(i)** নং সমীকরণে বসিয়ে পাই:
$1^2 + p(1) + q = 0$
$\Rightarrow p + q + 1 = 0$ **(প্রমাণিত)**

এখন, অপর মূলগুলো দিয়ে নতুন সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।
১ম সমীকরণ $x^2 + px + q = 0$ এর মূলদ্বয়ের গুণফল $= q$
একটি মূল সাধারণ মূল $\alpha = 1$ হলে, ধরি অপর মূলটি β_1
$\therefore 1 \cdot \beta_1 = q \Rightarrow \beta_1 = q$
২য় সমীকরণ $x^2 + qx + p = 0$ এর মূলদ্বয়ের গুণফল $= p$
একটি মূল সাধারণ মূল $\alpha = 1$ হলে, ধরি অপর মূলটি β_2
$\therefore 1 \cdot \beta_2 = p \Rightarrow \beta_2 = p$
তাহলে নতুন সমীকরণের মূলদ্বয় হবে p এবং q
মূলদ্বয়ের যোগফল $= p + q$
মূলদ্বয়ের গুণফল $= pq$
আমরা প্রমাণ করেছি, $p + q + 1 = 0 \Rightarrow p + q = -1$
সুতরাং, নির্ণেয় সমীকরণ:
$x^2 -$ (মূলদ্বয়ের যোগফল)$x +$ (মূলদ্বয়ের গুণফল) $= 0$
$\Rightarrow x^2 - (-1)x + pq = 0$
$\Rightarrow x^2 + x + pq = 0$।

৪১. বিজারণ অর্ধ-বিক্রিয়া: $MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- \rightarrow Mn^{2+} + 4H_2O$ **... (1)**
জারণ অর্ধ-বিক্রিয়া: $C_2O_4^{2-} \rightarrow 2CO_2 + 2e^-$ **... (2)**
ইলেকট্রন সমতা আনার জন্য **(1)** নং কে 2 দ্বারা এবং **(2)** নং কে 5 দ্বারা গুণ করে যোগ করি:
সমতাকৃত আয়নিক সমীকরণ: $2MnO_4^- + 5C_2O_4^{2-} + 16H^+ \rightarrow 2Mn^{2+} + 10CO_2 + 8H_2O$

৪২. দ্বিক্ষারকীয় এসিড H_2A এর ক্ষেত্রে বিক্রিয়া: $H_2A + 2NaOH \rightarrow Na_2A + 2H_2O$
ব্যবহৃত $NaOH$ এর মোল $= 0.100\,L \times 0.1\,M = 0.01\,mol$
প্রয়োজনীয় H_2A এর মোল $= \frac{0.01}{2} = 0.005\,mol$
আণবিক ভর $M = \frac{\text{ভর}}{\text{মোল}} = \frac{0.63}{0.005} = 126\,gmol^{-1}$

৪৩. প্রদত্ত: $V_1 = 450\,mL$, $T_1 = 27 + 273 = 300\,K$, $P_1 = 750\,mmHg$
STP-তে: $P_2 = 760\,mmHg$, $T_2 = 273\,K$
সূত্র: $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$
$V_2 = \frac{P_1V_1T_2}{P_2T_1} = \frac{750\times450\times273}{760\times300} = 404.11\,mL$

৪৪. $K_2Cr_2O_7$ এর মোল $= 0.0285\,L \times 0.02\,M = 0.00057\,mol$
বিক্রিয়া সমীকরণ অনুযায়ী: $1\,mol\,K_2Cr_2O_7 \equiv 6\,mol\,Fe^{2+}$
আয়রনের মোল সংখ্যা $= 6 \times 0.00057 = 0.00342\,mol$
আয়রনের ভর $= 0.00342\,mol \times 55.85\,gmol^{-1} = 0.191\,g$
শতকরা ভর $= \frac{0.191}{2.0} \times 100\% = 9.55\%$

