১. প্রদত্ত ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের ভুজ, $x = \frac{ab+bc+ca}{3}$

এবং ভরকেন্দ্রের কোটি, $y = \frac{\frac{2}{ab}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2c+2a+2b}{abc}\right) = \frac{2(a+b+c)}{3abc}$

প্রদত্ত ত্রিঘাত সমীকরণ: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

বহুপদীর মূলের সূত্রানুসারে: মূলগুলোর যোগফল, $a + b + c = -\frac{-4}{1} = 4$

দুটি করে মূলের গুণফলের যোগফল, $ab + bc + ca = \frac{5}{1} = 5$

মূলগুলোর গুণফল, $abc = -\frac{-2}{1} = 2$ $\therefore$ ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$

২. প্রথম রেখার সমীকরণ: $x\sec\theta + y\,\mathrm{cosec}\,\theta - p = 0$
$\Rightarrow \frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} - p = 0$
$\Rightarrow x\sin\theta + y\cos\theta - p\sin\theta\cos\theta = 0$
মূলবিন্দু $(0,0)$ হতে এই রেখার লম্ব দূরত্ব $(d_1 = 4)$: $\frac{|0+0-p\sin\theta\cos\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}} = 4$
$\Rightarrow \left|-p\frac{\sin 2\theta}{2}\right| = 4 \Rightarrow p\sin 2\theta = 8$ ..... **(i)** (p ধনাত্মক ধরে)
দ্বিতীয় রেখার সমীকরণ: $x\cos\theta - y\sin\theta - p\cos 2\theta = 0$
মূলবিন্দু $(0,0)$ হতে এই রেখার লম্ব দূরত্ব $(d_2 = 3)$: $\frac{|0-0-p\cos 2\theta|}{\sqrt{\cos^2\theta+(-\sin\theta)^2}} = 3$
$\Rightarrow |-p\cos 2\theta| = 3 \Rightarrow p\cos 2\theta = 3$ ..... **(ii)**
(i) ও **(ii)** নং সমীকরণ বর্গ করে যোগ করি: $(p\sin 2\theta)^2 + (p\cos 2\theta)^2 = 8^2 + 3^2$
$\Rightarrow p^2 = 73 \Rightarrow p = \sqrt{73}$ (p এর ধনাত্মক মান)
$\therefore p$ এর নির্ণেয় মান $\sqrt{73}$

৩. ধরি, মূলবিন্দু হতে রেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে।
লম্ব দূরত্ব $p = 5$; রেখাটির সমীকরণ: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 5$
রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে:
$y = 0$ বসালে, $x = \frac{5}{\cos\alpha}$ $\therefore A\left(\frac{5}{\cos\alpha}, 0\right)$
$x = 0$ বসালে, $y = \frac{5}{\sin\alpha}$ $\therefore B\left(0, \frac{5}{\sin\alpha}\right)$
মূলবিন্দু হতে অঙ্কিত লম্বটি রেখাটিকে $P(5\cos\alpha, 5\sin\alpha)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রশ্নমতে, লম্বটি অক্ষদ্বয় দ্বারা খণ্ডিত অংশ AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
অর্থাৎ, A ও B এর মধ্যবিন্দুই হলো P।
মধ্যবিন্দুর সূত্রানুসারে: $\frac{\frac{5}{\cos\alpha}+0}{2} = 5\cos\alpha \Rightarrow \frac{5}{2\cos\alpha} = 5\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
এবং $\frac{0+\frac{5}{\sin\alpha}}{2} = 5\sin\alpha \Rightarrow \frac{5}{2\sin\alpha} = 5\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
এই মানগুলো সমীকরণে বসালে আমরা চারটি সম্ভাব্য সমীকরণ পাই: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}y = 5$
$\Rightarrow \pm x \pm y = 5\sqrt{2}$

৪. ধরি, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (x, y)

ভরকেন্দ্রের সূত্রানুসারে আমরা পাই: $x = \frac{p\cos t + q\sin t + 2}{3}$

$\Rightarrow 3x - 2 = p\cos t + q\sin t$ ..... **(i)**

এবং $y = \frac{p\sin t - q\cos t - 1}{3}$

$\Rightarrow 3y + 1 = p\sin t - q\cos t$ ..... **(ii)**

(i) ও **(ii)** নং সমীকরণ বর্গ করে যোগ করি: $(3x-2)^2 + (3y+1)^2 = (p\cos t + q\sin t)^2 + (p\sin t - q\cos t)^2$

