পদার্থবিজ্ঞান

২০০ নম্বর

১. ঢালের সমান্তরাল দিকে অনুভূমিক বলের উপাংশ ঊর্ধ্বমুখী কাজ করে, আর তার লম্ব উপাংশ ওজনের লম্ব উপাংশের সঙ্গে যোগ হয়ে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া বাড়ায়।

$N = mg\cos 30° + F\sin 30° = 8(9.8)(0.866) + 60(0.5) = 97.90\,N$

$F\cos 30° - mg\sin 30° = 60(0.866) - 8(9.8)(0.5) = 12.76\,N$

প্রয়োজনীয় স্থিতি ঘর্ষণ 12.76 N, কিন্তু সর্বোচ্চ স্থিতি ঘর্ষণ $f_{s,max} = 0.25(97.90) = 24.47\,N$; তাই ব্লকটি স্থির থাকবে।

নড়া শুরু করার সীমান্ত অবস্থায়, $F_{min}\cos 30° - mg\sin 30° = \mu_s(mg\cos 30° + F_{min}\sin 30°)$

$F_{min} = \frac{mg(\sin 30° + \mu_s\cos 30°)}{\cos 30° - \mu_s\sin 30°} = 75.81\,N$

২. ভর হ্রাসের হার ধ্রুব বলে, $m(t) = 1200 - 15t$

$t_b = \frac{300}{15} = 20\,s$, $m_b = 900\,kg$

রকেট সমীকরণ থেকে ত্বরণ, $a = \frac{u_e\left(-\frac{dm}{dt}\right)}{m} - g$

$a_0 = 2100\left(\frac{15}{1200}\right) - 9.8 = 16.45\,ms^{-2}$

$a_b = 2100\left(\frac{15}{900}\right) - 9.8 = 25.2\,ms^{-2}$

$v_b = 2100\ln\left(\frac{1200}{900}\right) - 9.8(20) = 408\,ms^{-1}$

ভর কমার কারণে একই থ্রাস্টে ত্বরণ সময়ের সঙ্গে বাড়ে।

৩. নিরেট চাকতি পুলির জড়তার ভ্রামক $I = \frac{1}{2}MR^2$; বেশি ভরের বস্তুটি নিচে নামবে।

$\frac{I}{R^2} = \frac{M}{2} = 1\,kg$

$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} = \frac{4(9.8)}{9} = 4.36\,ms^{-2}$

$T_1 - m_1g = m_1a \Rightarrow T_1 = 28.31\,N$

$m_2g - T_2 = m_2a \Rightarrow T_2 = 32.67\,N$

পুলির ঘূর্ণন সমীকরণ $(T_2 - T_1)R = I\frac{a}{R}$ থেকে $T_2 - T_1 = \frac{I}{R^2}a = 4.36\,N$, যা উপরের মানের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

৪. লিফটের সাপেক্ষে ব্যক্তির উল্লম্ব ত্বরণ শূন্য বলে মেঝের প্রতিক্রিয়াই তুলার পাঠ।

$N_{up} = m(g + a_1) = 60(9.8 + 1.5) = 678\,N$

$N_{down} = m(g - a_2) = 60(9.8 - 2.0) = 468\,N$

$N_0 = mg = 588\,N$

শতকরা পরিবর্তন $= \frac{N - N_0}{N_0} \times 100\%$

ওপরে ত্বরণে পাঠ 15.3% বাড়ে এবং নিচে ত্বরণে 20.4% কমে।

৫. প্রাথমিক বেগের দুই উপাংশ নির্ণয় করি।

$u_x = 28(0.80) = 22.4\,ms^{-1}$, $u_y = 28(0.60) = 16.8\,ms^{-1}$

খাড়া প্রান্তের নিচে মাটি পর্যন্ত উল্লম্ব সরণ $-20\,m$ ধরে,

$-20 = u_yt - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 20 + 16.8t - 4.9t^2 = 0 \Rightarrow t = 4.36\,s$

$x = u_xt = 22.4(4.36) = 97.8\,m$

$v_y = u_y - gt = 16.8 - 9.8(4.36) = -25.97\,ms^{-1}$

$v = \sqrt{u_x^2 + v_y^2} = \sqrt{22.4^2 + 25.97^2} = 34.3\,ms^{-1}$

$\tan\phi = \frac{|v_y|}{u_x} = \frac{25.97}{22.4} \Rightarrow \phi = 49.2°$

৬. ঢাল বরাবর চালক বল থেকে ঢালের ঘর্ষণ এবং অনুভূমিক ব্লকের ঘর্ষণ বাদ দিতে হবে; পুলির জন্য $\frac{I}{R^2} = \frac{M}{2} = 0.5\,\text{kg}$।
$f_1 = 0.10(3)(9.8)(0.80) = 2.35\,\text{N}$, $f_2 = 0.20(2)(9.8) = 3.92\,\text{N}$
$a = \frac{3(9.8)(0.60) - f_1 - f_2}{3+2+0.5} = 2.07\,\text{ms}^{-2}$
$3g\sin 37° - f_1 - T_1 = 3a \Rightarrow T_1 = 9.09\,\text{N}$
$T_2 - f_2 = 2a \Rightarrow T_2 = 8.05\,\text{N}$
$T_1 - T_2 = \frac{I}{R^2}a = 0.5(2.07) = 1.04\,\text{N}$, যা পুলির ঘূর্ণন সমীকরণের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ।

৭. অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার অনুভূমিক উপাংশই কেন্দ্রমুখী বল দেয় এবং উল্লম্ব উপাংশ ওজন সামলায়।
$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Rg}{3}} = \sqrt{\frac{90(9.8)}{3}} = 17.15\,\text{ms}^{-1}$
$\tan\theta = \frac{1}{3}$ থেকে $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$
$N\cos\theta = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta} = 1.03 \times 10^4\,\text{N}$
$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $h = 1.50\sin\theta = 0.474\,\text{m}$

৮. বাহ্যিক অনুভূমিক বল শূন্য বলে ভরকেন্দ্রের অবস্থান অপরিবর্তিত থাকবে। নৌকার সরণ x বামদিকে ধরা হলো।
$180x + 60(x+3) = 0 \Rightarrow x = -\frac{60(3)}{180+60} = -0.75\,\text{m}$
ব্যক্তির ভূমির সাপেক্ষে সরণ $= 3 - 0.75 = 2.25\,\text{m}$
ঋণাত্মক চিহ্ন বোঝায় নৌকা ব্যক্তির বিপরীত দিকে সরে যায়।

৯. ভরবেগ সংরক্ষণ থেকে, $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow 2(8) + 3(-2) = 2v_1 + 3v_2 = 10$
প্রত্যাবর্তন সহগের সংজ্ঞা থেকে, $v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2) = 0.50(8 - (-2)) = 5$
দুটি সমীকরণ সমাধান করে, $v_1 = -1\,\text{ms}^{-1}$, $v_2 = 4\,\text{ms}^{-1}$
$J_1 = m_1(v_1 - u_1) = 2(-1-8) = -18\,\text{Ns}$, $J_2 = m_2(v_2 - u_2) = 3(4-(-2)) = 18\,\text{Ns}$
$K_i = \frac{1}{2}(2)(8)^2 + \frac{1}{2}(3)(2)^2 = 70\,\text{J}$, $K_f = \frac{1}{2}(2)(1)^2 + \frac{1}{2}(3)(4)^2 = 25\,\text{J}$
$\Delta K = K_i - K_f = 45\,\text{J}$

১০. $\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}}{m} = 2t\hat{i} + 3\hat{j}$
সময়ের সাপেক্ষে সমাকলন করে বেগ পাই।
$\vec{v}(t) = (2 + t^2)\hat{i} + (-1 + 3t)\hat{j}$
$\vec{v}(3) = 11\hat{i} + 8\hat{j}\,\text{ms}^{-1}$, $|\vec{v}| = \sqrt{185} = 13.60\,\text{ms}^{-1}$
বেগকে পুনরায় সমাকলন করে অবস্থান পাই।
$\vec{r}(t) = \left(2t + \frac{t^3}{3}\right)\hat{i} + \left(-t + \frac{3t^2}{2}\right)\hat{j}$
$\vec{r}(3) = 15\hat{i} + 10.5\hat{j}\,\text{m}$
সময়নির্ভর বলের ক্ষেত্রে ত্বরণ ধ্রুব ধরে সরল গতিসূত্র প্রয়োগ করা যাবে না; সমাকলন করতে হয়।