৪৫. $1.12\,L\,CO_2$ গ্যাসের মোল $= \frac{1.12}{22.4} = 0.05\,mol$
অণুর সংখ্যা $= 0.05 \times 6.022 \times 10^{23} = 3.011 \times 10^{22}$ টি অণু

৪৬. ফেনলফথ্যালিনের বর্ণ পরিবর্তনের **pH** পরিসর হলো $8.3 - 10.0$। তীব্র এসিড **(HCl)** ও মৃদু ক্ষার (NH_4OH) এর প্রশমন বিন্দু অম্লীয় অঞ্চলে **(pH** $4 - 6$**)** অবস্থান করে। ফেনলফথ্যালিন কেবল ক্ষারীয় অঞ্চলে বর্ণ পরিবর্তন দেখায়। তাই প্রশমন বিন্দু আসার আগেই এটি বর্ণহীন থেকে যায় এবং সঠিক শেষ বিন্দু নির্দেশ করতে পারে না।

৪৭. বিক্রিয়া: $2KClO_3 \rightarrow 2KCl + 3O_2$
$KClO_3$ এর মোল $= \frac{12.25}{122.6} = 0.1\,mol$
উৎপন্ন O_2 এর মোল $= 0.1 \times \frac{3}{2} = 0.15\,mol$
$PV = nRT$ প্রয়োগ করে: $V = \frac{0.15 \times 0.0821 \times 298.15}{1} = 3.67\,L$

৪৮. ধরি আয়তন V L। H^+ এর মোল $= 0.1V$, OH^- এর মোল $= 2 \times 0.1V = 0.2V$
অতিরিক্ত OH^- মোল $= 0.2V - 0.1V = 0.1V$ mol
মিশ্রণটি ক্ষারীয় প্রকৃতির।
মোট আয়তন $= 2V$ L
অতিরিক্ত OH^- ঘনমাত্রা $= \frac{0.1V}{2V} = 0.05\,M$

৪৯. মোল অনুপাত: $C = \frac{40}{12} = 3.33$, $H = \frac{6.67}{1} = 6.67$, $O = \frac{53.33}{16} = 3.33$
সরল অনুপাত: $C = 1, H = 2, O = 1 \Rightarrow$ স্থূল সংকেত $= CH_2O$ (স্থূল সংকেত ভর $= 30$)
আণবিক ভর $= 2 \times$ বাষ্প ঘনত্ব $= 2 \times 30 = 60$
$n = \frac{60}{30} = 2$
আণবিক সংকেত $= C_2H_4O_2$

৫০. 1 mL H_2O_2 দ্রবণ **STP**-তে 20 mL O_2 দেয়।
$2H_2O_2 \rightarrow 2H_2O + O_2$
22400 mL O_2 পাওয়া যায় 68 g H_2O_2 থেকে।
20 mL O_2 পাওয়া যায় $\frac{68 \times 20}{22400} = 0.06071$ g H_2O_2 থেকে।
শতকরা শক্তি **(w/v)** $= 0.06071 \times 100 = 6.071\%$
মোলারিটি $= \frac{60.71}{34} = 1.786\,M$