$\Rightarrow (3x-2)^2 + (3y+1)^2 = p^2\cos^2 t + 2pq\sin t\cos t + q^2\sin^2 t + p^2\sin^2 t - 2pq\sin t\cos t + q^2\cos^2 t$

$\Rightarrow (3x-2)^2 + (3y+1)^2 = p^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + q^2(\sin^2 t + \cos^2 t)$

$\Rightarrow (3x-2)^2 + (3y+1)^2 = p^2(1) + q^2(1)$

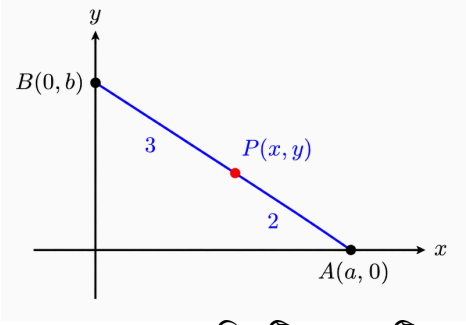
$\Rightarrow (3x-2)^2 + (3y+1)^2 = p^2 + q^2$

$\therefore$ ভরকেন্দ্রের নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $(3x-2)^2 + (3y+1)^2 = p^2 + q^2$

৫. ধরি, দণ্ডটি x-অক্ষকে $A(a, 0)$ এবং y-অক্ষকে $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

দণ্ডটির দৈর্ঘ্য $AB = 10$ cm

পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে, $a^2 + b^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 100$ ..... **(i)**



প্রশ্নমতে, $P(x, y)$ বিন্দুটি AB দণ্ডটিকে A (যা x-অক্ষের উপর) থেকে $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

অর্থাৎ, $AP : PB = m_1 : m_2 = 2 : 3$

অন্তর্বিভক্তকরণ সূত্রানুসারে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক: $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} = \frac{2(0) + 3(a)}{2+3} = \frac{3a}{5} \Rightarrow a = \frac{5x}{3}$

$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} = \frac{2(b) + 3(0)}{2+3} = \frac{2b}{5} \Rightarrow b = \frac{5y}{2}$

এখন a ও b এর মান **(i)** নং সমীকরণে বসিয়ে পাই: $\left(\frac{5x}{3}\right)^2 + \left(\frac{5y}{2}\right)^2 = 100$

$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$

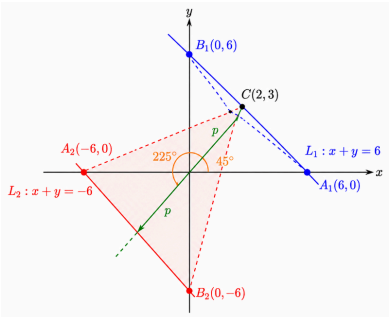
$\Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

$\therefore$ P বিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথ একটি উপবৃত্ত যার সমীকরণ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

৬. যেহেতু $PA = PB$, সুতরাং P বিন্দুটি AB এর লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।
AB এর মধ্যবিন্দু $M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (3,4)$
AB এর ঢাল, $m_{AB} = \frac{6-2}{5-1} = \frac{4}{4} = 1$
$\therefore AB$ এর লম্বদ্বিখণ্ডক PM এর ঢাল, $m_{PM} = -1$
$M(3,4)$ বিন্দুগামী এবং -1 ঢালবিশিষ্ট PM রেখার সমীকরণ: $y - 4 = -1(x-3) \Rightarrow x + y = 7$
যেহেতু $P(x,y)$ এই রেখার উপর অবস্থিত, সুতরাং $y = 7 - x$
অতএব, ধরি P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, 7-x)$
AB এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
ΔPAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times PM = 8$
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times PM = 8$
$\Rightarrow PM = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$
$P(x, 7-x)$ এবং $M(3,4)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $PM = 2\sqrt{2}$
$\sqrt{(x-3)^2 + (7-x-4)^2} = 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (3-x)^2} = 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow \sqrt{2(x-3)^2} = 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow \sqrt{2}|x-3| = 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow |x-3| = 2$
$\Rightarrow x - 3 = \pm 2$
$x = 3 + 2 = 5$ অথবা $x = 3 - 2 = 1$
$x = 5$ হলে, $y = 7 - 5 = 2 \Rightarrow P(5,2)$
$x = 1$ হলে, $y = 7 - 1 = 6 \Rightarrow P(1,6)$
$\therefore P$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1,6)$ অথবা $(5,2)$

