১. $x^2 + y^2 + px + qy + 8 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্র $ax - y = 6$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটি $(0, -4)$ ও $(-4, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে a, p, q এর মান নির্ণয় করো। (The center of the circle $x^2 + y^2 + px + qy + 8 = 0$ lies on the line $ax - y = 6$. If the circle passes through the points $(0, -4)$ and $(-4, 0)$, find the values of a, p, q.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $\left(-\frac{p}{2}, -\frac{q}{2}\right)$।

যেহেতু কেন্দ্রটি $ax - y = 6$ রেখার উপর অবস্থিত:

$a\left(-\frac{p}{2}\right) - \left(-\frac{q}{2}\right) = 6 \Rightarrow q - ap = 12$ .....(i)

বৃত্তটি $(0, -4)$ বিন্দুগামী হওয়ায়:

$0 + 16 + p(0) + q(-4) + 8 = 0 \Rightarrow 24 - 4q = 0 \Rightarrow q = 6$

বৃত্তটি $(-4, 0)$ বিন্দুগামী হওয়ায়:

$16 + 0 + p(-4) + q(0) + 8 = 0 \Rightarrow 24 - 4p = 0 \Rightarrow p = 6$

এখন p ও q এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই:

$6 - a(6) = 12 \Rightarrow -6a = 6 \Rightarrow a = -1$

$\therefore a = -1,\ p = 6,\ q = 6$

[যাচাই: বৃত্তের কেন্দ্র $(-3, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 - 8} = \sqrt{10}$, যা একটি বাস্তব বৃত্ত নির্দেশ করে।]

২. $3x + ky - 4 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে; k এর মান নির্ণয় করো। (The line $3x + ky - 4 = 0$ touches the circle $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$. Find the value of k.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্ত: $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$

এর কেন্দ্র $C(1, 4)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = \sqrt{1^2 + 4^2 - 8} = \sqrt{1 + 16 - 8} = 3$

যেহেতু $3x + ky - 4 = 0$ রেখাটি বৃত্তটিকে স্পর্শ করে, তাই কেন্দ্র $C(1, 4)$ হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\frac{|3(1)+k(4)-4|}{\sqrt{3^2+k^2}} = 3$

$\Rightarrow \frac{|4k-1|}{\sqrt{9+k^2}} = 3$

উভয়পাশে বর্গ করে পাই:

$(4k - 1)^2 = 9(9 + k^2)$

$\Rightarrow 16k^2 - 8k + 1 = 81 + 9k^2$

$\Rightarrow 7k^2 - 8k - 80 = 0$

$\Rightarrow 7k^2 - 28k + 20k - 80 = 0$

$\Rightarrow 7k(k - 4) + 20(k - 4) = 0$

$\Rightarrow (k - 4)(7k + 20) = 0$

$\therefore k = 4$ অথবা $k = -\frac{20}{7}$

৩. $P(-9, 1)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 75 = 0$ বৃত্তের ওপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন দূরত্ব নির্ণয় করো। (Find the maximum and minimum distances from the point $P(-9, 1)$ to any point lying on the circle $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 75 = 0$.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 75 = 0$

এর কেন্দ্র $C(3, -4)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = \sqrt{3^2 + (-4)^2 - (-75)} = \sqrt{9 + 16 + 75} = \sqrt{100} = 10$

প্রদত্ত বিন্দু $P(-9, 1)$ হতে কেন্দ্র $C(3, -4)$ এর দূরত্ব d নির্ণয় করি:

$d = PC = \sqrt{(-9-3)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

যেহেতু $d = 13 > R = 10$, তাই P বিন্দুটি বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু।

বৃত্তের পরিধির কোনো বিন্দু, কেন্দ্র এবং P একই সরলরেখায় অবস্থান করলেই দূরত্ব চরম মান লাভ করে।

বহিঃস্থ বিন্দুর ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ দূরত্ব $= d + R$

$\therefore$ সর্বোচ্চ দূরত্ব $= 13 + 10 = 23$ একক।

এবং সর্বনিম্ন দূরত্ব $= d - R$

$\therefore$ সর্বনিম্ন দূরত্ব $= 13 - 10 = 3$ একক।

$\therefore$ সর্বোচ্চ দূরত্ব 23 একক এবং সর্বনিম্ন দূরত্ব 3 একক।

৪. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার কেন্দ্র (4, 3) বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখা হতে 8 একক দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা খণ্ডিত করে। (Find the equation of a circle whose center is at the point (4, 3) and which cuts off a chord of length 8 units from the line $3x - 4y + 5 = 0$.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত কেন্দ্র $C(4, 3)$ হতে $3x - 4y + 5 = 0$ সরলরেখার (জ্যা-এর) ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য d নির্ণয় করি:

$d = \frac{|3(4)-4(3)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|12-12+5|}{5} = \frac{5}{5} = 1$ একক

দেওয়া আছে, খণ্ডিত জ্যা-এর পূর্ণ দৈর্ঘ্য $= 8$ একক

আমরা জানি, কেন্দ্র হতে জ্যা-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ অর্ধ-জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= \frac{8}{2} = 4$ একক

কেন্দ্র, জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও জ্যা-এর প্রান্তবিন্দু দ্বারা গঠিত সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে,

(ব্যাসার্ধ)^2 = (লম্ব দূরত্ব)^2 + (অর্ধ-জ্যা)^2

$\Rightarrow R^2 = 1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17$

অতএব, বৃত্তটির সমীকরণ:

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 17$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$

৫. P (7, 10) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$ বৃত্তের ওপর একজোড়া স্পর্শক অঙ্কন করা হলো। স্পর্শকদ্বয় বৃত্তটিকে যে দুটি বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাদের সংযোগকারী স্পর্শজ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো এবং স্পর্শকদ্বয় ও স্পর্শজ্যা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত তা বের করো। (A pair of tangents is drawn from the point P (7, 10) to the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$. Find the length of the chord of contact joining the two points of tangency, and find the area of the triangle formed by the tangents and the chord of contact.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্ত: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$

কেন্দ্র $C(1, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 - (-31)} = \sqrt{1 + 4 + 31} = 6$

বহিঃস্থ বিন্দু $P(7, 10)$ হতে কেন্দ্র C এর দূরত্ব, $d = \sqrt{(7-1)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

P বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য, $L = \sqrt{d^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$

ধরি, স্পর্শবিন্দুদ্বয় A ও B। স্পর্শজ্যা AB এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সূত্র: $AB = \frac{2 \times R \times L}{d}$

$\therefore AB = \frac{2 \times 6 \times 8}{10} = \frac{96}{10} = \frac{48}{5} = 9.6$ একক

$\triangle PAB$ এর উচ্চতা (অর্থাৎ P হতে AB এর লম্ব দূরত্ব), $h = \frac{L^2}{d} = \frac{8^2}{10} = \frac{32}{5}$

$\therefore \triangle PAB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times h = \frac{1}{2} \times \frac{48}{5} \times \frac{32}{5} = \frac{768}{25} = 30.72$ বর্গ একক।

$\therefore$ স্পর্শজ্যা-এর দৈর্ঘ্য 9.6 একক এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 30.72 বর্গ একক।

৬. $x - y + 2 = 0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ বৃত্তটির প্রতিবিম্ব বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো। (Find the equation of the reflection of the circle $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ with respect to the line $x - y + 2 = 0$.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্ত: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

এর কেন্দ্র $C_1(3, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = \sqrt{3^2 + 1^2 - 6} = \sqrt{9 + 1 - 6} = 2$

আয়নায় প্রতিফলনের ফলে বৃত্তের আকার অপরিবর্তিত থাকে, শুধু কেন্দ্রের অবস্থান পরিবর্তিত হয়। তাই প্রতিবিম্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধও 2 একক।

ধরি, প্রতিবিম্ব বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(h, k)$, যা $x - y + 2 = 0$ রেখার সাপেক্ষে $C_1(3, 1)$ এর প্রতিবিম্ব বিন্দু।

বিন্দু প্রতিফলনের সূত্রানুসারে:

$\frac{h-3}{1} = \frac{k-1}{-1} = -2 \cdot \frac{1(3)+(-1)(1)+2}{1^2+(-1)^2}$

$\Rightarrow \frac{h-3}{1} = \frac{k-1}{-1} = -2 \cdot \frac{4}{2} = -4$

$\Rightarrow h - 3 = -4 \Rightarrow h = -1$

$\Rightarrow \frac{k-1}{-1} = -4 \Rightarrow k - 1 = 4 \Rightarrow k = 5$

অর্থাৎ প্রতিবিম্ব বৃত্তের কেন্দ্র $(-1, 5)$

[যাচাই: C_1 ও C_2 এর মধ্যবিন্দু $(1, 3)$ আয়না রেখাটির ওপর অবস্থিত, কারণ $1 - 3 + 2 = 0$]

$\therefore$ প্রতিবিম্ব বৃত্তের সমীকরণ: $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 2^2$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22 = 0$

৭. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সমবাহু ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দু $(0, 4)$। ঐ শীর্ষবিন্দুর বিপরীত বাহুর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। (One vertex of an equilateral triangle inscribed in the circle $x^2 + y^2 = 16$ is $(0, 4)$. Find the equation and the length of the side opposite to that vertex.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু $O(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = 4$।

সমবাহু ত্রিভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত হওয়ায় বৃত্তটিই এর পরিবৃত্ত। সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র **(Centroid)** অভিন্ন বিন্দুতে অবস্থান করে।

ধরি, শীর্ষবিন্দু $A(0, 4)$ এবং এর বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু D; অর্থাৎ AD একটি মধ্যমা।

ভরকেন্দ্র $O(0, 0)$ মধ্যমা AD-কে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1} \Rightarrow OD = \frac{AO}{2} = \frac{4}{2} = 2$

যেহেতু $A(0, 4)$ বিন্দুটি y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে এবং O বিন্দু A ও D এর মাঝে অবস্থিত, তাই D বিন্দুটি y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে থাকবে।

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -2)$

সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা বিপরীত বাহুর ওপর লম্ব হয়। এখানে মধ্যমা AD হলো y-অক্ষ, তাই বিপরীত বাহুটি y-অক্ষের ওপর লম্ব (অর্থাৎ x-অক্ষের সমান্তরাল) এবং $(0, -2)$ বিন্দুগামী।