১১. $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 6\hat{i} - 4\hat{j} - 14\hat{k}\,\text{Nm}$
z অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনে কেবল τ_z কাজ করে।
$\alpha = \frac{\tau_z}{I} = \frac{-14}{5} = -2.8\,\text{rads}^{-2}$
$\omega = \omega_0 + \alpha t = 10 - 2.8(2) = 4.4\,\text{rads}^{-1}$
$\phi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 20 - 5.6 = 14.4\,\text{rad}$
$W = \tau_z\phi = (-14)(14.4) = -201.6\,\text{J}$
ঋণাত্মক কাজের অর্থ ঘূর্ণনগত গতিশক্তি কমেছে; $\frac{1}{2}I(\omega^2 - \omega_0^2)$ থেকেও একই ফল পাওয়া যায়।

১২. দণ্ড ও বিন্দুভরগুলোর জড়তার ভ্রামক একই অক্ষের সাপেক্ষে যোগ করি।
$I = \frac{1}{3}(3)(2)^2 + 1(0.5)^2 + 1(2.0)^2 = 8.25\,\text{kg m}^2$
$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{10}{8.25} = 1.21\,\text{rads}^{-2}$
$\omega = \alpha t = 2.42\,\text{rads}^{-1}$
$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = 24.2\,\text{J}$

১৩. পাতলা রিংয়ের জড়তার ভ্রামক $I = mR^2$; বিশুদ্ধ গড়ানোর শর্তে $v = R\omega$।
শক্তি সংরক্ষণ থেকে, $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gh} = \sqrt{9.8(2.45)} = 4.90\,ms^{-1}$
$\omega = \frac{v}{R} = \frac{4.90}{0.25} = 19.6\,rads^{-1}$
$a = \frac{g\sin 30°}{1+\frac{I}{mR^2}} = \frac{9.8(0.50)}{2} = 2.45\,ms^{-2}$
$mg\sin 30° - f = ma \Rightarrow f = 7.35\,N$
ঘর্ষণটি ঢালের ঊর্ধ্বমুখী; এটি রিংয়ের ঘূর্ণন সৃষ্টি করে এবং বিশুদ্ধ গড়ানো বজায় রাখে।

১৪. অক্ষের সাপেক্ষে বাহ্যিক টর্কের ঘাত শূন্য বলে কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত; গতিশক্তি সংরক্ষিত নয়।
$I_d = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(4)(0.4)^2 = 0.32\,kg\,m^2$
$mvR = (I_d + mR^2)\omega$
$\omega = \frac{0.010(400)(0.4)}{0.32+0.010(0.4)^2} = 4.98\,rads^{-1}$
$K_i = \frac{1}{2}mv^2 = 800\,J$, $K_f = \frac{1}{2}(I_d + mR^2)\omega^2 = 3.98\,J$
$K_{loss} = 800 - 3.98 = 796\,J$

১৫. প্রবাহের ক্ষেত্রফল থেকে প্রতি সেকেন্ডে আঘাতকারী ভর নির্ণয় করি।
$A = \pi(0.02)^2 = 1.256 \times 10^{-3}\,m^2$
$\dot{m} = \varrho Av = 1000(1.256 \times 10^{-3})(25) = 31.42\,kgs^{-1}$
পাতের ওপর পানির বল ভরবেগ পরিবর্তনের বিপরীত হারের সমান।
$\vec{F}_{water\ on\ vane} = \dot{m}(\vec{v}_{in} - \vec{v}_{out}) = 785\hat{i} - 785\hat{j}\,N$
$|\vec{F}| = \sqrt{785^2 + 785^2} = 1.11 \times 10^3\,N$
$\tan\phi = \frac{785}{785} \Rightarrow \phi = 45°$, $+x$ অক্ষ থেকে নিচের দিকে।
জেটের দ্রুতি অপরিবর্তিত থাকলেও বেগের দিক বদলায়, তাই ভরবেগ পরিবর্তনের হার শূন্য নয়।

১৬. বলটি $-6\vec{r}$-এর সমানুপাতিক, তাই এটি কেন্দ্রীয় এবং মূলবিন্দুর সাপেক্ষে টর্ক শূন্য।
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$
$L_z = m(xv_y - yv_x) = 2[2(-4) - 1(3)] = -22\,kg\,m^2s^{-1}$
$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2)(3^2 + 4^2) = 25\,J$
$U = \frac{1}{2}(6)r^2 = 3(2^2 + 1^2) = 15\,J$
$E = K + U = 40\,J$
টর্ক শূন্য হওয়ায় কৌণিক ভরবেগ ধ্রুব থাকবে, যদিও কণাটির বেগ ও অবস্থান পরিবর্তিত হবে।

১৭. বাহ্যিক অনুভূমিক বল না থাকায় ভরকেন্দ্রের বেগ সম্পূর্ণ প্রক্রিয়ায় অপরিবর্তিত থাকে।
$v_{CM} = \frac{m_1v_{1i}+m_2v_{2i}}{m_1+m_2} = \frac{2(4)+3(0)}{5} = 1.6\,ms^{-1}$
সর্বাধিক সংকোচনের মুহূর্তে আপেক্ষিক বেগ শূন্য, তাই দুই ব্লকের বেগই v_{CM}।
$v_1 = v_2 = 1.6\,ms^{-1}$
প্রতিস্থাপিত ভর $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} = \frac{6}{5}\,kg$ ব্যবহার করে শক্তি সংরক্ষণ থেকে সংকোচন পাই।
$\frac{1}{2}\mu(4)^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\mu(16)}{200}} = 0.310\,m$

১৮. সর্বনিম্ন উচ্চতায় শীর্ষবিন্দুতে অভিলম্ব বল শূন্য হবে; তখন ওজনই কেন্দ্রমুখী বল দেয়।
$mg = \frac{mv_{top}^2}{R} \Rightarrow v_{top}^2 = gR$
শক্তি সংরক্ষণ থেকে, $mg(h - 2R) = \frac{1}{2}mv_{top}^2 \Rightarrow h = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5R}{2} = 5.0\,m$
$v_{bottom}^2 = 2gh = 98\,m^2s^{-2}$
$N_{bottom} - mg = \frac{mv_{bottom}^2}{R} = 5mg$
$N_{bottom} = 6mg = 6(0.50)(9.8) = 29.4\,N$

১৯. বিস্ফোরণের আগে মোট ভরবেগ শূন্য ছিল, তাই তা সংরক্ষিত থাকবে।

$2(6\hat{i}) + 3(-2\hat{j}) + 5\vec{v}_3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_3 = -2.4\hat{i} + 1.2\hat{j}\ ms^{-1}$

$K_1 = \frac{1}{2}(2)(6)^2 = 36\,J,\ K_2 = \frac{1}{2}(3)(2)^2 = 6\,J$

$K_3 = \frac{1}{2}(5)(2.4^2 + 1.2^2) = 18\,J$

$K_{total} = 36 + 6 + 18 = 60\,J$

বাহ্যিক ঘাত না থাকায় ভরবেগ সংরক্ষিত থাকলেও, বিস্ফোরণের অভ্যন্তরীণ শক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হওয়ায় মোট গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়।

২০. সমতল বাঁকে ঘর্ষণই কেন্দ্রমুখী বল দেয়, যা সর্বোচ্চ স্থিতি ঘর্ষণ অতিক্রম করতে পারবে না।

$\frac{mv^2}{R} \le \mu mg \Rightarrow R_{min} = \frac{v^2}{\mu g} = \frac{12^2}{0.30(9.8)} = 49.0\,m$

কাত হওয়ার কোণ, $\tan\phi = \frac{v^2}{Rg}$

$R = 50\,m$ হলে, $\tan\phi = \frac{144}{50(9.8)} = 0.294 \Rightarrow \phi = 16.4°$

সর্বনিম্ন ব্যাসার্ধে ঘর্ষণ তার সর্বোচ্চ মানে থাকে; $50\,m$ বাঁকে প্রয়োজনীয় কাত হওয়ার কোণ প্রায় $16.4°$।