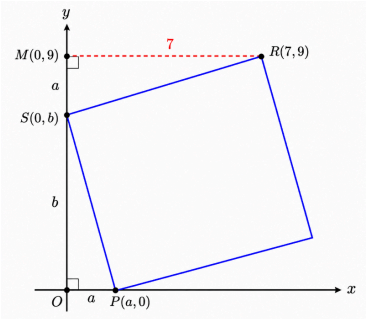
৭. ধরি, $A(2,-1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল m
রেখাটির সমীকরণ: $y - (-1) = m(x-2)$
$\Rightarrow y + 1 = mx - 2m$
$\Rightarrow mx - y - 2m - 1 = 0$ **..... (i)**
প্রশ্নমতে, $B(5,3)$ বিন্দু হতে **(i)** নং রেখার লম্ব দূরত্ব $= 4$ একক।
$\therefore \frac{|m(5)-(3)-2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 4$
$\Rightarrow \frac{|3m-4|}{\sqrt{m^2+1}} = 4$
$\Rightarrow (3m-4)^2 = 16(m^2+1)$
$\Rightarrow 9m^2 - 24m + 16 = 16m^2 + 16$
$\Rightarrow 7m^2 + 24m = 0$
$\Rightarrow m(7m+24) = 0$
$\therefore m = 0$ অথবা $m = -\frac{24}{7}$
m এর মান **(i)** নং সমীকরণে বসিয়ে পাই:
যখন $m = 0$: $0 \cdot x - y - 2(0) - 1 = 0 \Rightarrow y + 1 = 0$
যখন $m = -\frac{24}{7}$: $-\frac{24}{7}x - y - 2\left(-\frac{24}{7}\right) - 1 = 0$
$\Rightarrow -24x - 7y + 48 - 7 = 0$
$\Rightarrow 24x + 7y - 41 = 0$
$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখাসমূহের সমীকরণ: $y + 1 = 0$ এবং $24x + 7y - 41 = 0$

৮. দেওয়া আছে, লম্ব দূরত্ব $p = 3\sqrt{2}$ একক।
যেহেতু মূলবিন্দু হতে লম্বটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 45° কোণ তৈরি করে, তাই এই লম্ব রেখাটি মূলবিন্দুর দুই পাশে (১ম ও ৩য় চতুর্ভাগ বরাবর) বিস্তৃত হতে পারে।
অর্থাৎ, লম্বের দিক নির্দেশক কোণ $\alpha = 45^\circ$ অথবা $\alpha = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$ হতে পারে।