$\therefore$ নির্ণেয় বাহুর সমীকরণ: $y = -2 \Rightarrow y + 2 = 0$

এই বাহুটি বৃত্তের একটি জ্যা, যার ওপর কেন্দ্র হতে লম্ব দূরত্ব $OD = 2$।

$\therefore$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{R^2 - OD^2} = 2\sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ একক।

$\therefore$ বিপরীত বাহুর সমীকরণ $y + 2 = 0$ এবং দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ একক।

৮. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রগামী এবং $x - 2y + 5 = 0$ রেখার ওপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো। উক্ত রেখাটি বৃত্তটিকে যে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে, তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো। (Find the equation of the straight line that passes through the center of the circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ and is perpendicular to the line $x - 2y + 5 = 0$. Find the distance between the two points where this line intersects the circle.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

বৃত্তটির কেন্দ্র, $C(2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ, $R = \sqrt{2^2 + 3^2 - 9} = \sqrt{4} = 2$

$x - 2y + 5 = 0$ রেখার ওপর লম্ব রেখার সমীকরণ ধরি,

$2x + y + k = 0$

রেখাটি $C(2, 3)$ বিন্দুগামী। সুতরাং,

$2(2) + 3 + k = 0 \Rightarrow k = -7$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব রেখার সমীকরণ: $2x + y - 7 = 0$

রেখাটি যেহেতু বৃত্তের কেন্দ্রগামী, তাই এটি বৃত্তটির একটি ব্যাস ধারণ করে।

ব্যাস বরাবর রেখাটি বৃত্তকে যে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে, তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব হলো বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের সমান।

দূরত্ব (ব্যাসের দৈর্ঘ্য) $= 2R = 2 \times 2 = 4$ একক

সরলরেখার সমীকরণ $2x + y - 7 = 0$ এবং ছেদবিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 4 একক।

৯. $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু $P(7, 1)$ হতে বৃত্তের ওপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো এবং স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো। (From the external point P (7, 1) to the circle $x^2 + y^2 = 25$, find the equations of the two tangents drawn to the circle and the angle between them.) ১০

উত্তর: ধরি, $P(7, 1)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের ঢাল m

স্পর্শকটির সমীকরণ: $y - 1 = m(x - 7)$

$\Rightarrow mx - y + (1 - 7m) = 0$

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = 5$

কেন্দ্র হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে:

$\frac{|m(0) - 0 + (1 - 7m)|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5$

$\Rightarrow (1 - 7m)^2 = 25(m^2 + 1)$

$\Rightarrow 1 - 14m + 49m^2 = 25m^2 + 25$

$\Rightarrow 24m^2 - 14m - 24 = 0$

$\Rightarrow 12m^2 - 7m - 12 = 0$

$\Rightarrow 12m^2 - 16m + 9m - 12 = 0$

$\Rightarrow 4m(3m - 4) + 3(3m - 4) = 0$

$\Rightarrow (4m + 3)(3m - 4) = 0$

$\Rightarrow m = -\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$

m এর মানগুলো বসিয়ে স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ পাই:

$m = -\frac{3}{4}$ হলে, $-\frac{3}{4}x - y + 1 - 7\left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 25 = 0$

$m = \frac{4}{3}$ হলে, $\frac{4}{3}x - y + 1 - 7\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4x - 3y - 25 = 0$

স্পর্শকদ্বয়ের ঢাল $m_1 = -\frac{3}{4}$ এবং $m_2 = \frac{4}{3}$

এখানে $m_1 \times m_2 = -\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = -1$

যেহেতু ঢালদ্বয়ের গুণফল -1, তাই স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

স্পর্শকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90° বা $\frac{\pi}{2}$।

১০. একটি বৃত্ত x-অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ হতে 6 একক দীর্ঘ জ্যা খণ্ডিত করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করো। (A circle touches the x-axis at the point (4, 0) and cuts off a chord of length 6 units from the y -axis. Find the equation of the circle.) ১০

উত্তর: যেহেতু বৃত্তটি x-অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাই বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ হবে 4 এবং কেন্দ্র হতে x -অক্ষের দূরত্বই হবে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র $(4, k)$ এবং ব্যাসার্ধ $r = |k|$

বৃত্তটির সমীকরণ:

$(x-4)^2 + (y-k)^2 = k^2$ **.....(i)**

বৃত্তটি y-অক্ষকে ছেদ করে, তাই $x = 0$ বসিয়ে পাই:

$(0-4)^2 + (y-k)^2 = k^2$

$\Rightarrow 16 + y^2 - 2ky + k^2 = k^2$

$\Rightarrow y^2 - 2ky + 16 = 0$

এই সমীকরণের মূলদ্বয় y_1 ও y_2 হলে, $y_1 + y_2 = 2k$ এবং $y_1y_2 = 16$

y-অক্ষের ছেদিতাংশ (জ্যা-এর দৈর্ঘ্য) $= |y_1 - y_2| = 6$ (দেওয়া আছে)

$\Rightarrow \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = 6$

$\Rightarrow \sqrt{4k^2 - 64} = 6$

$\Rightarrow 4k^2 - 64 = 36$

$\Rightarrow 4k^2 = 100$

$\Rightarrow k = \pm 5$

k এর মান **(i)** নং এ বসালে:

$(x-4)^2 + (y \pm 5)^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 \pm 10y + 25 = 25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0$

$\therefore$ নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0$

১১. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ বৃত্তের সাপেক্ষে $3x - 4y - 12 = 0$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকগুলোর সমীকরণ নির্ণয় করো এবং স্পর্শবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক বের করো। (With respect to the circle $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$, find the equations of the tangents parallel to the line $3x - 4y - 12 = 0$, and find the coordinates of the points of tangency.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $C(4, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = \sqrt{4^2 + 2^2 - 16} = \sqrt{16 + 4 - 16} = 2$

$3x - 4y - 12 = 0$ রেখার সমান্তরাল যেকোনো স্পর্শকের সমীকরণ:

$3x - 4y + k = 0$ **.....(i)**

বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 2)$ হতে স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\therefore \frac{|3(4)-4(2)+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 2$

$\Rightarrow \frac{|4+k|}{5} = 2 \Rightarrow 4 + k = \pm 10$

$\Rightarrow k = 6$ অথবা $k = -14$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ: $3x - 4y + 6 = 0$ এবং $3x - 4y - 14 = 0$

স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায় এবং স্পর্শকের ওপর লম্ব (অর্থাৎ কেন্দ্রগামী অভিলম্ব) রেখার সমীকরণ:

$4x + 3y + c = 0$

রেখাটি $C(4, 2)$ বিন্দুগামী হওয়ায়, $4(4) + 3(2) + c = 0 \Rightarrow c = -22$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ: $4x + 3y - 22 = 0$

স্পর্শবিন্দুগুলো হলো অভিলম্ব এবং স্পর্শকগুলোর ছেদবিন্দু।

প্রথম স্পর্শবিন্দু: $3x - 4y + 6 = 0$ এবং $4x + 3y - 22 = 0$ সমাধান করে পাই:

ছেদবিন্দু $\left(\frac{14}{5}, \frac{18}{5}\right)$

দ্বিতীয় স্পর্শবিন্দু: $3x - 4y - 14 = 0$ এবং $4x + 3y - 22 = 0$ সমাধান করে পাই:

ছেদবিন্দু $\left(\frac{26}{5}, \frac{2}{5}\right)$

১২. দুটি বৃত্তের সমীকরণ যথাক্রমে $C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ এবং $C_2 : x^2 + y^2 + 6x - 8y + 10 = 0$। দেখাও যে, এরা পরস্পরকে ছেদ করে। এদের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। (Two circles have equations ১০

$C_1 : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ and $C_2 : x^2 + y^2 + 6x - 8y + 10 = 0$. Show that they intersect each other. Find the equation and length of their common chord.)

উত্তর: C_1 বৃত্তের কেন্দ্র $O_1(-1,-2)$, ব্যাসার্ধ $R_1 = \sqrt{1^2 + 2^2 - (-20)} = 5$

C_2 বৃত্তের কেন্দ্র $O_2(-3,4)$, ব্যাসার্ধ $R_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2 - 10} = \sqrt{15} \approx 3.87$

কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $d = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} \approx 6.32$

এখানে $R_1 + R_2 \approx 8.87$ এবং $|R_1 - R_2| \approx 1.13$

যেহেতু $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$, তাই বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে।

সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ: $C_1 - C_2 = 0$

$(x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20) - (x^2 + y^2 + 6x - 8y + 10) = 0$

$\Rightarrow -4x + 12y - 30 = 0$

$\Rightarrow 2x - 6y + 15 = 0$

C_1 এর কেন্দ্র $(-1,-2)$ হতে সাধারণ জ্যা এর লম্ব দূরত্ব p:

$p = \frac{|2(-1)-6(-2)+15|}{\sqrt{2^2+(-6)^2}} = \frac{|-2+12+15|}{\sqrt{40}} = \frac{25}{2\sqrt{10}}$

সাধারণ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{R_1^2 - p^2} = 2\sqrt{25 - \left(\frac{25}{2\sqrt{10}}\right)^2} = 2\sqrt{25 - \frac{625}{40}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ একক।

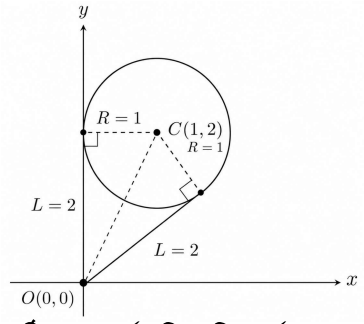
১৩. মূলবিন্দু হতে $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ বৃত্তের ওপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। মূলবিন্দু হতে বৃত্তটিতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (Find the length of the tangent drawn from the origin to the circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$. Find the area of the quadrilateral formed by the tangents drawn from the origin to the circle and the radii to the points of tangency.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্ত: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

এর কেন্দ্র $C(1,2)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = \sqrt{1^2 + 2^2 - 4} = 1$