গণিত ২০০ নম্বর

২১. প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণ: $z^2 + 4z + (1 - 12i) = 0$

$\Rightarrow z^2 + 4z + 4 - 3 - 12i = 0$

$\Rightarrow (z + 2)^2 = 3 + 12i$

ধরি, $z + 2 = w$, তাহলে সমীকরণটি দাঁড়ায় $w^2 = 3 + 12i$

এর মূলদ্বয় w_1 এবং w_2 হলে, $w_2 = -w_1$ হবে।

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণের মূলদ্বয় হবে $z_1 = w_1 - 2$ এবং $z_2 = -w_1 - 2$

আমাদের নির্ণয় করতে হবে: $|z_1|^2 + |z_2|^2$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |w_1 - 2|^2 + |-w_1 - 2|^2 = |w_1 - 2|^2 + |w_1 + 2|^2$

জটিল সংখ্যার সামান্তরিক সূত্র **(Parallelogram Law)** $|a - b|^2 + |a + b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ হতে পাই:

$|w_1 - 2|^2 + |w_1 + 2|^2 = 2(|w_1|^2 + |2|^2) = 2|w_1|^2 + 8$

এখানে, $w_1^2 = 3 + 12i \Rightarrow |w_1^2| = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 144} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$

অর্থাৎ, $|w_1|^2 = 3\sqrt{17}$

$\therefore |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2(3\sqrt{17}) + 8 = 8 + 6\sqrt{17}$।

২২. দেওয়া আছে, $|z + 3| = |z - 3|$

ধরি, $z = x + iy$

$\Rightarrow |(x + 3) + iy| = |(x - 3) + iy|$

$\Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = (x - 3)^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$

অর্থাৎ, z একটি বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা। ধরি, $z = iy$

দ্বিতীয় শর্ত: $\arg\left(\frac{iy+4}{iy-2i}\right) = \frac{\pi}{4}$

$\frac{4+iy}{i(y-2)} = (4 + iy) \cdot \frac{1}{i(y-2)} = (4 + iy) \cdot \frac{-i}{y-2}$

$= \frac{-4i - i^2y}{y-2} = \frac{y-4i}{y-2} = \frac{y}{y-2} - i\frac{4}{y-2}$

যেহেতু আর্গুমেন্ট $\frac{\pi}{4}$ (প্রথম চতুর্ভাগ), তাই বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ উভয়ই ধনাত্মক এবং সমান হবে।

$\therefore \frac{y}{y-2} = \frac{-4}{y-2}$

$\Rightarrow y = -4$

(যাচাই: $y = -4$ হলে, বাস্তব অংশ $\frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} > 0$ এবং কাল্পনিক অংশ $\frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} > 0$, সুতরাং শর্ত সিদ্ধ হয়)।

$\therefore z = -4i$

নির্ণেয় মান, $|z|^2 = 0^2 + (-4)^2 = 16$।

২৩. প্রদত্ত সমীকরণ: $z^2 + 6z + 36 = 0$

সমীকরণটির মূলগুলো নির্ণয় করি:

$z = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4(1)(36)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-144}}{2}$

$= \frac{-6 \pm \sqrt{-108}}{2} = \frac{-6 \pm 6\sqrt{3}i}{2} = -3 \pm 3\sqrt{3}i$

ধরি, $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}i$ এবং $z_2 = -3 - 3\sqrt{3}i$

প্রথম রাশির মান:

$z_1 + 3\sqrt{3}i = -3 + 3\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i = -3 + 6\sqrt{3}i$

$\therefore |z_1 + 3\sqrt{3}i|^2 = (-3)^2 + (6\sqrt{3})^2 = 9 + 108 = 117$

দ্বিতীয় রাশির মান:

$z_2 + 3\sqrt{3}i = -3 - 3\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i = -3$

$\therefore |z_2 + 3\sqrt{3}i|^2 = (-3)^2 + 0^2 = 9$

নির্ণেয় মান:

$|z_1 + 3\sqrt{3}i|^2 + |z_2 + 3\sqrt{3}i|^2 = 117 + 9 = 126$।

২৪. দেওয়া আছে, $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

এটিকে পোলার বা অয়লার আকারে প্রকাশ করি:

মডুলাস $r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

আর্গুমেন্ট $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\therefore z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}$

ডি-ময়াভারের উপপাদ্য অনুযায়ী:

$z^{105} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{105} = e^{i\frac{105\pi}{6}} = e^{i\frac{35\pi}{2}}$

কোণটিকে সরল করি:

$\frac{35\pi}{2} = 16\pi + \frac{3\pi}{2}$

যেহেতু 16π হলো 2π এর পূর্ণ গুণিতক, তাই:

$e^{i\frac{35\pi}{2}} = e^{i(16\pi + \frac{3\pi}{2})} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i(-1) = -i$

প্রদত্ত রাশিতে মান বসিয়ে পাই:

$(z^{105} - i)^6 = (-i - i)^6 = (-2i)^6$

$= (-2)^6 \cdot i^6 = 64 \cdot (i^2)^3 = 64 \cdot (-1)^3 = -64$।

২৫. ধরি, $z = re^{i\theta}$। তাহলে $\bar{z} = re^{-i\theta}$।
প্রদত্ত সমীকরণ: $2z^2 + \bar{z} = 0$
$\Rightarrow 2r^2e^{i2\theta} + re^{-i\theta} = 0$
যেহেতু আমরা অশূন্য মূলগুলো খুঁজছি, তাই $r \neq 0$।
সমীকরণটিকে $re^{-i\theta}$ দ্বারা ভাগ করে পাই:
$2re^{i3\theta} + 1 = 0 \Rightarrow 2re^{i3\theta} = -1$
-1 কে পোলার আকারে প্রকাশ করলে, $-1 = 1 \cdot e^{i(2k\pi+\pi)}$।
$\therefore 2re^{i3\theta} = 1 \cdot e^{i(2k\pi+\pi)}$
উভয়পক্ষ থেকে মডুলাস সমীকৃত করে পাই:
$2r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$
আর্গুমেন্ট সমীকৃত করে পাই:
$3\theta = 2k\pi + \pi \Rightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{3}$
$k = 0, 1, 2$ এর জন্য θ এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যায়: $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$।
সুতরাং, অশূন্য মূল আছে মোট ৩টি এবং প্রত্যেকের মডুলাস $r = \frac{1}{2}$।
নির্ণেয় মডুলাসের বর্গের সমষ্টি:
$\sum |z|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$।

২৬. C_1 বৃত্তের সমীকরণ: $|z| = 4$
এর কেন্দ্র, $O_1(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ, $R_1 = 4$
C_2 বৃত্তের সমীকরণ: $|z - (5 + 12i)| = 6$
এর কেন্দ্র, $O_2(5, 12)$ এবং ব্যাসার্ধ, $R_2 = 6$
বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = O_1O_2$:
$d = \sqrt{(5-0)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$
আমরা জানি, দুটি বৃত্তের উপরিস্থিত যেকোনো দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বের:
সর্বনিম্ন মান, $\min |z_1 - z_2| = d - R_1 - R_2$ (যদি তারা পরস্পর ছেদ না করে)
$= 13 - 4 - 6 = 3$
সর্বোচ্চ মান, $\max |z_1 - z_2| = d + R_1 + R_2$
$= 13 + 4 + 6 = 23$
নির্ণেয় মান:
$\max |z_1 - z_2| + \min |z_1 - z_2| = 23 + 3 = 26$।