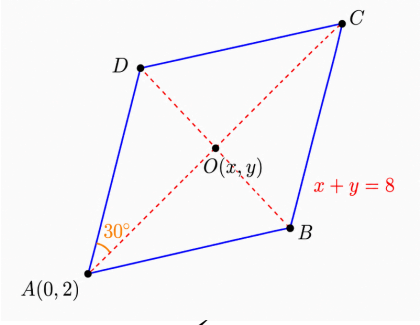
১ম ক্ষেত্র (যখন $\alpha = 45^\circ$): সরলরেখার সমীকরণ: $x\cos 45^\circ + y\sin 45^\circ = 3\sqrt{2}$
$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow x + y = 6$
ছেদক আকৃতিতে: $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} = 1$
সুতরাং রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে $A_1(6,0)$ এবং $B_1(0,6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
এখন $A_1(6,0)$, $B_1(0,6)$ এবং $C(2,3)$ দ্বারা গঠিত ΔA_1B_1C এর ক্ষেত্রফল: $\Delta_1 = \frac{1}{2}|6(6-3) + 0(3-0) + 2(0-6)|$
$= \frac{1}{2}|6(3) + 0 - 12| = \frac{1}{2}|18 - 12| = \frac{1}{2}(6) = 3$ বর্গ একক।
২য় ক্ষেত্র (যখন $\alpha = 225^\circ$): সরলরেখার সমীকরণ: $x\cos 225^\circ + y\sin 225^\circ = 3\sqrt{2}$
$\Rightarrow x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2} \Rightarrow -x - y = 6 \Rightarrow x + y = -6$
ছেদক আকৃতিতে: $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$
সুতরাং রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে $A_2(-6,0)$ এবং $B_2(0,-6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
এখন $A_2(-6,0)$, $B_2(0,-6)$ এবং $C(2,3)$ দ্বারা গঠিত ΔA_2B_2C এর ক্ষেত্রফল: $\Delta_2 = \frac{1}{2}|-6(-6-3) + 0(3-0) + 2(0-(-6))|$
$= \frac{1}{2}|-6(-9) + 0 + 2(6)| = \frac{1}{2}|54 + 12| = \frac{1}{2}(66) = 33$ বর্গ একক।
$\therefore \Delta ABC$ এর নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 3 বর্গ একক অথবা 33 বর্গ একক।

৯. ধরি, $P(a,0)$ এবং $S(0,b)$।
যেহেতু P ও S ধনাত্মক অক্ষে অবস্থিত, তাই $\mathbf{a > 0}$ এবং $\mathbf{b > 0}$।
$R(7,9)$ হতে y-অক্ষের উপর RM লম্ব অঙ্কন করি।
তাহলে M বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $(0,9)$
সুতরাং, $RM = 7$ এবং $OM = 9$



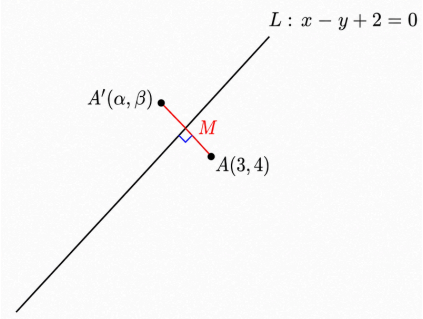
এখন, সমকোণী ত্রিভুজ ΔPOS এবং ΔSMR সর্বসম ($\Delta POS \cong \Delta SMR$)।
সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমান হওয়ায়: $OS = RM \Rightarrow b = 7$
এবং $SM = PO = a$
চিত্র হতে আমরা দেখতে পাই, $OM = OS + SM$
$\Rightarrow 9 = b + a$
$\Rightarrow 9 = 7 + a \Rightarrow a = 2$
$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2,0)$ এবং S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,7)$।

১০.



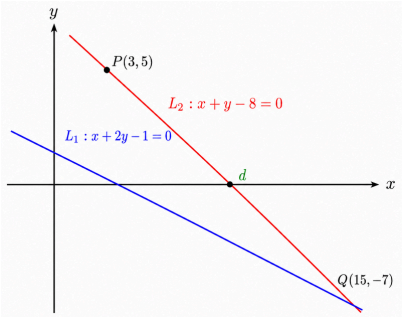
দেওয়া আছে, কর্ণ $\mathrm{BD}: \mathrm{x}+\mathrm{y}=8 \Rightarrow \mathrm{m}_{\mathrm{BD}}=-1$
রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব। $\therefore \mathrm{AC} \perp \mathrm{BD} \Rightarrow \mathrm{m}_{\mathrm{AC}}=1$
$\mathrm{A}(0,2)$ বিন্দুগামী AC কর্ণের সমীকরণ: $\mathrm{x}-\mathrm{y}=-2$
ছেদবিন্দু বা কেন্দ্র $\mathrm{O}(3,5)$
অর্ধ-কর্ণ, $\mathrm{AO}=\sqrt{(3-0)^2+(5-2)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$
রম্বসের কর্ণ শীর্ষকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। $\therefore \angle \mathrm{OAB}=\frac{60^{\circ}}{2}=30^{\circ}$
সমকোণী $\Delta \mathrm{AOB}$ হতে, $\tan 30^{\circ}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AO}} \Rightarrow \mathrm{OB}=3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$
রম্বসের ক্ষেত্রফল $=4 \times(\Delta \mathrm{AOB}$ এর ক্ষেত্রফল $)=4 \times\left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{AO} \cdot \mathrm{OB}\right)$
$=2(3\sqrt{2})(\sqrt{6})=6\sqrt{12}=12\sqrt{3}$
$\therefore$ কেন্দ্র $\mathrm{O}(3,5)$ এবং ক্ষেত্রফল $12\sqrt{3}$ বর্গ একক।
ব্যাখ্যা:

১১. ধরি, $\mathrm{A}(3,4)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব $\mathrm{A}'(\alpha, \beta)$ এবং প্রতিফলক $\mathrm{L}: \mathrm{x}-\mathrm{y}+2=0 \Rightarrow \mathrm{m}_{\mathrm{L}}=1$



প্রতিবিম্বের শর্তানুসারে, $\mathrm{AA}' \perp \mathrm{L} \Rightarrow \mathrm{m}_{\mathrm{AA}'}=-1$AA′ এর সমীকরণ: $\mathrm{y}-4=-1(\mathrm{x}-3) \Rightarrow \mathrm{x}+\mathrm{y}-7=0$
ছেদবিন্দু বা মধ্যবিন্দু $\mathrm{M}\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$
M বিন্দুটি AA′ এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore \frac{\alpha+3}{2}=\frac{5}{2} \Rightarrow \alpha=2$
$\therefore \frac{\beta+4}{2}=\frac{9}{2} \Rightarrow \beta=5$
$\therefore$ প্রতিবিম্ব বিন্দুটি $\mathrm{A}'(2,5)$
নতুন রেখার ঢাল, $\mathrm{m}=\tan 135^{\circ}=-1$
নির্ণেয় সমীকরণ: $\mathrm{y}-5=-1(\mathrm{x}-2) \Rightarrow \mathrm{x}+\mathrm{y}-7=0$
$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ: $\mathrm{x}+\mathrm{y}-7=0$

১২. ধরি, প্রদত্ত বিন্দু $P(3,5)$ এবং প্রদত্ত রেখা $L_1 : x + 2y - 1 = 0$
প্রশ্নমতে, যে রেখা বরাবর দূরত্ব পরিমাপ করতে হবে তার ঢাল, $m = -1$
$P(3,5)$ বিন্দুগামী এবং $m = -1$ ঢালবিশিষ্ট রেখার (L_2) সমীকরণ: $y - 5 = -1(x - 3)$
$\Rightarrow y - 5 = -x + 3$
$\Rightarrow x + y - 8 = 0$



এখন, L_1 ও L_2 রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $Q(15,-7)$
নির্ণেয় দূরত্ব হবে P ও Q বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (d): $d = \sqrt{(15-3)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$
$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $12\sqrt{2}$ একক।

১৩. ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র হলো শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দু।
লক্ষ করি, $A(-2,1)$ এবং $B(4,1)$ বিন্দুদ্বয়ের কোটি সমান $(y = 1)$।
সুতরাং, AB বাহুটি x-অক্ষের সমান্তরাল।
অতএব, $C(2,5)$ শীর্ষ হতে AB এর উপর অঙ্কিত লম্বটি হবে y-অক্ষের সমান্তরাল।
$\therefore$ C হতে অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ: $x = 2$ **..... (i)**
এবার AC বাহুর ঢাল বের করি: $m_{AC} = \frac{5-1}{2-(-2)} = \frac{4}{4} = 1$
$B(4,1)$ বিন্দু হতে AC এর উপর অঙ্কিত লম্বের ঢাল হবে $m = -1$ (যেহেতু লম্ব রেখার ঢালদ্বয়ের গুণফল -1)।
$\therefore$ B হতে অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ: $y - 1 = -1(x - 4)$
$\Rightarrow x + y - 5 = 0$ **..... (ii)**
লম্বকেন্দ্র হবে **(i)** ও **(ii)** নং রেখার ছেদবিন্দু।
$x = 2$ সমীকরণ **(ii)**-এ বসিয়ে পাই, $2 + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 3$
$\therefore$ ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র: $(2,3)$