মূলবিন্দু $O(0,0)$ হতে বৃত্তটিতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য L:

$L = \sqrt{0^2 + 0^2 - 2(0) - 4(0) + 4} = \sqrt{4} = 2$ একক



গঠিত চতুর্ভুজটি দুটি সর্বসম সমকোণী ত্রিভুজ দ্বারা গঠিত, যাদের প্রত্যেকের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় হলো স্পর্শকের দৈর্ঘ্য L এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ R।

একটি সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times L \times R = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ বর্গ একক

$\therefore$ সম্পূর্ণ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= 2 \times 1 = 2$ বর্গ একক

১৪. $(3,4)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের ওপর অঙ্কিত জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো। (Find the equation of the locus of the midpoints of chords of the circle $x^2 + y^2 = 25$ drawn from the point $(3,4)$.) ১০

উত্তর: ধরি, জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $M(x_1, y_1)$

আমরা জানি, $S = 0$ বৃত্তের কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হলে, জ্যা-এর সমীকরণ হয় $T = S_1$

এখানে $S = x^2 + y^2 - 25$

$\therefore T = xx_1 + yy_1 - 25$ এবং $S_1 = x_1^2 + y_1^2 - 25$

সুতরাং, জ্যা-এর সমীকরণ:

$xx_1 + yy_1 - 25 = x_1^2 + y_1^2 - 25$

$\Rightarrow xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$

যেহেতু জ্যাটি নির্দিষ্ট বিন্দু $(3, 4)$ দিয়ে যায়, তাই এই বিন্দুটি জ্যা-এর সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

x-এর পরিবর্তে 3 এবং y-এর পরিবর্তে 4 বসিয়ে পাই:

$3x_1 + 4y_1 = x_1^2 + y_1^2$

সঞ্চারপথের সমীকরণ পাওয়ার জন্য (x_1, y_1) কে (x, y) দ্বারা প্রতিস্থাপন করি:

$x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের নির্ণয় সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

১৫. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $x - 2y + 1 = 0$ রেখার ওপর অবস্থিত। বৃত্তটি $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ বৃত্তের সাথে $(2, 1)$ বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করো। (The center of a circle lies on the line $x - 2y + 1 = 0$. The circle internally touches the circle $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ at the point $(2, 1)$. Find the equation of the circle.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্ত $C_1 : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

এর কেন্দ্র $O_1(2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $R_1 = \sqrt{2^2 + 3^2 - 9} = 2$

স্পর্শবিন্দু $T(2, 1)$ বিন্দুটি C_1 বৃত্তের ওপর অবস্থিত।

আমরা জানি, স্পর্শবিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ অভিলম্ব উভয় বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

$O_1(2, 3)$ এবং $T(2, 1)$ বিন্দুগামী রেখার (অভিলম্বের) সমীকরণ হলো: $x = 2$

নির্ণয় বৃত্তের কেন্দ্র O_2 এই অভিলম্বের ওপর অবস্থিত হবে। সুতরাং, O_2 এর ভুজ $x = 2$

আবার, O_2 বিন্দুটি $x - 2y + 1 = 0$ রেখার ওপর অবস্থিত।

$\therefore 2 - 2y + 1 = 0$

$\Rightarrow y = 1.5$

অর্থাৎ, নির্ণয় বৃত্তের কেন্দ্র $O_2(2, 1.5)$

নির্ণয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ R_2 হবে O_2 হতে স্পর্শবিন্দু $T(2, 1)$ এর দূরত্ব।

$R_2 = \sqrt{(2-2)^2 + (1.5-1)^2} = 0.5$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ: $(x-2)^2 + (y-1.5)^2 = (0.5)^2$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 3y + 2.25 = 0.25$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 3y + 6 = 0$

১৬. $x = 0, y = 0$ এবং $3x + 4y = 12$ রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো। (Find the equation of the incircle of the triangle formed by the lines $x = 0$, $y = 0$, and $3x + 4y = 12$.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার শীর্ষবিন্দুগুলো হলো: $O(0,0), A(4,0)$ এবং $B(0,3)$

ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য:

A কোণের বিপরীত বাহু $a = OB = 3$

B কোণের বিপরীত বাহু $b = OA = 4$

O কোণের বিপরীত বাহু $c = AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (h, k) হলে,

$h = \frac{ax_A + bx_B + cx_O}{a+b+c} = \frac{3(4)+4(0)+5(0)}{3+4+5} = \frac{12}{12} = 1$

$k = \frac{ay_A + by_B + cy_O}{a+b+c} = \frac{3(0)+4(3)+5(0)}{12} = \frac{12}{12} = 1$

যেহেতু অন্তঃবৃত্তটি x ও y-অক্ষকে স্পর্শ করে, তাই অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = |h| = |k| = 1$

$\therefore$ অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

১৭. $C_1 : x^2 + y^2 = 16$ এবং $C_2 : (x-8)^2 + y^2 = 9$ বৃত্তদ্বয়ের তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করো। (Find the equations of the transverse common tangents of the two circles $C_1 : x^2 + y^2 = 16$ and $C_2 : (x-8)^2 + y^2 = 9$.) ১০

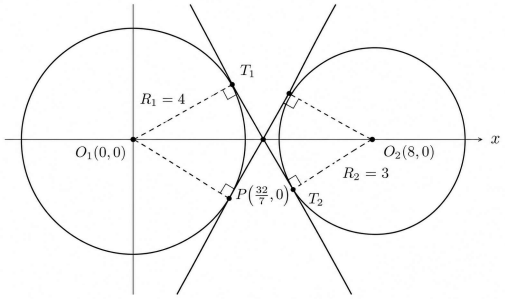
উত্তর: C_1 এর কেন্দ্র $O_1(0,0)$, ব্যাসার্ধ $R_1 = 4$

C_2 এর কেন্দ্র $O_2(8,0)$, ব্যাসার্ধ $R_2 = 3$

কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $O_1O_2 = 8$, যা $R_1 + R_2 = 7$ অপেক্ষা বৃহত্তর। ফলে এদের 4 টি সাধারণ স্পর্শক আছে।

তির্যক সাধারণ স্পর্শকদ্বয় কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে অন্তঃস্থভাবে $R_1 : R_2 = 4 : 3$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

বিভক্তকারী বিন্দু (ছেদবিন্দু) $P = \left(\frac{4(8)+3(0)}{4+3}, \frac{4(0)+3(0)}{7}\right) = \left(\frac{32}{7}, 0\right)$



ধরি, $P\ \left(\frac{32}{7}, 0\right)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের ঢাল m

স্পর্শকের সমীকরণ: $y - 0 = m\left(x - \frac{32}{7}\right)$

$\Rightarrow 7y = m(7x - 32)$

$\Rightarrow 7mx - 7y - 32m = 0$

C_1 এর কেন্দ্র $(0,0)$ হতে এই স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব এর ব্যাসার্ধ 4 এর সমান হবে।

$\frac{|7m(0)-7(0)-32m|}{\sqrt{(7m)^2+(-7)^2}} = 4$

$\Rightarrow \frac{|-32m|}{7\sqrt{m^2+1}} = 4$

$\Rightarrow 8|m| = 7\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 64m^2 = 49(m^2+1)$

$\Rightarrow 15m^2 = 49$

$\Rightarrow m^2 = \frac{49}{15}$

$\Rightarrow m = \pm\frac{7}{\sqrt{15}}$

m এর মান স্পর্শকের সমীকরণে বসিয়ে পাই:

$y = \pm\frac{7}{\sqrt{15}}\left(x - \frac{32}{7}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{15}y = \pm(7x - 32)$

$\therefore$ নির্ণয় সমীকরণ: $7x \pm \sqrt{15}y - 32 = 0$

১৮. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 5 = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে যে অংশে ছেদ করে, উক্ত অংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নতুন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো। (Find the equation of the new circle drawn with the chord cut off by the circle $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 5 = 0$ on the x-axis as its diameter.) ১০

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্তটি x-অক্ষকে ছেদ করে, তাই ছেদবিন্দুগুলোতে $y = 0$ হবে।

বৃত্তের সমীকরণে $y = 0$ বসিয়ে পাই:

$x^2 + 0 - 6x - 0 + 5 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 5) = 0$

$\therefore x = 1$ অথবা $x = 5$

সুতরাং, x-অক্ষের খণ্ডিত অংশের প্রান্তবিন্দু দুটি হলো $A(1, 0)$ এবং $B(5, 0)$।

এই A ও B বিন্দুদ্বয়কে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত নতুন বৃত্তের সমীকরণ:

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 5) + (y - 0)(y - 0) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 + y^2 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

১৯. P একটি চলমান বিন্দু। P বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ওপর অঙ্কিত স্পর্শকের জ্যা সর্বদা মূলবিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করে। P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো। (P is a moving point. The chord of contact of tangents drawn from P to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ always subtends a right angle at the origin. Find the equation of the locus of point P.) ১০

উত্তর: ধরি, চলমান বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (h, k)।

$P(h, k)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শজ্যা এর সমীকরণ:

$hx + ky = a^2 \Rightarrow y = \frac{a^2 - hx}{k}$ **.....(i)**

(i) নং সমীকরণ হতে y এর মান বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 + \left(\frac{a^2 - hx}{k}\right)^2 = a^2$

$\Rightarrow k^2x^2 + (a^2 - hx)^2 = a^2k^2$

$\Rightarrow k^2x^2 + a^4 - 2a^2hx + h^2x^2 = a^2k^2$

$\Rightarrow (h^2 + k^2)x^2 - 2a^2hx + a^2(a^2 - k^2) = 0$ **.....(ii)**

ধরি, ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ যথাক্রমে x_1 এবং x_2। সমীকরণ **(ii)** হতে মূলদ্বয়ের গুণফল,

$x_1x_2 = \frac{a^2(a^2 - k^2)}{h^2 + k^2}$

অনুরূপভাবে, x এর মান প্রতিস্থাপন করে y এর দ্বিঘাত সমীকরণ হতে মূলদ্বয়ের (কোটিদ্বয়ের) গুণফল পাই,

$y_1y_2 = \frac{a^2(a^2 - h^2)}{h^2 + k^2}$

প্রশ্নমতে, ছেদবিন্দুদ্বয় (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং, মূলবিন্দু হতে ছেদবিন্দুগামী রেখাদ্বয়ের ঢালের গুণফল -1 হবে।

$\therefore m_1 \times m_2 = -1$

$\Rightarrow \left(\frac{y_1 - 0}{x_1 - 0}\right) \times \left(\frac{y_2 - 0}{x_2 - 0}\right) = -1$

$\Rightarrow y_1y_2 = -x_1x_2$

$\Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

$\Rightarrow \frac{a^2(a^2 - k^2)}{h^2 + k^2} + \frac{a^2(a^2 - h^2)}{h^2 + k^2} = 0$

$\Rightarrow a^2(a^2 - k^2 + a^2 - h^2) = 0$

যেহেতু $a \neq 0$, তাই $2a^2 - h^2 - k^2 = 0$

$\Rightarrow h^2 + k^2 = 2a^2$

সঞ্চারপথের সমীকরণ পেতে (h, k) কে (x, y) দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই:

$x^2 + y^2 = 2a^2$ (যা মূলত নিয়ামক বৃত্ত বা **Director circle)**

২০. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 = 0$ বৃত্ত এবং $2x + y - 5 = 0$ সরলরেখার ছেদবিন্দুসমূহ দিয়ে অতিক্রম করে এবং মূলবিন্দুগামী এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো। (Find the equation of the circle that passes through the points of ১০

intersection of the circle $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 = 0$ and the line $2x + y - 5 = 0$, and also passes through the origin.)