২৭. প্রদত্ত সমীকরণ দুটি দুটি বৃত্ত নির্দেশ করে।
১ম বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(8, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $R_1 = 5$
২য় বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(2, 8)$ এবং ব্যাসার্ধ $R_2 = 5$
কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = C_1C_2$:
$d = \sqrt{(8-2)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$
এখানে আমরা দেখতে পাচ্ছি, $R_1 + R_2 = 5 + 5 = 10 = d$
সুতরাং, বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। তাদের একটিমাত্র সাধারণ বিন্দু (স্পর্শবিন্দু) থাকবে যা z কে নির্দেশ করে।
z বিন্দুটি C_1 এবং C_2 এর মধ্যবিন্দু হবে।
$\therefore z = \frac{8+2}{2} + i\frac{0+8}{2} = 5 + 4i$
আমাদের নির্ণয় করতে হবে: $z^2 - 10z + 45$
$z = 5 + 4i \Rightarrow z - 5 = 4i$
উভয়পক্ষ বর্গ করে পাই:
$(z - 5)^2 = (4i)^2$
$\Rightarrow z^2 - 10z + 25 = -16$
$\Rightarrow z^2 - 10z + 41 = 0$
প্রদত্ত রাশি: $z^2 - 10z + 45 = (z^2 - 10z + 41) + 4 = 0 + 4 = 4$।

২৮. প্রদত্ত সমীকরণ: $5\left(\frac{x}{1+2i}+\frac{y}{2-i}\right)=11-2i$

লব ও হরকে অনুবন্ধী রাশি দ্বারা গুণ করে পাই:

$5\left(\frac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{y(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)=11-2i$

$\Rightarrow 5\left(\frac{x(1-2i)}{1^2+2^2}+\frac{y(2+i)}{2^2+1^2}\right)=11-2i$

$\Rightarrow 5\left(\frac{x-2xi}{5}+\frac{2y+yi}{5}\right)=11-2i$

5 দ্বারা গুণ ও ভাগ কাটাকাটি করে পাই:

$(x+2y)-i(2x-y)=11-2i$

উভয়পক্ষ হতে বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমীকৃত করে পাই:

$x+2y=11$ **.....(i)**

$-(2x-y)=-2 \Rightarrow 2x-y=2$ **.....(ii)**

(ii) নং হতে পাই, $y=2x-2$। এটি **(i)** নং এ বসিয়ে পাই:

$x+2(2x-2)=11$

$\Rightarrow x+4x-4=11 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$

x এর মান বসিয়ে পাই, $y=2(3)-2=6-2=4$

$\therefore x+y=3+4=7$।

২৯. প্রদত্ত অসমতাটি একটি বৃত্ত এবং তার অভ্যন্তরভাগ নির্দেশ করে।

বৃত্তের সমীকরণ: $|z-4|=2$

এর কেন্দ্র, $C(4,0)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r=2$

মূলবিন্দু $O(0,0)$ হতে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক z এর আর্গুমেন্টের সর্বোচ্চ সীমা নির্দেশ করে।

ধরি, মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকটি x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে, যা z এর সর্বোচ্চ আর্গুমেন্ট।

সমকোণী ত্রিভুজ OTC হতে পাই, $\angle OTC=90°$।

$\sin\theta=\frac{CT}{OC}=\frac{r}{OC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$

স্পর্শবিন্দু T (যা নির্ণেয় z) এর মূলবিন্দু হতে দূরত্ব OT বের করি পিথাগোরাসের সাহায্যে:

$OT=\sqrt{OC^2-CT^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

তাহলে, z এর মডুলাস $2\sqrt{3}$ এবং আর্গুমেন্ট $\frac{\pi}{6}$। পোলার আকারে:

$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=3+i\sqrt{3}$।

৩০. প্রদত্ত অসমতা: $|2z-4(1+i)|\le 6$

উভয়পক্ষকে 2 দিয়ে ভাগ করে পাই:

$|z-2(1+i)|\le 3 \Rightarrow |z-(2+2i)|\le 3$

এটি আরগ্যান্ড সমতলে এমন একটি বৃত্ত বা তার অভ্যন্তরভাগ নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $C(2,2)$ এবং ব্যাসার্ধ $R=3$।

আমাদের $|z+2-i|=|z-(-2+i)|$ এর সর্বনিম্ন মান বের করতে হবে।

এটি জ্যামিতিকভাবে বৃত্তের উপরিস্থিত বা ভেতরের যেকোনো বিন্দু z হতে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(-2,1)$ এর দূরত্বের সর্বনিম্ন মান নির্দেশ করে।

বৃত্তের কেন্দ্র $C(2,2)$ এবং বিন্দু $P(-2,1)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব d:

$d=\sqrt{(2-(-2))^2+(2-1)^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

যেহেতু $d=\sqrt{17}\approx 4.12>R$, তাই P বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।

বৃত্তের বাইরে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তের সর্বনিম্ন দূরত্ব $=d-R$

$=\sqrt{17}-3$।

৩১. **১ম সমীকরণ:** $x^2 - 7x + r = 0$
মূলদ্বয় α, β হওয়ায়,
$\alpha + \beta = 7$ **.....(i)**
$\alpha\beta = r$ **.....(ii)**
২য় সমীকরণ: $x^2 - 5x + r = 0$
মূলদ্বয় 2α এবং $\frac{\beta}{2}$ হওয়ায়,
$2\alpha + \frac{\beta}{2} = 5 \Rightarrow 4\alpha + \beta = 10$ **.....(iii)**
$(2\alpha)\left(\frac{\beta}{2}\right) = r \Rightarrow \alpha\beta = r$ **(**যা ২য় শর্তের সাথে মিলে যায়**)**।

এখন **(iii)** হতে **(i)** বিয়োগ করে পাই**:**
$(4\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = 10 - 7$
$\Rightarrow 3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1$

$\alpha = 1$ মানটি **(i)** নং সমীকরণে বসিয়ে পাই**:**
$1 + \beta = 7 \Rightarrow \beta = 6$

এখন α ও β এর মান **(ii)** নং সমীকরণে বসিয়ে পাই**:**
$r = \alpha\beta = (1)(6) = 6$।

৩২. প্রদত্ত সমীকরণ**:** $\lambda x^2 - (\lambda + 4)x + 4 = 0$
সমীকরণটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি**:**
$\lambda x^2 - \lambda x - 4x + 4 = 0$
$\Rightarrow \lambda x(x - 1) - 4(x - 1) = 0 \Rightarrow (\lambda x - 4)(x - 1) = 0$
$\therefore x = 1$ অথবা $x = \frac{4}{\lambda}$
আমাদের শর্ত দেওয়া আছে, $\alpha < \beta$ এবং $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}$
Case 1: ধরি, $\alpha = 1$ এবং $\beta = \frac{4}{\lambda}$ **(**যেখানে $1 < \frac{4}{\lambda}$**)**
শর্তানুসারে, $\frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{4}{\lambda}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 2$
(যাচাই**:** $\lambda = 2$ হলে মূলগুলো $1, 2$। এখানে $1 < 2$ শর্তটি সিদ্ধ হয়।**)**
Case 2: ধরি, $\alpha = \frac{4}{\lambda}$ এবং $\beta = 1$ **(**যেখানে $\frac{4}{\lambda} < 1$**)**
শর্তানুসারে, $\frac{1}{\frac{4}{\lambda}} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\lambda}{4} - 1 = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \frac{\lambda}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda = 6$
(যাচাই**:** $\lambda = 6$ হলে মূলগুলো $\frac{2}{3}, 1$। এখানে $\frac{2}{3} < 1$ শর্তটি সিদ্ধ হয়।**)**
$\therefore \lambda$ এর সম্ভাব্য মানগুলো হলো 2 এবং 6।
তাদের সমষ্টি $= 2 + 6 = 8$।

৩৩. প্রদত্ত সমীকরণ: $x^2 - \sqrt{3}x + 3 = 0$
সমীকরণটির মূলগুলো নির্ণয় করি:
$x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-12}}{2}$
$= \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm 3i}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
লক্ষ্য করি, $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$
$\therefore \alpha = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ এবং $\beta = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$
ডি-ময়াভারের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই:
$\alpha^{10} + \beta^{10} = (\sqrt{3})^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}} + (\sqrt{3})^{10}e^{-i\frac{10\pi}{3}}$
$= 3^5\left(e^{i\frac{10\pi}{3}} + e^{-i\frac{10\pi}{3}}\right)$
$= 243 \cdot 2\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)$
এখন, $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{10\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
$\therefore \alpha^{10} + \beta^{10} = 243 \cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -243$।
ব্যাখ্যা: কোণ সরলীকরণের ধাপটি সরাসরি $\frac{10\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3}$ আকারে দেখানো হয়েছে ($4\pi - \frac{2\pi}{3}$ এর পরিবর্তে); উভয় পদ্ধতিতে $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ একই থাকে, তাই চূড়ান্ত উত্তর -243 অপরিবর্তিত।