৫১. ধরি, 25 mL দ্রবণে NaOH = a **mmol** এবং Na_2CO_3 = b **mmol**।

ফেনলফথ্যালিন প্রান্তবিন্দু পর্যন্ত, $a + b = 15 \times 0.1 = 1.5$

ফেনলফথ্যালিন থেকে মিথাইল অরেঞ্জ প্রান্তবিন্দু পর্যন্ত, $b = 10 \times 0.1 = 1.0$

অতএব, $a = 1.5 - 1.0 = 0.5$ mmol

250 mL দ্রবণে, $n(Na_2CO_3) = 10$ mmol, $n(NaOH) = 5$ mmol

$m(Na_2CO_3) = 0.010 \times 106 = 1.06$ g

$m(NaOH) = 0.005 \times 40 = 0.20$ g

m(ভেজাল) $= 2.50 - (1.06 + 0.20) = 1.24$ g

সুতরাং, $\boxed{\%Na_2CO_3 = 42.4\%}$

$\boxed{\%NaOH = 8.0\%}$

$\boxed{\%$নিষ্ক্রিয় ভেজাল $= 49.6\%}$

৫২. $MnO_2 + 4HCl \rightarrow MnCl_2 + Cl_2 + 2H_2O$
$Cl_2 + 2KI \rightarrow 2KCl + I_2$
$I_2 + 2Na_2S_2O_3 \rightarrow 2NaI + Na_2S_4O_6$
$n(S_2O_3^{2-}) = 0.080 \times 0.200 = 0.0160\,mol$
$n(I_2) = n(Cl_2) = n(MnO_2) = \frac{0.0160}{2} = 0.00800\,mol$
$m(MnO_2) = 0.00800 \times 87 = 0.696$ g
$\%MnO_2 = \frac{0.696}{1.74} \times 100 = 40.0\%$
$m(Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O) = 0.0160 \times 248 = 3.97$ g

৫৩. $2Cu^{2+} + 4I^- \rightarrow 2CuI + I_2$
$I_2 + 2S_2O_3^{2-} \rightarrow 2I^- + S_4O_6^{2-}$
$n(S_2O_3^{2-}) = 0.15 \times 0.040 = 6.0 \times 10^{-3}$ mol
$n(I_2) = \frac{6.0\times10^{-3}}{2} = 3.0 \times 10^{-3}$ mol
$n(Cu^{2+}) = 2 \times n(I_2) = 6.0 \times 10^{-3}$ mol
$m(Cu) = 6.0 \times 10^{-3} \times 63.5 = 0.381$ g
$\%Cu = \frac{0.381}{3.2} \times 100 = 11.91\%$

৫৪. গাঢ় দ্রবণের মোলারিটি নির্ণয়ে 1 L দ্রবণ ধরি, যার ভর $1000 \times 1.84 = 1840$ g।
$m(H_2SO_4) = 0.98 \times 1840 = 1803.2$ g
$M_{\text{গাঢ়}} = \frac{1803.2}{98} = 18.4$ M
লঘুকরণ সূত্র $M_1V_1 = M_2V_2$ থেকে, $M_{\text{লঘুকৃত}} = \frac{18.4\times10.0}{500} = 0.368$ M
H_2SO_4 দ্বিপ্রোটিক বলে, প্রশমনে $n(NaOH) = 2 \times n(H_2SO_4)$
$V(NaOH) = \frac{0.368\times25.0\times2}{0.500} = 36.8$ mL
$n(H^+) = 0.368 \times 25.0 \times 2 = 18.4$ mmol

৫৫. $n(H_2SO_4) = 0.100 \times 0.2 = 0.02$ mol $\Rightarrow n(H^+) = 0.04$ mol
$n(KOH) = 0.200 \times 0.15 = 0.03$ mol $\Rightarrow n(OH^-) = 0.03$ mol
অতিরিক্ত $H^+ = 0.04 - 0.03 = 0.01$ mol
$[H^+] = \frac{0.01}{1} = 0.01$ M
$pH = -\log(0.01) = 2.0$

৫৬. ভরের শতকরা হার সরাসরি **ppm**-এ রূপান্তরযোগ্য, $0.13\% = 1300$ ppm
1 L দ্রবণ ধরে, $m(\text{দ্রবণ}) = 1000 \times 1.025 = 1025$ g
$m(Mg^{2+}) = 0.0013 \times 1025 = 1.3325$ g
$n(Mg^{2+}) = \frac{1.3325}{24.3} = 0.0548$ mol
$[Mg^{2+}] = 1300$ ppm $= 0.0548$ M