উত্তর: প্রদত্ত বৃত্ত ও সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যেকোনো বৃত্তের সমীকরণ হলো:

$S + kL = 0$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10) + k(2x + y - 5) = 0$ **.....(i)**

যেহেতু নির্ণেয় বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী $(0, 0)$, তাই এটি **(i)** নং সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।

$x = 0, y = 0$ বসিয়ে পাই:

$(0 + 0 - 0 - 0 + 10) + k(0 + 0 - 5) = 0$

$\Rightarrow 10 - 5k = 0$

$\Rightarrow k = 2$

এখন $k = 2$ মানটি **(i)** নং এ বসিয়ে পাই:

$(x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10) + 2(2x + y - 5) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 + 4x + 2y - 10 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

Physics

২০০ নম্বর

২১. 45m উঁচু একটি টাওয়ারের ছাদ থেকে একটি পাথর A ছেড়ে দেওয়া হলো। একই মুহূর্তে টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 60 m অনুভূমিক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দু থেকে পাথর B-কে টাওয়ারের ছাদের প্রাথমিক অবস্থানের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। পাথর দুটি ভূমি স্পর্শ করার পূর্বে সংঘর্ষ করার জন্য B-এর আদি বেগের শর্ত নির্ণয় করো। ($g=10ms^{-2}$)($g = 10\ ms^{-2}$) (A stone A is dropped from the top of a 45 m high tower. At the same instant, a second stone B is projected from a point 60 m horizontally away from the foot of the tower, directly towards the initial position of A. Determine the condition on the initial speed of B so that the two stones collide before reaching the ground. ($g=10ms^{-2}$)) ১০

উত্তর: $y_A = 45 - 5t^2$। **B** এর নিক্ষেপ কোণ $\tan\theta = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ (অর্থাৎ, $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$)। **B** এর উলম্ব অবস্থান $y_B = u\left(\frac{3}{5}\right)t - 5t^2$ এবং অনুভূমিক অবস্থান $x_B = 60 - u\left(\frac{4}{5}\right)t$। সংঘর্ষের জন্য $x_B = 0$ হতে হবে, তাই $60 = 0.8ut \Rightarrow t = \frac{75}{u}$। মাটিতে পড়ার আগে সংঘর্ষ হতে হলে **A** এর পতনকাল $t < \sqrt{9}$ (যেহেতু $45 = 5t^2$) অর্থাৎ $t < 3\ s$।

$\frac{75}{u} < 3 \Rightarrow u > 25\ ms^{-1}$। ন্যূনতম বেগ $25\ ms^{-1}$।

২২. একটি ট্রাফিক সিগন্যালে দাঁড়িয়ে থাকা পুলিশের গাড়ি অতিক্রম করে একটি গাড়ি $40\ ms^{-1}$ সমবেগে চলে গেল। পুলিশ 2 সেকেন্ড পর প্রতিক্রিয়া দেখায় এবং $5\ ms^{-2}$ সমত্বরণে ধাওয়া শুরু করে। পুলিশের গাড়ির সর্বোচ্চ বেগ $50\ ms^{-1}$। অপরাধী গাড়িটিকে ধরতে পুলিশের মোট কত সময় লাগবে? (A speeding car passes a stationary police car at a constant speed of $40\ ms^{-1}$. The police officer reacts after 2 seconds and begins accelerating at $5\ ms^{-2}$ until reaching a maximum speed of $50\ ms^{-1}$, after which they maintain that speed. From the moment the speeder passed, what is the total time it takes for the police to catch the speeder?) ১০

উত্তর: পুলিশের সর্বোচ্চ বেগে পৌঁছাতে সময় লাগে $t = \frac{v}{a} = \frac{50}{5} = 10\ s$। এই $10\ s$ সময়ে পুলিশের অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{1}{2} \times 5 \times 10^2 = 250\ m$। ঘটনার শুরু থেকে মোট $12\ s$ ($2\ s$ প্রতিক্রিয়া $+10\ s$ ত্বরণ) পার হয়েছে। এই সময়ে অপরাধীর অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 40 \times 12 = 480\ m$। $12\ s$ পর তাদের মাঝে দূরত্ব $= 480 - 250 = 230\ m$। এরপর আপেক্ষিক বেগ $= 50 - 40 = 10\ ms^{-1}$। বাকি দূরত্ব অতিক্রম করতে সময় লাগবে $= \frac{230}{10} = 23\ s$। মোট সময় $= 12 + 23 = 35\ s$।

২৩. একটি কামান মাটি থেকে 40 m দূরে অবস্থিত 15 m উঁচু একটি দেয়ালের ওপর দিয়ে গোলা নিক্ষেপ করতে চায়। কামানের গোলার আদিবেগ $25\ ms^{-1}$ হলে, দেয়াল অতিক্রম করার সময় গোলাটি দেয়ালের সর্বোচ্চ কতটুকু ওপর দিয়ে যেতে পারবে? ($g = 10\ ms^{-2}$) (A cannon fires from the ground toward a 15 m high wall located 40 m away. If the launch speed is $25\ ms^{-1}$, what is the maximum clearance (height above the wall) the projectile can achieve while passing directly over it? ($g = 10\ ms^{-2}$)) ১০

উত্তর: গতিপথের সমীকরণ: $y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta)$। মান বসিয়ে: $y = 40\tan\theta - \left[\frac{10\times1600}{2\times625}\right](1+\tan^2\theta) = 40\tan\theta - 12.8(1+\tan^2\theta)$। y কে সর্বোচ্চ করতে হলে $\tan\theta$ এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ **(derivative)** করে শূন্য ধরতে হবে: $\frac{dy}{d(\tan\theta)} = 40 - 25.6\tan\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = \frac{40}{25.6} = 1.5625$। সর্বোচ্চ উচ্চতা $y = 40(1.5625) - 12.8(1+1.5625^2) = 62.5 - 44.05 = 18.45\,\text{m}$। দেয়ালের ওপর দিয়ে ব্যবধান **(Clearance)** $= 18.45 - 15 = 3.45\,\text{m}$।

২৪. 30° কোণে আনত একটি ঢালু তলের নিচ থেকে একটি প্রক্ষেপককে $20\,\text{ms}^{-1}$ বেগে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে ওপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। ঢাল বরাবর এটি কত দূরে গিয়ে পড়বে? ($g = 10\,\text{ms}^{-2}$) (A projectile is fired up an inclined plane (which is at a 30° angle to the horizontal). The initial velocity is $20\,\text{ms}^{-1}$ at an angle of 60° to the horizontal. Calculate the range of the projectile measured along the incline. ($g = 10\,\text{ms}^{-2}$)) ১০

উত্তর: ঢালের সাথে নিক্ষেপ কোণ $\beta = 60° - 30° = 30°$। ঢালের কোণ $\alpha = 30°$। ঢালের লম্বদিকে বেগ $u_y = 20\sin30° = 10\,\text{ms}^{-1}$ এবং ত্বরণ $a_y = -g\cos30° = -5\sqrt{3}\,\text{ms}^{-2}$। উড্ডয়নকাল $T = \frac{2u_y}{|a_y|} = \frac{20}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{s}$। ঢাল বরাবর বেগ $u_x = 20\cos30° = 10\sqrt{3}\,\text{ms}^{-1}$ এবং ত্বরণ $a_x = -g\sin30° = -5\,\text{ms}^{-2}$। ঢাল বরাবর পাল্লা $R = u_xT + \frac{1}{2}a_xT^2 = 10\sqrt{3}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}(5)\left(\frac{16}{3}\right) = 40 - \frac{40}{3} = \frac{80}{3} \approx 26.67\,\text{m}$।

২৫. 15 m দূরে অবস্থিত একটি মসৃণ খাড়া দেয়ালের দিকে একটি বলকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে $20\,\text{ms}^{-1}$ বেগে নিক্ষেপ করা হলো। দেয়ালের সাথে বলটির সংঘর্ষ সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক (Perfectly Elastic) হলে, এটি মাটিতে পড়ার সময় দেয়াল থেকে কত দূরে থাকবে? ($g = 10\,\text{ms}^{-2}$) (A ball is thrown at $20\,\text{ms}^{-1}$ at an angle of 30° to the horizontal towards a smooth vertical wall located 15 m away. Assuming the collision with the wall is perfectly elastic (horizontal velocity reverses perfectly, vertical motion is unaffected), how far from the wall will the ball land on the ground? ($g = 10\,\text{ms}^{-2}$)) ১০