৩৪. প্রদত্ত সমীকরণ: $x^3 + 0 \cdot x^2 + px + q = 0$
সমীকরণের মূলগুলোর সম্পর্ক হতে পাই:
$\alpha + \beta + \gamma = 0$
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p$
$\alpha\beta\gamma = -q$
প্রশ্নমতে, $-\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = -2$
এবং $\beta\gamma = 2$
যেহেতু $\alpha = -2$ সমীকরণটির একটি মূল, তাই এটি সমীকরণকে সিদ্ধ করবে:
$(-2)^3 + p(-2) + q = 0 \Rightarrow -8 - 2p + q = 0 \Rightarrow 2p - q = -8$ **.....(i)**
আবার, মূলত্রয়ের গুণফল হতে পাই:
$\alpha(\beta\gamma) = -q \Rightarrow (-2)(2) = -q \Rightarrow q = 4$
$q = 4$ মানটি **(i)** নং সমীকরণে বসিয়ে পাই:
$2p - 4 = -8 \Rightarrow 2p = -4 \Rightarrow p = -2$
আমাদের নির্ণয় করতে হবে: $p^3 + q^3 - 3\alpha\beta\gamma$
এখানে $p = -2$, $q = 4$ এবং $\alpha\beta\gamma = -q = -4$
$\therefore p^3 + q^3 - 3\alpha\beta\gamma = (-2)^3 + (4)^3 - 3(-4)$
$= -8 + 64 + 12 = 68$।

৩৫. সমীকরণটি দ্বিঘাত হওয়ার জন্য, $k-2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$

দুটি ভিন্ন বাস্তব মূল থাকার শর্ত: নিশ্চায়ক $D > 0$

$D = (-4k)^2 - 4(k-2)(5k) > 0$

$\Rightarrow 16k^2 - 20k(k-2) > 0$

$\Rightarrow 16k^2 - 20k^2 + 40k > 0$

$\Rightarrow -4k^2 + 40k > 0 \Rightarrow k^2 - 10k < 0 \Rightarrow k(k-10) < 0$

$\therefore 0 < k < 10$ **.....(i)**

দুটি মূলই ধনাত্মক হওয়ার শর্ত:

i. মূলদ্বয়ের যোগফল > 0

$\Rightarrow \frac{-(-4k)}{k-2} > 0 \Rightarrow \frac{4k}{k-2} > 0$

অসমতার নিয়মানুযায়ী, $k \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **.....(ii)**

ii. মূলদ্বয়ের গুণফল > 0

$\Rightarrow \frac{5k}{k-2} > 0$

অসমতার নিয়মানুযায়ী, $k \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **.....(iii)**

এখন **(i), (ii)** এবং **(iii)** এর সাধারণ অংশ **(Intersection)** বের করি:

$0 < k < 10$ এবং $k \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ এর ছেদক হলো $2 < k < 10$।

সুতরাং, k এর মান 2 এবং 10 এর মধ্যবর্তী যেকোনো পূর্ণসংখ্যা হতে পারে।

পূর্ণসংখ্যক মানগুলো হলো: $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$\therefore k$ এর মোট 7টি পূর্ণসংখ্যক মান সম্ভব।

৩৬. প্রদত্ত সমীকরণ: $x^2 - 7|x| + 12 = 0$

আমরা জানি, বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে $x^2 = |x|^2$।

সমীকরণটিকে $|x|$ এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ হিসেবে লিখি:

$|x|^2 - 7|x| + 12 = 0$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাই:

$|x|^2 - 3|x| - 4|x| + 12 = 0$

$\Rightarrow |x|(|x| - 3) - 4(|x| - 3) = 0$

$\Rightarrow (|x| - 3)(|x| - 4) = 0$

হয়, $|x| - 3 = 0 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$

অথবা, $|x| - 4 = 0 \Rightarrow |x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$

সুতরাং সমীকরণটির 4টি বাস্তব মূল রয়েছে: $3, -3, 4, -4$

নির্ণেয় মূলগুলোর বর্গের সমষ্টি:

$S = (3)^2 + (-3)^2 + (4)^2 + (-4)^2$

$= 9 + 9 + 16 + 16 = 50$।

৩৭. ধরি, $A = x^2 - x$ এবং $B = 3x - 15$
লক্ষ্য করি, $A + B = (x^2 - x) + (3x - 15) = x^2 + 2x - 15$
প্রদত্ত সমীকরণটি দেখতে $|A + B| = |A| + |B|$ আকারের।
পরমমানের ধর্ম অনুযায়ী, এই সম্পর্কটি কেবল তখনই সত্য হবে যখন A এবং B এর একই চিহ্ন থাকে, অথবা এদের যেকোনো একটি শূন্য হয়।
অর্থাৎ শর্ত হলো: $AB \geq 0$
মান বসিয়ে পাই:
$(x^2 - x)(3x - 15) \geq 0$
$\Rightarrow x(x - 1) \cdot 3(x - 5) \geq 0$
$\Rightarrow 3x(x - 1)(x - 5) \geq 0$
অসমতা সমাধানের জন্য সংখ্যারেখা **(Number line/Wavy curve method)** ব্যবহার করি।
প্রান্তিক বিন্দুগুলো হলো: $0, 1, 5$
চিহ্নগুলো পরীক্ষা করলে পাই:
$x < 0$ এর জন্য ঋণাত্মক **(−)**
$0 \leq x \leq 1$ এর জন্য ধনাত্মক **(+)**
$1 < x < 5$ এর জন্য ঋণাত্মক **(−)**
$x \geq 5$ এর জন্য ধনাত্মক **(+)**
যেহেতু অসমতাটি ≥ 0, তাই গ্রহণযোগ্য অঞ্চল হবে: $x \in [0, 1] \cup [5, \infty)$
প্রদত্ত সেটের সাথে তুলনা করে পাই: $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 5$
$\therefore \alpha + \beta + \gamma = 0 + 1 + 5 = 6$।

৩৮. ধরি, সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ মূল হলো α।
সুতরাং α উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করবে:
$\alpha^2 + c\alpha + d = 0$ **.....(i)**
$\alpha^2 + d\alpha + c = 0$ **.....(ii)**
(i) নং হতে **(ii)** নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই:
$(c - d)\alpha + (d - c) = 0 \Rightarrow (c - d)\alpha - (c - d) = 0 \Rightarrow (c - d)(\alpha - 1) = 0$
যেহেতু $c \neq d$, তাই $c - d \neq 0$
$\therefore \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$
$\alpha = 1$ মানটি **(i)** নং সমীকরণে বসিয়ে পাই: $1 + c + d = 0 \Rightarrow c + d = -1$
১ম সমীকরণ $x^2 + cx + d = 0$ এর মূলদ্বয়ের গুণফল $= d$
একটি মূল $\alpha = 1$ হলে, ধরি অপর (অসাধারণ) মূলটি β_1।
$\therefore 1 \cdot \beta_1 = d \Rightarrow \beta_1 = d$
২য় সমীকরণ $x^2 + dx + c = 0$ এর মূলদ্বয়ের গুণফল $= c$
একটি মূল $\alpha = 1$ হলে, ধরি অপর (অসাধারণ) মূলটি β_2।
$\therefore 1 \cdot \beta_2 = c \Rightarrow \beta_2 = c$
তাহলে নতুন সমীকরণের মূলদ্বয় হবে c এবং d।
মূলদ্বয়ের যোগফল $= c + d = -1$
মূলদ্বয়ের গুণফল $= cd$
নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2 - (c + d)x + cd = 0 \Rightarrow x^2 + x + cd = 0$।