১৪. ধরি, বর্গক্ষেত্রের একটি কর্ণ AC যার প্রান্তবিন্দুদ্বয় $A(2,3)$ এবং $C(-2,1)$
কর্ণের দৈর্ঘ্য, $d = AC = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$
আমরা জানি, বর্গের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times d^2$
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times (\sqrt{20})^2 = \frac{1}{2} \times 20 = 10$ বর্গ একক
বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
কর্ণের মধ্যবিন্দু (বর্গের কেন্দ্র) $O = \left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (0,2)$
AC কর্ণের ঢাল, $m_{AC} = \frac{1-3}{-2-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$
যেহেতু অপর কর্ণ BD, AC এর উপর লম্ব, তাই BD এর ঢাল, $m_{BD} = -2$
এখন, কেন্দ্র $O(0,2)$ বিন্দুগামী এবং -2 ঢালবিশিষ্ট অপর কর্ণের সমীকরণ: $y - 2 = -2(x - 0)$
$\Rightarrow y - 2 = -2x$
$\Rightarrow 2x + y - 2 = 0$
$\therefore$ বর্গের ক্ষেত্রফল 10 বর্গ একক এবং অপর কর্ণের সমীকরণ $2x + y - 2 = 0$

১৫. প্রথমে রেখাদ্বয়ের সমীকরণের ধ্রুবক পদগুলো ধনাত্মক করে লিখি: $-3x-4y+5=0$ **..... (i)**
$12x-5y+13=0$ **..... (ii)**
আমরা জানি, ধ্রুবক পদ ধনাত্মক রাখার পর সমদ্বিখণ্ডকের সূত্রে ধনাত্মক $(+)$ চিহ্ন নিয়ে যে সমদ্বিখণ্ডকটি পাওয়া যায়, তা সর্বদা মূলবিন্দুধারী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
সুতরাং, মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $\frac{-3x-4y+5}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}=+\frac{12x-5y+13}{\sqrt{(12)^2+(-5)^2}}$
$\Rightarrow \frac{-3x-4y+5}{5}=\frac{12x-5y+13}{13}$
$\Rightarrow 13(-3x-4y+5)=5(12x-5y+13)$
$\Rightarrow -39x-52y+65=60x-25y+65$
$\Rightarrow 99x+27y=0$
$\Rightarrow 11x+3y=0$
$\therefore$ মূলবিন্দুধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $11x+3y=0$

১৬. ধরি, পরিবর্তনশীল সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$
এটি x-অক্ষকে $A(\alpha,0)$ এবং y-অক্ষকে $B(0,\beta)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
ΔOAB এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\alpha\beta$
প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}\alpha\beta=2c^2$
$\Rightarrow \alpha\beta=4c^2$ **..... (i)**
ধরি, AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু $P(x,y)$
মধ্যবিন্দুর সূত্রানুসারে, $x=\frac{\alpha+0}{2}\Rightarrow \alpha=2x$
$y=\frac{0+\beta}{2}\Rightarrow \beta=2y$
α ও β এর মান **(i)** নং সমীকরণে বসিয়ে পাই: $(2x)(2y)=4c^2$
$\Rightarrow xy=c^2$
$\therefore$ মধ্যবিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $xy=c^2$

১৭. ধরি, প্রথম জোড়া রেখা: $L_1: 3x-4y-10=0$ (ঢাল $m_1=\frac{3}{4}$)
$L_2: 3x-4y+20=0$ (ঢাল $m_1=\frac{3}{4}$)
দ্বিতীয় জোড়া রেখা: $L_3: 4x+3y-5=0$ (ঢাল $m_2=-\frac{4}{3}$)
$L_4: 4x+3y+25=0$ (ঢাল $m_2=-\frac{4}{3}$)
এখানে, $m_1\times m_2=\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-1$
যেহেতু সন্নিহিত বাহুগুলো পরস্পর লম্ব, সুতরাং চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র অথবা বর্গক্ষেত্র।
L_1 ও L_2 সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব (ধরি বর্গের একটি বাহু d_1): $d_1=\frac{|20-(-10)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{30}{\sqrt{25}}=\frac{30}{5}=6$ একক।
L_3 ও L_4 সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব (ধরি বর্গের অপর বাহু d_2): $d_2=\frac{|25-(-5)|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{30}{\sqrt{25}}=\frac{30}{5}=6$ একক।
যেহেতু সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান ($d_1=d_2=6$) এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ 90°, তাই এটি একটি বর্গক্ষেত্র। (প্রমাণিত)
বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=d_1\times d_2=6\times 6=36$ বর্গ একক।