উত্তর: অনুভূমিক বেগ $u_x = 20\cos30° = 10\sqrt{3}\,\text{ms}^{-1}$। দেয়ালে পৌঁছাতে সময় $t_1 = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{1.5}{\sqrt{3}} = 0.5\sqrt{3} \approx 0.866\,\text{s}$। উলম্ব বেগ $u_y = 20\sin30° = 10\,\text{ms}^{-1}$। মোট উড্ডয়নকাল $T = \frac{2u_y}{g} = \frac{20}{10} = 2\,\text{s}$। দেয়ালে ধাক্কা খাওয়ার পর মাটিতে পৌঁছাতে বাকি সময় $t_2 = 2 - 0.866 = 1.134\,\text{s}$। স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষের কারণে বলটি ঠিক একই অনুভূমিক বেগে $(10\sqrt{3}\,\text{ms}^{-1})$ বিপরীত দিকে ফিরে আসবে। দেয়াল থেকে দূরত্ব $= u_x \times t_2 = 10\sqrt{3} \times 1.134 \approx 19.64\,\text{m}$।

২৬. 2 kg ভরের একটি ব্লক 5 m উঁচু একটি টেবিলের ওপর স্থির অবস্থায় আছে। ব্লকটির ওপর 10 N ধ্রুব বল প্রয়োগ করা হলো, যেখানে ঘর্ষণ বল 4 N। বল প্রয়োগ করে ব্লকটিকে 3 m ঠেলে টেবিলের কিনারা থেকে নিচে ফেলে দেওয়া হলো। ব্লকটি টেবিলের কিনারা থেকে আনুভূমিকভাবে কত দূরে গিয়ে পড়বে? ($g = 10\,\text{ms}^{-2}$) (A 2 kg block is at rest on a 5 m high table. A constant push of 10 N is applied to the block against a friction force of 4 N. It is pushed for a distance of 3 m before it slides off the edge of the table. What horizontal distance from the edge of the table will the block land? ($g = 10\,\text{ms}^{-2}$)) ১০

উত্তর: টেবিলের ওপর কার্যকর নিট বল $F = 10 - 4 = 6\,\text{N}$। ত্বরণ $a = \frac{F}{m} = \frac{6}{2} = 3\,\text{ms}^{-2}$। টেবিলের কিনারায় পৌঁছানোর সময় বেগ $v^2 = u^2 + 2as = 0 + 2(3)(3) = 18 \Rightarrow v = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,\text{ms}^{-1}$। টেবিল থেকে পড়ার সময় এটি একটি অনুভূমিক প্রক্ষেপক **(Horizontal Projectile)** হিসেবে কাজ করবে, যার আদিবেগ $u_x = 3\sqrt{2}\,\text{ms}^{-1}$ এবং $u_y = 0$। 5 m উচ্চতা থেকে পড়তে সময় লাগে $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1\,\text{s}$। আনুভূমিক দূরত্ব $R = u_x \times t = 3\sqrt{2} \times 1 \approx 4.24\,\text{m}$।

২৭. 45 m উঁচু একটি টাওয়ারের ছাদ থেকে একটি বলকে অনুভূমিকভাবে নিক্ষেপ করা হলো। বলটি টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 30 m দূরে গিয়ে মাটিতে পড়ে। বলটির আদিবেগ এবং মাটি স্পর্শ করার ঠিক আগের মুহূর্তের বেগের মান ও দিক নির্ণয় করো। ($g = 10\,\text{ms}^{-2}$) (A ball is thrown horizontally from the top of a 45 m high tower and lands on the ground at a horizontal distance of 30 m from the base of the tower. Find the initial velocity of the ball and the magnitude and direction of the velocity with which it strikes the ground. ($g = 10\,\text{ms}^{-2}$)) ১০

উত্তর: উল্লম্ব পতনকাল নির্ণয়: $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 45 = 0.5 \times 10 \times t^2 \Rightarrow 5t^2 = 45 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3\,s$। আদিবেগ (অনুভূমিক বেগ) $u_x = \frac{x}{t} = \frac{30}{3} = 10\,ms^{-1}$। মাটিতে আঘাত করার সময় উল্লম্ব বেগ $v_y = gt = 10 \times 3 = 30\,ms^{-1}$। চূড়ান্ত বেগের মান $v = \sqrt{u_x^2 + v_y^2} = \sqrt{10^2 + 30^2} = \sqrt{100 + 900} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \approx 31.62\,ms^{-1}$। অনুভূমিকের সাথে বেগের দিক (কোণ) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{u_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{30}{10}\right) = \tan^{-1}(3) \approx 71.56°$।

২৮. 4 kg এবং 6 kg ভরের দুটি বস্তু একটি ঘর্ষণহীন পুলির ওপর দিয়ে হালকা সুতার সাহায্যে ঝুলানো আছে। সিস্টেমটির ত্বরণ এবং সুতার টান নির্ণয় করো। ($g = 10\,ms^{-2}$) (Two masses of 4 kg and 6 kg are connected by a light string passing over a frictionless pulley. Find the acceleration of the system and the tension in the string. ($g = 10\,ms^{-2}$)) ১০

উত্তর: ত্বরণ $a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g = \frac{6-4}{6+4} \times 10 = \frac{2}{10} \times 10 = 2\,ms^{-2}$। সুতার টান $T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g = \frac{2 \times 4 \times 6}{10} \times 10 = 48\,N$।

২৯. 5 kg ভরের একটি ব্লককে 30° কোণে আনত একটি ঘর্ষণহীন তলের ওপর দিয়ে সমান্তরালভাবে 40 N বল প্রয়োগ করে ওপরের দিকে টানা হচ্ছে। ব্লকটির ত্বরণ কত? ($g = 10\,ms^{-2}$) (A 5 kg block is pulled up a 30° inclined plane by a force of 40 N applied parallel to the incline. If the surface is frictionless, what is the acceleration of the block? ($g = 10\,ms^{-2}$)) ১০

উত্তর: তলের সমান্তরাল দিকে কার্যকর নিট বল $F_{net} = F - mg\sin 30° = 40 - (5 \times 10 \times 0.5) = 40 - 25 = 15\,N$। ত্বরণ $a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{15}{5} = 3\,ms^{-2}$।

৩০. 1000 kg ভরের একটি গাড়ি 50 m ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার বাঁক নিতে চায়। রাস্তার ব্যাংকিং কোণ 30° হলে, ঘর্ষণকে বিবেচনা না করে গাড়িটির সর্বোচ্চ কত নিরাপদ বেগে চলা উচিত? ($g = 9.8\,ms^{-2}$) (A car of mass 1000 kg rounds a curved road of radius 50 m banked at an angle of 30°. What is the maximum safe speed for the car without relying on friction? ($g = 9.8\,ms^{-2}$)) ১০

উত্তর: ব্যাংক করা রাস্তার সর্বোচ্চ নিরাপদ বেগের সূত্র: $v = \sqrt{rg\tan\theta}$। $v = \sqrt{50 \times 9.8 \times \tan 30°} = \sqrt{490 \times 0.57735} = \sqrt{282.9} \approx 16.82\,ms^{-1}$।

৩১. 10 g ভরের একটি বুলেট $300\,ms^{-1}$ বেগে অনুভূমিকভাবে এসে স্থির অবস্থায় থাকা 2.99 kg ভরের একটি কাঠের ব্লকে বিদ্ধ হলো এবং ব্লকটির ভেতরে আটকে গেল। সংঘর্ষের পর ব্লকটির বেগ কত হবে? (A bullet of mass 10 g is fired horizontally at $300\,ms^{-1}$ into a stationary wooden block of mass 2.99 kg resting on a smooth surface. If the bullet embeds itself in the block, what is the common velocity of the block and bullet after the collision?) ১০

উত্তর: ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্রানুসারে: $m_1u_1 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow 0.01\,kg \times 300\,ms^{-1} = (0.01 + 2.99)\,kg \times v \Rightarrow 3.00 = v \Rightarrow v = 1\,ms^{-1}$।

৩২. 2000 kg ভরের একটি গাড়ি স্থির অবস্থা থেকে সমত্বরণে চলে 5 সেকেন্ডে $20\,ms^{-1}$ বেগ অর্জন করে। ইঞ্জিন কর্তৃক উৎপাদিত গড় ক্ষমতা (Average Power) কত? (A 2000 kg car accelerates uniformly from rest to reach a velocity of $20\,ms^{-1}$ in 5 seconds. What is the average power developed by the engine?) ১০

উত্তর: অর্জিত গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \times 2000 \times (20)^2 = 1000 \times 400 = 400{,}000\,J\,(400\,kJ)$। গড় ক্ষমতা $P = \frac{E_k}{t} = \frac{400{,}000}{5} = 80{,}000\,W = 80\,kW$।

৩৩. একটি ক্রিকেট বলকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে $28\,ms^{-1}$ বেগে মারা হলো। বলটির উড্ডয়নকাল এবং সর্বোচ্চ উচ্চতা নির্ণয় করো। ($g = 9.8\,ms^{-2}$) (A cricket ball is hit at an angle of 30° to the horizontal with a speed of $28\,ms^{-1}$. Find its time of flight and maximum height. ($g = 9.8\,ms^{-2}$)) ১০

উত্তর: উল্লম্ব বেগ $u_y = 28\sin 30° = 28 \times 0.5 = 14\,ms^{-1}$। উড্ডয়নকাল $T = \frac{2u_y}{g} = \frac{2 \times 14}{9.8} = \frac{28}{9.8} \approx 2.86\,s$। সর্বোচ্চ উচ্চতা $H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{14^2}{2 \times 9.8} = \frac{196}{19.6} = 10\,m$।

৩৪. সরলরেখায় চলমান একটি কণার বেগ $v = 3t^2 - 2t$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত। $t = 1\ s$ থেকে $t = 3\ s$ সময়ের মধ্যে কণাটির অতিক্রান্ত সরণ কত? **(The velocity of a particle moving along a straight line is given by $v = 3t^2 - 2t$. What is the displacement of the particle between $t = 1\ s$ and $t = 3\ s$?)** ১০

উত্তর: সরণ হলো বেগের যোগজীকরণ **(Integration):** $s = \int_1^3 (3t^2 - 2t)\,dt$। $s = [t^3 - t^2]_1^3$। $t = 3$ বসিয়ে পাই: $(3^3 - 3^2) = 27 - 9 = 18$। $t = 1$ বসিয়ে পাই: $(1^3 - 1^2) = 1 - 1 = 0$। মোট সরণ = $18 - 0 = 18\ m$।