৩৯. প্রদত্ত সমীকরণ: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$
সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হওয়ায় মূলগুলোর যোগফল:
$\sum \alpha = \alpha + \beta + \gamma = -(-5) = 5$
আমাদের নির্ণয় করতে হবে: $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$
আমরা জানি,
$\alpha + \beta = 5 - \gamma$
$\beta + \gamma = 5 - \alpha$
$\gamma + \alpha = 5 - \beta$
$\therefore (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = (5 - \gamma)(5 - \alpha)(5 - \beta)$
ধরি, $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$
যেহেতু সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ এবং x^3 এর সহগ 1, তাই:
$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
আমাদের মূলতঃ $x = 5$ বসিয়ে $f(5)$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।
$f(5) = (5 - \alpha)(5 - \beta)(5 - \gamma) = 5^3 - 5(5^2) + 8(5) - 4$
$= 125 - 125 + 40 - 4 = 36$
$\therefore (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = 36$।

৪০. যেহেতু ত্রিঘাত সমীকরণটির মূল তিনটি সমান্তর প্রগমনে **(A.P)** আছে,
ধরি, মূল তিনটি হলো: $a - d, a, a + d$
মূলগুলোর যোগফল:
$(a - d) + a + (a + d) = -\frac{-9}{1}$
$\Rightarrow 3a = 9$
$\Rightarrow a = 3$
যেহেতু $a = 3$ সমীকরণটির একটি মূল, তাই এটি সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।
x এর স্থলে 3 বসিয়ে আমরা সরাসরি k এর মান নির্ণয় করতে পারি:
$3^3 - 9(3^2) + k(3) - 24 = 0$
$\Rightarrow 27 - 9(9) + 3k - 24 = 0$
$\Rightarrow 27 - 81 + 3k - 24 = 0$
$\Rightarrow -54 - 24 + 3k = 0$
$\Rightarrow -78 + 3k = 0$
$\Rightarrow 3k = 78$
$\Rightarrow k = 26$
$\therefore k$ এর নির্ণেয় মান 26।
(যাচাই: $k = 26$ বসালে মূলগুলো পাওয়া যায় $2, 3, 4$ যা সমান্তর প্রগমনে আছে)

রসায়ন ২০০ নম্বর

৪১. ধরি, 20.0 mL অংশে $NaOH = a$ mmol এবং $Na_2CO_3 = b$ mmol।
ফেনলফথ্যালিন প্রান্তবিন্দু পর্যন্ত $NaOH$ সম্পূর্ণ প্রশমিত হয় এবং Na_2CO_3 একবার প্রোটনযুক্ত হয়ে $NaHCO_3$ গঠন করে, তাই $a + b = 12.0 \times 0.150 = 1.80$ mmol
মিথাইল অরেঞ্জ পর্যন্ত অতিরিক্ত আয়তন উৎপন্ন $NaHCO_3$-কে সম্পূর্ণ প্রশমিত করে, যার পরিমাণ মূল Na_2CO_3-এর সমান, তাই $b = 8.00 \times 0.150 = 1.20$ mmol
$a = 1.80 - 1.20 = 0.60$ mmol
200 mL-এ (১০ গুণ), $Na_2CO_3 = 12.0$ mmol, $NaOH = 6.00$ mmol
$m(Na_2CO_3) = 12.0 \times 10^{-3} \times 106 = 1.272$ g, $m(NaOH) = 6.00 \times 10^{-3} \times 40 = 0.240$ g
মোট ভেজালের ভর $= 2.00 - 1.272 - 0.240 = 0.488$ g
$\%Na_2CO_3 = \frac{1.272}{2.00} \times 100 = 63.6\%$, $\%NaOH = \frac{0.240}{2.00} \times 100 = 12.0\%$, %ভেজাল $= \frac{0.488}{2.00} \times 100 = 24.4\%$

৪২. $n(HCl)_{\text{প্রদত্ত}} = 50.0 \times 10^{-3} \times 0.800 = 0.0400\,\text{mol}$
$n(HCl)_{\text{অবশিষ্ট}} = n(NaOH) = 25.0 \times 10^{-3} \times 0.400 = 0.0100\,\text{mol}$
$n(HCl)_{\text{ব্যবহৃত}} = 0.0400 - 0.0100 = 0.0300\,\text{mol}$
$MCO_3 + 2HCl \rightarrow MCl_2 + CO_2 + H_2O$
$n(MCO_3) = \frac{0.0300}{2} = 0.0150\,\text{mol}$
$M(MCO_3) = \frac{1.26}{0.0150} = 84\,\text{gmol}^{-1}$
$M + 60 = 84 \Rightarrow M = 24\,\text{gmol}^{-1}$; ধাতুটি Mg।
$V\,(CO_2) = 0.0150 \times 22.4 = 0.336\,\text{L}$

৪৩. $Cr_2O_7^{2-} + 6Fe^{2+} + 14H^+ \rightarrow 2Cr^{3+} + 6Fe^{3+} + 7H_2O$
$n(Cr_2O_7^{2-}) = 40.0 \times 10^{-3} \times 0.0250 = 1.00 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
এই পরিমাণ $Cr_2O_7^{2-}$ সম্পূর্ণভাবে জারণ করতে $6 \times 1.00 \times 10^{-3} = 6.00 \times 10^{-3}\,\text{mol}\ Fe^{2+}$ প্রয়োজন।
$n(Fe^{2+})_{\text{প্রদত্ত}} = 60.0 \times 10^{-3} \times 0.150 = 9.00 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
প্রদত্ত Fe^{2+} প্রয়োজনের চেয়ে বেশি, তাই $K_2Cr_2O_7$ **limiting reactant**।
$n(Fe^{2+})_{\text{অবশিষ্ট}} = 9.00 \times 10^{-3} - 6.00 \times 10^{-3} = 3.00 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$MnO_4^- + 5Fe^{2+} + 8H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 4H_2O$
$n(KMnO_4) = \frac{3.00 \times 10^{-3}}{5} = 6.00 \times 10^{-4}\,\text{mol}$
$V\,(KMnO_4) = \frac{6.00 \times 10^{-4}}{0.0250} \times 1000 = 24.0\,\text{mL}$

৪৪. $MnO_2 + 4HCl \rightarrow MnCl_2 + Cl_2 + 2H_2O$
$Cl_2 + 2KI \rightarrow 2KCl + I_2$
$I_2 + 2Na_2S_2O_3 \rightarrow 2NaI + Na_2S_4O_6$
সামগ্রিকভাবে, $MnO_2 \equiv Cl_2 \equiv I_2 \equiv 2S_2O_3^{2-}$
$n(S_2O_3^{2-}) = 96.0 \times 10^{-3} \times 0.250 = 0.0240\,\text{mol}$
$n(MnO_2) = \frac{0.0240}{2} = 0.0120\,\text{mol}$
$m(MnO_2) = 0.0120 \times 87 = 1.044\,\text{g}$
$\%MnO_2 = \frac{1.044}{2.61} \times 100 = 40.0\%$
$m(Na_2S_2O_3 \cdot 5H_2O) = 0.0240 \times 248 = 5.952\,\text{g}$

৪৫. $n(CuSO_4) = \frac{1.60}{160} = 0.0100\,\text{mol}$
$m(H_2O) = 2.50 - 1.60 = 0.90\,\text{g}$, $n(H_2O) = \frac{0.90}{18} = 0.0500\,\text{mol}$
$x = \frac{n(H_2O)}{n(CuSO_4)} = \frac{0.0500}{0.0100} = 5$
$\%\text{Crystal water} = \frac{0.90}{2.50} \times 100 = 36.0\%$
$CuSO_4 \cdot 5H_2O$-এর মোলার ভর $= 160 + 5(18) = 250\,\text{gmol}^{-1}$
12.50 g **hydrated salt**-এ $n = \frac{12.50}{250} = 0.0500\,\text{mol}$, তাই $m(CuSO_4) = 0.0500 \times 160 = 8.00\,\text{g}$

৪৬. ধরি, $NaCl = x\,\text{mol}$ এবং $NaBr = y\,\text{mol}$ মূল মিশ্রণে।
$58.5x + 103y = 0.300$ (মূল মিশ্রণের ভর)
$143.5x + 188y = 0.600$ (অধঃক্ষেপের ভর, যেহেতু $n(AgCl) = n(NaCl) = x$ এবং $n(AgBr) = n(NaBr) = y$)
দুটি সমীকরণ একসঙ্গে সমাধান করে, $x = 1.428 \times 10^{-3}\,\text{mol}$, $y = 2.102 \times 10^{-3}\,\text{mol}$
$m(NaCl) = 1.428 \times 10^{-3} \times 58.5 = 0.0835\,\text{g}$
$m(NaBr) = 2.102 \times 10^{-3} \times 103 = 0.2165\,\text{g}$
$\%NaCl = \frac{0.0835}{0.300} \times 100 = 27.8\%$, $\%NaBr = \frac{0.2165}{0.300} \times 100 = 72.2\%$