৫৭. দ্রবণের ভর, $m = 500 \times 1.00 = 500$ g $= 0.500$ kg
$[As_2O_3] = \frac{10.0\text{ mg}}{0.500\text{ kg}} = 20.0$ ppm
As_2O_3-এ As-এর ভরাংশ, $\frac{2(75)}{2(75)+3(16)} = \frac{150}{198} = 0.7576$
$[As] = 20.0 \times 0.7576 = 15.15$ ppm
As-এর মোট ভর $= 10.0 \times 0.7576 = 7.576$ mg; লঘুকরণে এই ভর অপরিবর্তিত থাকে।
10.0 ppb $= 0.0100$ ppm, অর্থাৎ প্রতি kg দ্রবণে 0.0100 mg
চূড়ান্ত দ্রবণের ভর $= \frac{7.576}{0.0100} = 757.6$ kg ≈ 757.6 L (ঘনত্ব ≈ 1 gmL^{-1} ধরে)

৫৮. $Na_2CO_3 + 2HCl \rightarrow 2NaCl + H_2O + CO_2$
$n(Na_2CO_3) = \frac{0.265}{106} = 0.0025$ mol $\Rightarrow n(HCl) = 2(0.0025) = 0.005$ mol
$M(HCl) = \frac{0.005}{48.0\times10^{-3}} = 0.1042$ M
$CaCO_3 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2$
$n(HCl)_{25mL} = 0.1042 \times 25.0 \times 10^{-3} = 2.604 \times 10^{-3}$ mol
$n(CaCO_3) = \frac{2.604\times10^{-3}}{2} = 1.302 \times 10^{-3}$ mol
$m(CaCO_3) = 1.302 \times 10^{-3} \times 100 = 0.1302$ g
বিশুদ্ধতা $= \frac{0.1302}{0.150} \times 100 = 86.8\%$

৫৯. $CaOCl_2 + H_2SO_4 \rightarrow CaSO_4 + H_2O + Cl_2$
$Cl_2 + 2KI \rightarrow 2KCl + I_2$
$I_2 + 2Na_2S_2O_3 \rightarrow 2NaI + Na_2S_4O_6$
$n(I_2) = \frac{0.200\times0.0280}{2} = 2.80 \times 10^{-3}$ mol
$n(Cl_2) = n(I_2) = 2.80 \times 10^{-3}$ mol
$m(Cl_2) = 2.80 \times 10^{-3} \times 71 = 0.1988$ g
Available chlorine $= \frac{0.1988}{1.00} \times 100 = 19.85\%$
$V(Cl_2)_{STP} = 2.80 \times 10^{-3} \times 22400 = 62.7$ mL

৬০. উত্তাপে শুধু $NaHCO_3$ ভেঙে যায়, $2NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O + CO_2$; প্রতি মোল $NaHCO_3$-এ ভরহ্রাস $\frac{62}{2} = 31\,g$।

ধরি, $m(NaHCO_3) = x\,g$ এবং $m(Na_2CO_3) = y\,g$; $x + y = 13.70$

$\frac{x}{84} \times 31 = 3.10 \Rightarrow x = 8.40\,g$

$y = 13.70 - 8.40 = 5.30\,g$

উত্তাপের পর অবশিষ্ট Na_2CO_3-এর মোট পরিমাণ (মূল $Na_2CO_3 + NaHCO_3$ থেকে উৎপন্ন), $n = \frac{5.30}{106} + \frac{1}{2}\left(\frac{8.40}{84}\right) = 0.050 + 0.050 = 0.100\,mol$

250 mL দ্রবণের 25.0 mL অংশে, $n(Na_2CO_3) = 0.100 \times \frac{25.0}{250} = 0.0100\,mol$

ফেনলফথ্যালিন প্রান্তবিন্দু পর্যন্ত Na_2CO_3 অর্ধেক প্রশমিত হয় ($Na_2CO_3 \rightarrow NaHCO_3$), তাই $n(HCl) = n(Na_2CO_3) = 0.0100\,mol$

$V_{\text{ফেনলফথ্যালিন}} = \frac{0.0100}{0.200} = 0.0500\,L = 50.0\,mL$

মিথাইল অরেঞ্জ পর্যন্ত অবশিষ্ট $NaHCO_3$ সমপরিমাণে প্রশমিত হয়, তাই প্রয়োজনীয় অতিরিক্ত আয়তনও 50.0 mL।