৩৫. একটি ভার্নিয়ার ক্যালিপার্সের ৯টি মূল স্কেলের ঘর (MSD) ১০টি ভার্নিয়ার ঘরের (VSD) সমান। $1\ MSD = 1\ mm$ হলে, এর ভার্নিয়ার ধ্রুবক (Vernier Constant) কত? যন্ত্রটিতে মূল স্কেল পাঠ $2.3\ cm$ এবং ৬নং ভার্নিয়ার সমপাতন পাওয়া গেলে এবং যন্ত্রটিতে $+0.02\ cm$ ধনাত্মক ত্রুটি থাকলে, সঠিক পাঠ কত? **(In a vernier calipers, 9 main scale divisions (MSD) are equal to 10 vernier scale divisions (VSD). Given $1\ MSD = 1\ mm$, find the Vernier Constant (VC). If the main scale reading is $2.3\ cm$, the 6th vernier division coincides, and there is a positive zero error of $+0.02\ cm$, find the correct reading.)** ১০

উত্তর: ভার্নিয়ার ধ্রুবক $VC = 1\ MSD - 1\ VSD = 1\ mm - \frac{9}{10}\ mm = 0.1\ mm = 0.01\ cm$। পরিমাপকৃত পাঠ = মূল স্কেল পাঠ + (ভার্নিয়ার সমপাতন × VC) − (শূণ্য ত্রুটি) $= 2.3\ cm + (6 \times 0.01\ cm) - (+0.02\ cm) = 2.3 + 0.06 - 0.02 = 2.34\ cm$।

৩৬. একটি স্ক্রু গজের পিচ $0.5\ mm$ এবং বৃত্তাকার স্কেলের মোট ঘর সংখ্যা 50। একটি তারের ব্যাস মাপার সময় মূল স্কেল পাঠ $2\ mm$ এবং বৃত্তাকার স্কেলের ৩২তম ঘরটি রেফারেন্স লাইনের সাথে মিলে যায়। যন্ত্রটিতে $-0.04\ mm$ ঋণাত্মক ত্রুটি থাকলে, তারটির সঠিক ব্যাস কত? **(A screw gauge has a pitch of $0.5\ mm$ and 50 circular scale divisions. When measuring a wire, the main scale reads $2\ mm$ and the 32nd division of the circular scale coincides with the baseline. If it has a negative zero error of $-0.04\ mm$, find the true diameter of the wire.)** ১০

উত্তর: লঘিষ্ঠ গণন **(Least Count, LC)** $= \frac{\text{পিচ}}{\text{বৃত্তাকার ঘরের সংখ্যা}} = \frac{0.5\ mm}{50} = 0.01\ mm$। অশুদ্ধ পাঠ = মূল স্কেল পাঠ + (বৃত্তাকার পাঠ × LC) $= 2\ mm + (32 \times 0.01\ mm) = 2 + 0.32 = 2.32\ mm$। সঠিক পাঠ = অশুদ্ধ পাঠ − (ঋণাত্মক ত্রুটি) $= 2.32\ mm - (-0.04\ mm) = 2.32 + 0.04 = 2.36\ mm$।

৩৭. $4\ kg$ ও $6\ kg$ ভরের দুটি বস্তু একটি ঘর্ষণহীন পুলির ওপর দিয়ে হালকা অপ্রসারণশীল সুতার সাহায্যে ঝুলছে। সিস্টেমটি স্থির অবস্থা থেকে ছেড়ে দেওয়ার $2\ s$ পর সুতা হঠাৎ ছিঁড়ে যায়। সুতা ছিঁড়ে যাওয়ার মুহূর্তে $6\ kg$ ভরের বস্তুর বেগ এবং পরবর্তী $1\ s$ -এ বস্তুটি মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করবে তা নির্ণয় করো। $(g = 10\ m\ s^{-2})$ ১০
(Two masses of $4\ kg$ and $6\ kg$ are connected by a light inextensible string passing over a frictionless pulley. The system is released from rest. After $2\ s$, the string suddenly breaks. Find the velocity of the $6\ kg$ mass at the instant the string breaks and the distance travelled by it during the next $1\ s$. Take $g = 10\ m\ s^{-2}$.)

উত্তর: সিস্টেমের ত্বরণ, $a = \frac{6-4}{6+4} g = 2\ m\ s^{-2}$
$2\ s$ পরে বেগ, $v = at = 2 \times 2 = 4\ m\ s^{-1}$
সুতা ছিঁড়ে যাওয়ার পর $6\ kg$ বস্তুটি মুক্তভাবে g ত্বরণে নিচের দিকে পড়তে থাকবে
পরবর্তী $1\ s$-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = ut + \frac{1}{2}gt^2$
$s = 4(1) + \frac{1}{2}(10)(1)^2 = 4 + 5$
অতএব, $s = 9\ m$
উত্তর: সুতা ছিঁড়ে যাওয়ার মুহূর্তে বেগ $v = 4\ m\ s^{-1}$, পরবর্তী $1\ s$-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 9\ m$

ব্যাখ্যা:

৩৮. $50\ m$ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার রাস্তা অনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে ব্যাংক করা। টায়ার ও রাস্তার মধ্যে স্থিতি ঘর্ষণ সহগ 0.20। গাড়িটি পিছলে না গিয়ে চলতে পারবে—এমন সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ বেগ নির্ণয় করো। $(g = 10\ m\ s^{-2})$ ১০
(A circular road of radius $50\ m$ is banked at $30°$ to the horizontal. The coefficient of static friction between the tyres and the road is 0.20. Determine the minimum and maximum speeds at which a car can move without slipping. Take $g = 10\ m\ s^{-2}$.)

উত্তর: সর্বোচ্চ বেগের জন্য (পিছলে বাইরের দিকে যাওয়া রোধ করতে ঘর্ষণ নিচের দিকে কাজ করে):

$$v_{max}^2 = rg\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}$$
$$v_{max}^2 = 50(10)\frac{0.5 + 0.2(0.866)}{0.866 - 0.2(0.5)}$$
$$v_{max}^2 = 500 \times \frac{0.6732}{0.766} \approx 439.4$$
$$v_{max} \approx 20.96\,\text{m s}^{-1}$$

সর্বনিম্ন বেগের জন্য (পিছলে ভিতরের দিকে আসা রোধ করতে ঘর্ষণ উপরের দিকে কাজ করে):

$$v_{min}^2 = rg\frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$
$$v_{min}^2 = 500 \times \frac{0.5 - 0.1732}{0.866 + 0.1}$$
$$v_{min}^2 = 500 \times \frac{0.3268}{0.966} \approx 169.2$$
$$v_{min} \approx 13.01\,\text{m s}^{-1}$$

অতএব, গাড়িটি পিছলে না গিয়ে চলতে পারবে যদি $13.0\,\text{m s}^{-1} \lesssim v \lesssim 21.0\,\text{m s}^{-1}$ সীমার মধ্যে বেগ থাকে

ব্যাখ্যা:

৩৯. 2000 kg ভরের একটি গাড়ি সমতল রাস্তায় স্থির অবস্থা থেকে সমত্বরণে 5 s-এ 20 m s^{-1} বেগ অর্জন করে। গাড়িটির গতির বিপরীতে 1000 N ধ্রুব প্রতিরোধী বল কাজ করে। এই 5 s-এ ইঞ্জিনের গড় ক্ষমতা এবং 5 s শেষে তাৎক্ষণিক ক্ষমতা নির্ণয় করো। ১০

(A 2000 kg car accelerates uniformly from rest to 20 m s^{-1} in 5 s on a horizontal road. A constant resistive force of 1000 N acts opposite to the motion. Find the average power developed by the engine during these 5 s and its instantaneous power at t = 5 s.)

উত্তর: ত্বরণ, $a = \frac{20 - 0}{5} = 4\,\text{m s}^{-2}$

ইঞ্জিনের ট্র্যাকশন বল F নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র থেকে: $F - 1000 = ma$

$F = 2000(4) + 1000 = 9000\,\text{N}$

গড় বেগ, $v_{avg} = \frac{0 + 20}{2} = 10\,\text{m s}^{-1}$

গড় ক্ষমতা, $P_{avg} = F\,v_{avg} = 9000 \times 10$

$P_{avg} = 90{,}000\,\text{W} = 90\,\text{kW}$

5 s শেষে তাৎক্ষণিক ক্ষমতা, $P = F\,v = 9000 \times 20$

$P = 180{,}000\,\text{W} = 180\,\text{kW}$

ব্যাখ্যা:

৪০. সরলরেখায় চলমান একটি কণার বেগ $v = 3t^2 - 12t + 9$ m s^{-1} দ্বারা প্রকাশিত। t = 0 থেকে t = 5 s পর্যন্ত কণাটির মোট সরণ এবং মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় করো ১০

(The velocity of a particle moving along a straight line is given by $v = 3t^2 - 12t + 9$ m s^{-1}. Find its displacement and total distance travelled from t = 0 to t = 5 s.)

উত্তর: কণাটি কখন দিক পরিবর্তন করে তা জানতে $v = 0$ বসাই: $3t^2 - 12t + 9 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1\,s,\ 3\,s$

অবস্থান অপেক্ষক, $s = \int (3t^2 - 12t + 9)\,dt = t^3 - 6t^2 + 9t + C$

$s(0) = 0$ ধরলে $C = 0$

$s(1) = 1 - 6 + 9 = 4\,m$

$s(3) = 27 - 54 + 27 = 0\,m$

$s(5) = 125 - 150 + 45 = 20\,m$

মোট সরণ $= s(5) - s(0) = 20 - 0 = 20\,m$

মোট দূরত্ব $= |s(1) - s(0)| + |s(3) - s(1)| + |s(5) - s(3)|$

$= |4 - 0| + |0 - 4| + |20 - 0| = 4 + 4 + 20$

মোট দূরত্ব $= 28\,m$

ব্যাখ্যা:

Chemistry

২০০ নম্বর

৪১. মিথেনের দহন বিক্রিয়া: $CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$, $\Delta H = -890\ kJmol^{-1}$। 8 g মিথেন সম্পূর্ণ দহনে কত তাপ নির্গত হবে? (C = 12, H = 1) (Combustion of methane: $CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(l)$, $\Delta H = -890\ kJmol^{-1}$. How much heat will be released by the complete combustion of 8 g of methane? (C = 12, H = 1))

উত্তর: CH_4-এর আণবিক ভর $= 12 + 4 \times 1 = 16\ gmol^{-1}$।

8 g CH_4-এর মোল সংখ্যা $= \frac{8}{16} = 0.5\ mol$।

1 mol দহনে তাপ নির্গত হয় 890 kJ, তাই 0.5 mol-এ তাপ $= 0.5 \times 890 = 445\ kJ$।

নির্গত তাপ $= 445\ kJ$।

৪২. 25°C তাপমাত্রায় 0.01 M HCl দ্রবণের pH নির্ণয় কর। (HCl সম্পূর্ণরূপে বিয়োজিত ধরে নাও।) (Find the pH of a 0.01 M HCl solution at 25°C. (Assume HCl dissociates completely.))