৪৭. KOH শোষণ করা 30.0 mL আয়তনই উৎপন্ন CO_2-এর আয়তন, $V(CO_2) = 30.0\,mL$
হাইড্রোকার্বন C_xH_y হলে, $C_xH_y + \left(x + \frac{y}{4}\right) O_2 \rightarrow xCO_2 + \frac{y}{2}H_2O$; আয়তনের অনুপাত থেকে, $15x = 30 \Rightarrow x = 2$
অবশিষ্ট গ্যাস (অক্সিজেন) $= 75.0 - 30.0 = 45.0\,mL$
ব্যবহৃত $O_2 = 90.0 - 45.0 = 45.0\,mL$
$15\left(2 + \frac{y}{4}\right) = 45 \Rightarrow y = 4$
হাইড্রোকার্বনটি C_2H_4, এবং ব্যবহৃত O_2-এর আয়তন 45.0 mL।

৪৮. $n(H_3PO_4) = 50.0 \times 10^{-3} \times 0.200 = 10.0\,mmol$, $n(NaOH) = 75.0 \times 10^{-3} \times 0.200 = 15.0\,mmol$
প্রথমে 10.0 mmol NaOH সব H_3PO_4-কে $H_2PO_4^-$-এ রূপান্তর করে; অবশিষ্ট $NaOH = 15.0 - 10.0 = 5.0\,mmol$
অবশিষ্ট NaOH সমপরিমাণ $H_2PO_4^-$-কে HPO_4^{2-}-এ রূপান্তর করে, তাই $n(H_2PO_4^-) = 10.0 - 5.0 = 5.0\,mmol$ এবং $n(HPO_4^{2-}) = 5.0\,mmol$
$H_2PO_4^-$ ও HPO_4^{2-} সমান পরিমাণে থাকায় এটি একটি বাফার দ্রবণ, যেখানে $pH = pK_{a2} + \log\frac{[HPO_4^{2-}]}{[H_2PO_4^-]} = pK_{a2} = 7.20$
দ্বিতীয় সমতুল্য বিন্দুতে (সব HPO_4^{2-}) পৌঁছাতে মোট NaOH প্রয়োজন $2 \times n(H_3PO_4) = 20.0\,mmol$
অতিরিক্ত প্রয়োজনীয় $NaOH = 20.0 - 15.0 = 5.0\,mmol$
$V(NaOH)_{\text{অতিরিক্ত}} = \frac{5.0}{0.200} = 25.0\,mL$

৪৯. $n(KMnO_4)_{\text{প্রদত্ত}} = 50.0 \times 10^{-3} \times 0.200 = 0.0100\,mol$
$MnO_4^- + 5Fe^{2+} + 8H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 4H_2O$
অবশিষ্ট $KMnO_4$ প্রশমনে ব্যবহৃত $FeSO_4$ থেকে, $n(KMnO_4)_{\text{অবশিষ্ট}} = \frac{100.0\times10^{-3}\times0.200}{5} = 0.00400\,mol$
$n(KMnO_4)_{\text{ব্যবহৃত}} = 0.0100 - 0.00400 = 0.00600\,mol$ যা FeC_2O_4-এর সঙ্গে বিক্রিয়া করেছে।
$5FeC_2O_4 + 3MnO_4^- + 24H^+ \rightarrow 5Fe^{3+} + 10CO_2 + 3Mn^{2+} + 12H_2O$
$n(FeC_2O_4 \cdot 2H_2O) = \frac{5}{3} \times 0.00600 = 0.0100\,mol$
মোলার ভর $FeC_2O_4 \cdot 2H_2O \approx 180\,gmol^{-1}$, তাই $m = 0.0100 \times 180 = 1.80\,g$
বিশুদ্ধতা $= \frac{1.80}{2.00} \times 100 = 90.0\%$
$n(CO_2) = 2 \times n(FeC_2O_4 \cdot 2H_2O) = 0.0200\,mol$, $V(CO_2) = 0.0200 \times 22400 = 448\,mL$
মূল FeC_2O_4-এর জারণ থেকে উৎপন্ন Fe^{3+}-এর মোল $= n(FeC_2O_4 \cdot 2H_2O) = 0.0100\,mol$

৫০. $MnO_4^- + 5Fe^{2+} + 8H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 4H_2O$
প্রথম **aliquot**-এ কেবল Fe^{2+} বিক্রিয়া করে, $n(Fe^{2+}) = 5 \times (0.0200 \times 0.0100) = 1.00 \times 10^{-3}\,mol$
দ্বিতীয় **aliquot**-এ সব লোহা Fe^{2+} রূপে থাকে, তাই মোট লোহা $n(Fe)_{\text{মোট}} = 5 \times (0.0200 \times 0.0250) = 2.50 \times 10^{-3}\,mol$
$n(Fe^{3+}) = n(Fe)_{\text{মোট}} - n(Fe^{2+}) = 2.50 \times 10^{-3} - 1.00 \times 10^{-3} = 1.50 \times 10^{-3}\,mol$
$Fe^{2+} : Fe^{3+} = 1.00 : 1.50 = 2 : 3$
25.0 mL থেকে প্রতি লিটারে স্কেল করার গুণক $\frac{1000}{25.0} = 40$
$n(FeSO_4)_{\text{প্রতি লিটার}} = 1.00 \times 10^{-3} \times 40 = 0.0400\,mol$, $[FeSO_4] = 0.0400 \times 152 = 6.08\,gL^{-1}$
$n\{Fe_2(SO_4)_3\}_{\text{প্রতি লিটার}} = \frac{1.50\times10^{-3}}{2} \times 40 = 0.0300\,mol$, $[Fe_2(SO_4)_3] = 0.0300 \times 400 = 12.0\,gL^{-1}$

৫১. $MnO_4^- + 5Fe^{2+} + 8H^+ \rightarrow Mn^{2+} + 5Fe^{3+} + 4H_2O$
$n(Fe^{2+}) = 150 \times 10^{-3} \times 0.100 = 0.0150\,mol$
$n(KMnO_4) = \frac{0.0150}{5} = 3.00 \times 10^{-3}\,mol$
$m(KMnO_4)_{\text{বিশুদ্ধ}} = 3.00 \times 10^{-3} \times 158.0 = 0.4740\,g$
বিশুদ্ধতা $= \frac{0.4740}{0.500} \times 100 = 94.8\%$
$m_{\text{ভেজাল}} = 0.500 - 0.4740 = 0.0260\,g$
$n(Mn^{2+}) = n(KMnO_4) = 3.00 \times 10^{-3}\,mol$

৫২. 1 L গাঢ় দ্রবণ ধরলে, ভর = $1000 \times 1.80 = 1800\,g$
$m(H_2SO_4) = 0.980 \times 1800 = 1764\,g$
$M_{গাঢ়} = \frac{1764}{98} = 18.0\,M$
লঘুকরণ সূত্র থেকে, $M_{লঘুকৃত} = \frac{18.0 \times 12.0}{600} = 0.360\,M$
H_2SO_4 দ্বিপ্রোটিক বলে, $n(NaOH) = 2 \times n(H_2SO_4) = 2 \times 0.360 \times 25.0 \times 10^{-3} = 0.0180\,mol$
$V\,(NaOH) = \frac{0.0180}{0.450} \times 1000 = 40.0\,mL$

৫৩. **EDTA,** Ca^{2+} ও Mg^{2+} উভয়ের সঙ্গেই 1:1 অনুপাতে জটিল গঠন করে।
$n(EDTA) = 12.5 \times 10^{-3} \times 0.0100 = 1.25 \times 10^{-4}\,mol$
$n(CaCO_3)_{সমতুল্য} = 1.25 \times 10^{-4}\,mol$, $m(CaCO_3) = 1.25 \times 10^{-4} \times 100 = 1.25 \times 10^{-2}\,g = 12.5\,mg$
50.0 mL নমুনায় ঘনমাত্রা = $\frac{12.5\,mg}{50.0 \times 10^{-3}\,L} = 250\,mgL^{-1} = 250\,ppm$
French degree, $= \frac{250}{10} = 25.0°f$
2.00 L নমুনায় $CaCO_3$-সমতুল্য ভর = $250 \times 2.00 = 500\,mg$

৫৪. $m(C) = 0.264 \times \frac{12}{44} = 0.0720\,g$, $m(H) = 0.108 \times \frac{2}{18} = 0.0120\,g$
$m(O) = 0.120 - 0.0720 - 0.0120 = 0.0360\,g$
$\%C = \frac{0.0720}{0.120} \times 100 = 60\%$, $\%H = \frac{0.0120}{0.120} \times 100 = 10\%$, $\%O = \frac{0.0360}{0.120} \times 100 = 30\%$
মৌলের মোল অনুপাত, $C : H : O = \frac{60}{12} : \frac{10}{1} : \frac{30}{16} = 5 : 10 : 1.875$
সবচেয়ে ছোট মানকে ভাগ করে ও 3 দিয়ে গুণ করে পূর্ণসংখ্যা অনুপাত পাই, $C : H : O = 8 : 16 : 3$
স্থূল সংকেত $C_8H_{16}O_3$, এর ভর = $8(12) + 16(1) + 3(16) = 160\,gmol^{-1}$, যা প্রদত্ত মোলার ভরের সমান।
স্থূল ও আণবিক সংকেত অভিন্ন, $C_8H_{16}O_3$।

৫৫. $H_3PO_4 \rightarrow NaH_2PO_4$ রূপান্তরে ১টি প্রোটন সরে, তাই তুল্য ভর $E_1 = \frac{98}{1} = 98\,gmol^{-1}$
$H_3PO_4 \rightarrow Na_2HPO_4$ রূপান্তরে ২টি প্রোটন সরে, $E_2 = \frac{98}{2} = 49\,gmol^{-1}$
$H_3PO_4 \rightarrow Na_3PO_4$ রূপান্তরে ৩টি প্রোটন সরে, $E_3 = \frac{98}{3} = 32.7\,gmol^{-1}$
$n(H_3PO_4) = \frac{4.90}{98} = 0.0500\,mol$
Na_2HPO_4 পর্যন্ত প্রশমনে $n(NaOH) = 2 \times 0.0500 = 0.100\,mol$, $V_2 = \frac{0.100}{0.500} \times 1000 = 200\,mL$
Na_3PO_4 পর্যন্ত প্রশমনে $n(NaOH) = 3 \times 0.0500 = 0.150\,mol$, $V_3 = \frac{0.150}{0.500} \times 1000 = 300\,mL$

৫৬. $n(O_2) = \frac{8.00}{32} = 0.250\,mol$, $n(N_2) = \frac{14.0}{28} = 0.500\,mol$
$n_{মোট} = 0.750\,mol$
$X_{O_2} = \frac{0.250}{0.750} = \frac{1}{3}$, $X_{N_2} = \frac{0.500}{0.750} = \frac{2}{3}$
ডাল্টনের আংশিক চাপের সূত্র থেকে, $P_{O_2} = X_{O_2} \times P_{মোট} = \frac{1}{3} \times 2.00 = 0.667\,atm$
$P_{N_2} = \frac{2}{3} \times 2.00 = 1.333\,atm$
$\overline{M} = \frac{m_{মোট}}{n_{মোট}} = \frac{8.00+14.0}{0.750} = 29.33\,gmol^{-1}$
$\varrho_{STP} = \frac{\overline{M}}{22.4} = \frac{29.33}{22.4} = 1.31\,gL^{-1}$

৫৭. $CaOCl_2 + H_2SO_4 \rightarrow CaSO_4 + H_2O + Cl_2$
$Cl_2 + 2KI \rightarrow 2KCl + I_2$
$I_2 + 2Na_2S_2O_3 \rightarrow 2NaI + Na_2S_4O_6$
$n(I_2) = \frac{0.0320 \times 0.250}{2} = 4.00 \times 10^{-3}\,mol$
$n(Cl_2) = n(I_2) = 4.00 \times 10^{-3}\,mol$
$m(Cl_2) = 4.00 \times 10^{-3} \times 71 = 0.284\,g$
Available chlorine $= \frac{0.284}{1.20} \times 100 = 23.67\%$
$V\,(Cl_2)_{STP} = 4.00 \times 10^{-3} \times 22400 = 89.6\,mL$

৫৮. $KHC_8H_4O_4$ একটি মনোপ্রোটিক অ্যাসিড, তাই $n(NaOH) = n(KHP)$
$n(KHP) = \frac{0.5105}{204.2} = 2.500 \times 10^{-3}$ mol
$M(NaOH) = \frac{2.500\times10^{-3}}{25.00\times10^{-3}} = 0.1000$ M
$n(NaOH)_{20mL} = 0.1000 \times 20.00 \times 10^{-3} = 2.000 \times 10^{-3}$ mol
$NaOH + HCl \rightarrow NaCl + H_2O$ থেকে, $n(HCl) = n(NaOH)_{20mL} = 2.000 \times 10^{-3}$ mol
$M(HCl) = \frac{2.000\times10^{-3}}{18.50\times10^{-3}} = 0.1081$ M

৫৯. উত্তাপে শুধু $NaHCO_3$ ভেঙে যায়, $2NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O + CO_2$; প্রতি মোল $NaHCO_3$-এ ভরহ্রাস $\frac{62}{2} = 31$ g।
ধরি, $m(NaHCO_3) = x$ g এবং $m(Na_2CO_3) = y$ g; $x + y = 16.44$
$\frac{x}{84} \times 31 = 3.72 \Rightarrow x = 10.08$ g
$y = 16.44 - 10.08 = 6.36$ g
উত্তাপের পর অবশিষ্ট Na_2CO_3-এর মোট পরিমাণ, $n = \frac{6.36}{106} + \frac{1}{2}\left(\frac{10.08}{84}\right) = 0.0600 + 0.0600 = 0.1200$ mol
20.0 mL অংশে, $n(Na_2CO_3) = 0.1200 \times \frac{20.0}{200} = 0.0120$ mol
ফেনলফথ্যালিন পর্যন্ত Na_2CO_3 একবার প্রোটনযুক্ত হয়, $n(HCl) = n(Na_2CO_3) = 0.0120$ mol
$V_{\text{ফেনলফথ্যালিন}} = \frac{0.0120}{0.150} \times 1000 = 80.0$ mL
মিথাইল অরেঞ্জ পর্যন্ত অতিরিক্ত আয়তনও একই পরিমাণ প্রশমিত করে, তাই অতিরিক্ত আয়তনও 80.0 mL।

৬০. ধরি, $n(CaCO_3) = x$ mol এবং $n(MgCO_3) = y$ mol; $100x + 84y = 10.20$
$CaCO_3 \rightarrow CaO + CO_2$ এবং $MgCO_3 \rightarrow MgO + CO_2$; ভরহ্রাস উৎপন্ন CO_2-এর সমান, $44(x + y) = 4.84 \Rightarrow x + y = 0.110$
দুটি সমীকরণ সমাধান করে, $x = 0.0600$ mol, $y = 0.0500$ mol
$m(CaCO_3) = 0.0600 \times 100 = 6.00$ g, $m(MgCO_3) = 0.0500 \times 84 = 4.20$ g
$\%CaCO_3 = \frac{6.00}{10.20} \times 100 = 58.82\%$, $\%MgCO_3 = \frac{4.20}{10.20} \times 100 = 41.18\%$
$m(CaO) = 0.0600 \times 56 = 3.36$ g, $m(MgO) = 0.0500 \times 40 = 2.00$ g
মোট অবশিষ্টাংশ $= 3.36 + 2.00 = 5.36$ g
প্রতিটি অক্সাইড দ্রবীভূত করতে ($CaO + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O$, একইভাবে MgO) প্রতি মোল অক্সাইডে 2 mol HCl প্রয়োজন, $n(HCl) = 2(0.0600 + 0.0500) = 0.220$ mol
$V(HCl) = \frac{0.220}{1.00} \times 1000 = 220$ mL