উত্তর: HCl প্রবল এসিড, তাই সম্পূর্ণ বিয়োজিত হয়: $[H^+] = 0.01\ M = 1 \times 10^{-2}\ M$।

$pH = -\log[H^+] = -\log(1 \times 10^{-2}) = 2$।

$pH = 2$।

৪৩. 0.1 M CH_3COOH দ্রবণের pH পরীক্ষায় 2.87 পাওয়া গেল। এসিডটির K_a নির্ণয় কর। (The measured pH of a 0.1 M CH_3COOH solution was found to be 2.87. Find the K_a of the acid.)

উত্তর: $[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-2.87} = 1.35 \times 10^{-3}\ M$।

সাম্যাবস্থায় $[CH_3COO^-] = [H^+] = 1.35 \times 10^{-3}\ M$ এবং $[CH_3COOH] \approx 0.1 - 1.35 \times 10^{-3} \approx 0.0987\ M$।

$K_a = \frac{[H^+][CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]} = \frac{(1.35 \times 10^{-3})^2}{0.0987} \approx 1.85 \times 10^{-5}$।

$K_a \approx 1.8 \times 10^{-5}$।

৪৪. নিচের বিক্রিয়া দুটি থেকে হেসের সূত্র প্রয়োগ করে $CO(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$ বিক্রিয়ার ΔH নির্ণয় কর।
$C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$ $\Delta H_1 = -393.5\ kJmol^{-1}$
$C(s) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow CO(g)$ $\Delta H_2 = -110.5\ kJmol^{-1}$ (Using Hess's law and the two reactions below, find ΔH for $CO(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$.
$C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$, $\Delta H_1 = -393.5\ kJmol^{-1}$
$C(s) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow CO(g)$, $\Delta H_2 = -110.5\ kJmol^{-1}$)

উত্তর: কাঙ্ক্ষিত বিক্রিয়া = বিক্রিয়া **(1)** − বিক্রিয়া **(2)**, তাই $\Delta H = \Delta H_1 - \Delta H_2$।

$\Delta H = (-393.5) - (-110.5) = -283\ kJmol^{-1}$।

$\Delta H = -283\ kJmol^{-1}$।

৪৫. 0.1 M NH_4OH দ্রবণের pH নির্ণয় কর। NH_4OH-এর $K_b = 1.8 \times 10^{-5}$। (Find the pH of a 0.1 M NH_4OH solution. K_b of $NH_4OH = 1.8 \times 10^{-5}$.)

উত্তর: দুর্বল ক্ষারের জন্য $[OH^-] = \sqrt{K_b \times C} = \sqrt{1.8 \times 10^{-5} \times 0.1} = \sqrt{1.8 \times 10^{-6}} = 1.34 \times 10^{-3}$ M।
$pOH = -\log(1.34 \times 10^{-3}) = 2.87$।
$pH = 14 - 2.87 = 11.13$।
$pH \approx 11.13$।

৪৬. বন্ধন শক্তি ব্যবহার করে $H_2(g) + Cl_2(g) \rightarrow 2HCl(g)$ বিক্রিয়ার ΔH নির্ণয় কর। প্রদত্ত: $H-H = 436\ kJmol^{-1}$, $Cl-Cl = 242\ kJmol^{-1}$, $H-Cl = 431\ kJmol^{-1}$। (Using bond energies, find ΔH for $H_2(g) + Cl_2(g) \rightarrow 2HCl(g)$. Given: $H-H = 436\ kJmol^{-1}$, $Cl-Cl = 242\ kJmol^{-1}$, $H-Cl = 431\ kJmol^{-1}$.)

উত্তর: ΔH = (ভাঙা বন্ধন শক্তি) – (গঠিত বন্ধন শক্তি)।
ভাঙা বন্ধন: $H-H + Cl-Cl = 436 + 242 = 678$ kJ।
গঠিত বন্ধন: $2 \times (H-Cl) = 2 \times 431 = 862$ kJ।
$\Delta H = 678 - 862 = -184\ kJmol^{-1}$।
$\Delta H = -184\ kJmol^{-1}$।

৪৭. CH_3COOH-এর $K_a = 1.8 \times 10^{-5}$। এর অনুবন্ধী ক্ষার CH_3COO^--এর K_b নির্ণয় কর। ($K_w = 1 \times 10^{-14}$) (The K_a of CH_3COOH is 1.8×10^{-5}. Find the K_b of its conjugate base CH_3COO^-. ($K_w = 1 \times 10^{-14}$))

উত্তর: যেকোনো অনুবন্ধী এসিড-ক্ষার যুগলের জন্য $K_a \times K_b = K_w$।
$K_b = \frac{K_w}{K_a} = \frac{1 \times 10^{-14}}{1.8 \times 10^{-5}} = 5.56 \times 10^{-10}$।
$K_b = 5.56 \times 10^{-10}$।

৪৮. 25°C তাপমাত্রায় 0.001 M NaOH দ্রবণের pH নির্ণয় কর। (Find the pH of a 0.001 M NaOH solution at 25°C .)

উত্তর: NaOH প্রবল ক্ষার, সম্পূর্ণ বিয়োজিত হয়: $[OH^-] = 0.001\ M = 1 \times 10^{-3}$ M।
$pOH = -\log(1 \times 10^{-3}) = 3$।
$pH = 14 - 3 = 11$।
$pH = 11$।

৪৯. নিচের বিক্রিয়া দুটি থেকে হেসের সূত্র প্রয়োগ করে $\frac{1}{2}N_2(g) + O_2(g) \rightarrow NO_2(g)$ বিক্রিয়ার ΔH নির্ণয় কর।
$N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$ $\Delta H_1 = +180.5\ kJmol^{-1}$
$2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)$ $\Delta H_2 = -114.2\ kJmol^{-1}$ (Using Hess's law and the two reactions below, find ΔH for $\frac{1}{2}N_2(g) + O_2(g) \rightarrow NO_2(g)$.
$N_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO(g)$, $\Delta H_1 = +180.5\ kJmol^{-1}$
$2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)$, $\Delta H_2 = -114.2\ kJmol^{-1}$)

উত্তর: দুটি বিক্রিয়া যোগ করলে $2NO(g)$ বাতিল হয়ে যায়: $N_2(g) + 2O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)$, $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 180.5 - 114.2 = 66.3$ kJ।
কাঙ্ক্ষিত বিক্রিয়া এর অর্ধেক, তাই $\Delta H = \frac{66.3}{2} = 33.15\ kJmol^{-1}$।
$\Delta H = +33.15\ kJmol^{-1}$।

৫০. একটি বাফার দ্রবণের 1 লিটারে 0.2 mol CH_3COOH ও 0.3 mol CH_3COONa আছে ($pK_a = 4.745$)। এতে 0.05 mol HCl যোগ করলে নতুন pH কত হবে? (A buffer solution contains 0.2 mol CH_3COOH and 0.3 mol CH_3COONa in 1 L ($pK_a = 4.745$). If 0.05 mol HCl is added, find the new pH.)

উত্তর: যোগকৃত HCl, CH_3COO^--এর সাথে বিক্রিয়া করে: $CH_3COO^- + H^+ \rightarrow CH_3COOH$।
নতুন mol $CH_3COOH = 0.2 + 0.05 = 0.25$; নতুন mol $CH_3COO^- = 0.3 - 0.05 = 0.25$।
$pH = pK_a + \log\left(\frac{0.25}{0.25}\right) = 4.745 + 0 = 4.745$।
নতুন $pH \approx 4.75$।

৫১. থার্মোরাসায়নিক সমীকরণ: $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$, $\Delta H = -571.6\ kJ$। STP-তে 5.6 L H_2 গ্যাস সম্পূর্ণ বিক্রিয়া করলে কত তাপ নির্গত হবে? (Thermochemical equation: $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$, $\Delta H = -571.6\ kJ$. How much heat will be released if 5.6 L of H_2 gas reacts completely at STP?)

উত্তর: STP-তে H_2-এর মোল $= \frac{5.6}{22.4} = 0.25\ mol$।
$2\ mol\ H_2$-তে তাপ নির্গত হয় $571.6\ kJ$, তাই $1\ mol$-এ $285.8\ kJ$।
$0.25\ mol$-এ তাপ $= 0.25 \times 285.8 = 71.45\ kJ$।
নির্গত তাপ $= 71.45\ kJ$।

৫২. 0.05 M HCN দ্রবণের pH নির্ণয় কর। HCN-এর $K_a = 6.2 \times 10^{-10}$। (Find the pH of a 0.05 M HCN solution. K_a of HCN $= 6.2 \times 10^{-10}$.)

উত্তর: দুর্বল এসিডের জন্য $[H^+] = \sqrt{K_a \times C} = \sqrt{6.2 \times 10^{-10} \times 0.05} = \sqrt{3.1 \times 10^{-11}} = 5.57 \times 10^{-6}\ M$।
$pH = -\log(5.57 \times 10^{-6}) = 5.25$।
$pH \approx 5.25$।

৫৩. নিচের তথ্য থেকে $C_2H_2(g)$-এর গঠন তাপ নির্ণয় কর।
(i) $C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$ $\Delta H_1 = -393.5\ kJmol^{-1}$
(ii) $H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow H_2O(l)$ $\Delta H_2 = -285.8\ kJmol^{-1}$
(iii) $C_2H_2(g) + \frac{5}{2}O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) + H_2O(l)$ $\Delta H_3 = -1299.6\ kJmol^{-1}$ (Using the data below, find the heat of formation of $C_2H_2(g)$.
(i) $C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$, $\Delta H_1 = -393.5\ kJmol^{-1}$
(ii) $H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) \rightarrow H_2O(l)$, $\Delta H_2 = -285.8\ kJmol^{-1}$
(iii) $C_2H_2(g) + \frac{5}{2}O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) + H_2O(l)$, $\Delta H_3 = -1299.6\ kJmol^{-1}$)

উত্তর: কাঙ্ক্ষিত বিক্রিয়া: $2C(s) + H_2(g) \rightarrow C_2H_2(g)$, $\Delta H_f = 2 \times \Delta H_1 + \Delta H_2 - \Delta H_3$।
$\Delta H_f = 2(-393.5) + (-285.8) - (-1299.6) = -787 - 285.8 + 1299.6 = +226.8\ kJmol^{-1}$।
$\Delta H_f(C_2H_2) = +226.8\ kJmol^{-1}$।

৫৪. একটি বাফার দ্রবণে 0.2 M CH_3COOH ও 0.3 M CH_3COONa আছে। CH_3COOH-এর $K_a = 1.8 \times 10^{-5}$। দ্রবণের pH নির্ণয় কর। (A buffer solution contains 0.2 M CH_3COOH and 0.3 M CH_3COONa. The K_a of CH_3COOH is 1.8×10^{-5}. Find the pH of the solution.)

উত্তর: $pK_a = -\log(1.8 \times 10^{-5}) = 4.745$।
Henderson–Hasselbalch সমীকরণ: $pH = pK_a + \log\left(\frac{[\text{লবণ}]}{[\text{এসিড}]}\right) = 4.745 + \log\left(\frac{0.3}{0.2}\right) = 4.745 + 0.176$।
$pH \approx 4.92$।

৫৫. কোনো উচ্চ তাপমাত্রায় বিশুদ্ধ পানির $K_w = 1 \times 10^{-13}$। ঐ তাপমাত্রায় পানির pH কত? পানি কি তখনো নিরপেক্ষ থাকবে? (At a certain high temperature, the K_w of pure water is 1×10^{-13}. What is the pH of water at that temperature? Will the water still be neutral?)

উত্তর: বিশুদ্ধ পানিতে $[H^+] = [OH^-] = \sqrt{K_w} = \sqrt{1 \times 10^{-13}} = 3.16 \times 10^{-7}\ M$।
$pH = -\log(3.16 \times 10^{-7}) = 6.5$।
যদিও $pH = 6.5$, পানি তখনো নিরপেক্ষ থাকবে কারণ নিরপেক্ষতার শর্ত $[H^+] = [OH^-]$, $pH = 7$ নয়।
$pH = 6.5$, পানি নিরপেক্ষ।

৫৬. মিথেনের দহন বিক্রিয়া: $CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$, $\Delta H = -802\ kJmol^{-1}$। বন্ধন শক্তি O = O = 498, C = O = 799, O − H = 463 $kJmol^{-1}$ হলে C − H বন্ধনের শক্তি নির্ণয় কর। (Combustion of methane: $CH_4(g) + 2O_2(g) \rightarrow CO_2(g) + 2H_2O(g)$, $\Delta H = -802\ kJmol^{-1}$. Given bond energies O = O = 498, C = O = 799, O − H = 463 $kJmol^{-1}$, find the bond energy of C − H.)

উত্তর: $\Delta H = [4 \times (C - H) + 2 \times (O = O)] - [2 \times (C = O) + 4 \times (O - H)]$, ধরি $C - H = x$।
$-802 = [4x + 996] - [1598 + 1852] = 4x - 2454$।
$4x = 2454 - 802 = 1652$, $x = 413$।
$C - H$ বন্ধন শক্তি $= 413\ kJmol^{-1}$।

৫৭. 25 mL 0.1 M CH_3COOH দ্রবণকে 0.1 M NaOH দিয়ে টাইট্রেট করা হলো। সমতুল্য বিন্দুতে pH নির্ণয় কর। ($K_a = 1.8 \times 10^{-5}$) (25 mL of 0.1 M CH_3COOH solution is titrated with 0.1 M NaOH. Find the pH at the equivalence point. ($K_a = 1.8 \times 10^{-5}$))

উত্তর: সমতুল্য বিন্দুতে আয়তন $= 25 + 25 = 50\ mL$; CH_3COONa-এর মোল $= 0.0025$, নতুন ঘনমাত্রা $C = \frac{0.0025}{0.050} = 0.05\ M$।
$K_b = \frac{K_w}{K_a} = 5.56 \times 10^{-10}$; $[OH^-] = \sqrt{K_b \times C} = \sqrt{5.56 \times 10^{-10} \times 0.05} = 5.27 \times 10^{-6}\ M$।
$pOH = -\log(5.27 \times 10^{-6}) = 5.28$; $pH = 14 - 5.28 = 8.72$।
$pH \approx 8.72$।

৫৮. ব্রনস্টেড-লাউরি তত্ত্ব অনুসারে এসিড ও ক্ষারের সংজ্ঞা দাও এবং অনুবন্ধী এসিড-ক্ষার যুগল উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। (Define acids and bases according to the Bronsted-Lowry theory, and explain the concept of a conjugate acid-base pair with an example.)

উত্তর: এসিড হলো প্রোটন দাতা এবং ক্ষার হলো প্রোটন গ্রহীতা পদার্থ।
কোনো এসিড প্রোটন ত্যাগ করার পর যা অবশিষ্ট থাকে তাকে ঐ এসিডের অনুবন্ধী ক্ষার বলে; আবার কোনো ক্ষার প্রোটন গ্রহণ করার পর যা উৎপন্ন হয় তাকে ঐ ক্ষারের অনুবন্ধী এসিড বলে।
উদাহরণ: $CH_3COOH + H_2O \rightleftharpoons CH_3COO^- + H_3O^+$ — এখানে CH_3COOH ও CH_3COO^- একটি অনুবন্ধী যুগল; H_2O ও H_3O^+ আরেকটি অনুবন্ধী যুগল।

৫৯. নিচের বিক্রিয়াদ্বয় বিবেচনা করো—
$HCO_3^- + H_2O \rightleftharpoons H_2CO_3 + OH^-$
$HCO_3^- + H_2O \rightleftharpoons CO_3^{2-} + H_3O^+$
Brønsted–Lowry তত্ত্ব অনুযায়ী প্রতিটি বিক্রিয়ায় acid, base এবং conjugate acid–base pair শনাক্ত করো। একই সাথে ব্যাখ্যা করো কেন HCO_3^- একটি amphiprotic species।
(Consider the following reactions. Identify the acid, base and conjugate acid–base pairs in each reaction according to the Brønsted–Lowry theory. Hence explain why HCO_3^- is an amphiprotic species.)

উত্তর: প্রথম বিক্রিয়ায়, $HCO_3^- + H_2O \rightleftharpoons H_2CO_3 + OH^-$
HCO_3^- একটি H^+ গ্রহণ করে, তাই এটি **base**
H_2O একটি H^+ ত্যাগ করে, তাই এটি **acid**
Conjugate pairs: HCO_3^-/H_2CO_3 এবং H_2O/OH^-

দ্বিতীয় বিক্রিয়ায়, $HCO_3^- + H_2O \rightleftharpoons CO_3^{2-} + H_3O^+$
এখানে HCO_3^- H^+ ত্যাগ করে, তাই এটি **acid**
H_2O এখানে H^+ গ্রহণ করে, তাই এটি **base**
Conjugate pairs: HCO_3^-/CO_3^{2-} এবং H_2O/H_3O^+

অতএব, HCO_3^- প্রথম বিক্রিয়ায় **base** হিসেবে **proton** গ্রহণ করে এবং দ্বিতীয় বিক্রিয়ায় **acid** হিসেবে **proton** ত্যাগ করে
যেহেতু এটি উভয় ভূমিকা পালন করতে পারে, তাই HCO_3^- একটি **amphiprotic species**

ব্যাখ্যা:

৬০. একটি ল্যাবরেটরিতে তিনটি রাসায়নিক পদার্থ রাখা আছে—$KClO_3$, ঘন H_2SO_4 এবং CH_3OH। প্রতিটির জন্য উপযুক্ত hazard category উল্লেখ করো। এছাড়া $KClO_3$ ও CH_3OH পাশাপাশি সংরক্ষণ করা কেন ঝুঁকিপূর্ণ এবং ঘন H_2SO_4 ব্যবহারের সময় কী কী মৌলিক নিরাপত্তা ব্যবস্থা গ্রহণ করা উচিত—ব্যাখ্যা করো।

(A laboratory contains $KClO_3$, concentrated H_2SO_4, and CH_3OH. State the appropriate hazard category for each. Explain why storing $KClO_3$ and CH_3OH together is hazardous, and state the basic safety precautions required while handling concentrated H_2SO_4.)

উত্তর: $KClO_3$**: Oxidising —** এটি নিজে জ্বালানি না হলেও অন্য পদার্থের দহন তীব্র করতে পারে
H_2SO_4 **(conc.): Corrosive —** এটি ত্বক ও চোখে গুরুতর রাসায়নিক দাহ সৃষ্টি করতে পারে
CH_3OH**: Flammable and Toxic — Methanol** সহজে জ্বলে এবং বিষাক্ত

$KClO_3$ একটি শক্তিশালী **oxidising substance** এবং CH_3OH দাহ্য পদার্থ
তাই এদের পাশাপাশি রাখলে আগুন বা তীব্র **oxidation**-এর ঝুঁকি বৃদ্ধি পায়; এদের আলাদাভাবে সংরক্ষণ করা উচিত

ঘন H_2SO_4 ব্যবহারের সময় **protective goggles, gloves** ও **laboratory coat** ব্যবহার করতে হবে
Dilution-এর সময় **acid** ধীরে ধীরে পানিতে যোগ করতে হবে, পানি **acid**-এর মধ্যে নয় — কারণ বিপরীতক্রমে করলে তীব্র তাপ উৎপন্ন হয়ে ছিটকে পড়তে পারে
নিয়ম**: Always add acid to water**