১৮. ধরি, রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $P(\alpha, \beta)$

যেহেতু ছেদবিন্দুটি $x + y - 3 = 0$ রেখার ওপর অবস্থিত, $\therefore \alpha + \beta - 3 = 0$

$\Rightarrow \beta = 3 - \alpha$

$L(2, -3)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল: $m_1 = \frac{\beta-(-3)}{\alpha-2} = \frac{(3-\alpha)+3}{\alpha-2} = \frac{6-\alpha}{\alpha-2}$

$M(-1, 5)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল: $m_2 = \frac{\beta-5}{\alpha-(-1)} = \frac{(3-\alpha)-5}{\alpha+1} = \frac{-\alpha-2}{\alpha+1}$

যেহেতু রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব, সেহেতু তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হবে। $\therefore m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow \frac{6-\alpha}{\alpha-2} \cdot \frac{-\alpha-2}{\alpha+1} = -1$

$\Rightarrow (6 - \alpha)(-\alpha - 2) = -(\alpha - 2)(\alpha + 1)$

$\Rightarrow (\alpha - 6)(\alpha + 2) = -(\alpha - 2)(\alpha + 1)$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 12 = -(\alpha^2 - \alpha - 2)$

$\Rightarrow 2\alpha^2 - 5\alpha - 14 = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করে পাই: $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-14)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+112}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{137}}{4}$

$\therefore \alpha \approx 4.176$ অথবা $\alpha \approx -1.676$

এখন α এর মান ব্যবহার করে L রেখার ঢাল m_1 নির্ণয় করি:

$\alpha = 4.176$ হলে, $m_1 = \frac{6-4.176}{4.176-2} \approx 0.838$

$\alpha = -1.676$ হলে, $m_1 = \frac{6-(-1.676)}{-1.676-2} \approx -2.088$

$\therefore L(2, -3)$ বিন্দুগামী নির্ণেয় রেখার সমীকরণ $(y - y_1 = m_1(x - x_1))$:

১ম ক্ষেত্রে $(m_1 = 0.838)$: $y - (-3) = 0.838(x - 2)$

$\Rightarrow y + 3 = 0.838x - 1.676$

$\Rightarrow 0.838x - y = 4.676$

২য় ক্ষেত্রে $(m_1 = -2.088)$: $y - (-3) = -2.088(x - 2)$

$\Rightarrow y + 3 = -2.088x + 4.176$

$\Rightarrow 2.088x + y = 1.176$

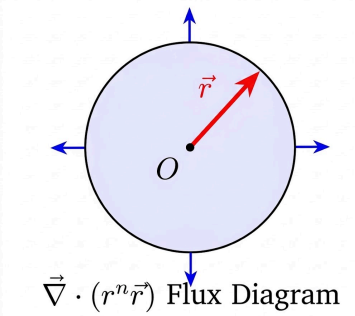
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $0.838x - y = 4.676$ অথবা $2.088x + y = 1.176$

ব্যাখ্যা:

১৯. ধরি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
রেখাটি $(3,4)$ বিন্দুগামী হওয়ায়: $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$ **..... (i)**
অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের প্রান্তবিন্দু দুটি হলো $A(a,0)$ এবং $B(0,b)$।
ধরি, খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দু $M(x,y)$
$\therefore x=\frac{a+0}{2}\Rightarrow a=2x$ এবং $y=\frac{0+b}{2}\Rightarrow b=2y$
a ও b এর মান **(i)** নং এ বসিয়ে পাই: $\frac{3}{2x}+\frac{4}{2y}=1$
$\Rightarrow \frac{3y+4x}{2xy}=1$
$\Rightarrow 4x+3y=2xy$
$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ: $4x+3y-2xy=0$
অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta=\frac{1}{2}ab$
সমীকরণ **(i)** হতে পাই, $\frac{4}{b}=1-\frac{3}{a}=\frac{a-3}{a}\Rightarrow b=\frac{4a}{a-3}$
$\therefore \Delta=\frac{1}{2}a\left(\frac{4a}{a-3}\right)=\frac{2a^2}{a-3}$
a এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{d\Delta}{da}=2\left[\frac{(a-3)\cdot 2a-a^2\cdot 1}{(a-3)^2}\right]=2\left(\frac{2a^2-6a-a^2}{(a-3)^2}\right)=\frac{2(a^2-6a)}{(a-3)^2}$
ক্ষেত্রফল ন্যূনতম হওয়ার শর্তানুসারে, $\frac{d\Delta}{da}=0$
$\Rightarrow a^2-6a=0$
যেহেতু ত্রিভুজ গঠিত হয়, $a\neq 0$ হবে। সুতরাং $a=6$
এখন ২য় অন্তরজ যাচাই করি: $\frac{d^2\Delta}{da^2}=2\frac{d}{da}\left(\frac{a^2-6a}{(a-3)^2}\right)=2\left[\frac{(2a-6)(a-3)^2-(a^2-6a)\cdot 2(a-3)}{(a-3)^4}\right]$
$a=6$ হলে, $\left.\frac{d^2\Delta}{da^2}\right|_{a=6}=2\left[\frac{6(9)-0}{81}\right]=\frac{108}{81}=\frac{4}{3}>0$
যেহেতু ২য় অন্তরজ ধনাত্মক, তাই $a=6$ এর জন্য ক্ষেত্রফল ন্যূনতম হবে।
$a=6$ হলে, $b=\frac{4(6)}{6-3}=\frac{24}{3}=8$
$\therefore$ ন্যূনতম ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$ বর্গ একক।

২০. ধরি, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $G(\alpha,\beta)$
ভরকেন্দ্রের সূত্রানুসারে, $\alpha=\frac{5+1+x}{3}\Rightarrow x=3\alpha-6$
এবং $\beta=\frac{2+7+y}{3}\Rightarrow y=3\beta-9$
দেওয়া আছে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=13$
$\Rightarrow \frac{1}{2}|5(7-y)+1(y-2)+x(2-7)|=13$
$\Rightarrow |35-5y+y-2-5x|=26$
$\Rightarrow |-5x-4y+33|=26$
$\Rightarrow 5x+4y-33=\pm 26$
এখন x ও y এর মান প্রতিস্থাপন করে পাই: $5(3\alpha-6)+4(3\beta-9)-33=\pm 26$
$\Rightarrow 15\alpha-30+12\beta-36-33=\pm 26$
$\Rightarrow 15\alpha+12\beta-99=\pm 26$
$(+)$ নিয়ে: $15\alpha+12\beta-99=26\Rightarrow 15\alpha+12\beta-125=0$
$(-)$ নিয়ে: $15\alpha+12\beta-99=-26\Rightarrow 15\alpha+12\beta-73=0$
$\therefore$ ভরকেন্দ্রের নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $15x+12y-125=0$ অথবা $15x+12y-73=0$

২১.



$\vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r})$ Flux Diagram

আমরা জানি, ভেক্টর ক্যালকুলাসের ডাইভারজেন্স গুণন সূত্র **(Divergence product rule):**

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}\phi)$$

এখানে $\phi = r^n$ এবং $\vec{A} = \vec{r}$ ধরি:

$$\vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = r^n(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) + \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} r^n) \quad -(i)$$

আমরা জানি:

১. $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$

২. $\vec{\nabla} r^n = n r^{n-2} \vec{r}$ (গ্রেডিয়েন্টের সাধারণ সূত্র থেকে)

এই মানগুলো সমীকরণ **(i)**-এ বসিয়ে পাই:

$$\vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = r^n(3) + \vec{r} \cdot (n r^{n-2} \vec{r}) = 3r^n + n r^{n-2}(\vec{r} \cdot \vec{r})$$

যেহেতু $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$:

$$\vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = 3r^n + n r^{n-2}(r^2) = 3r^n + n r^n = (n+3) r^n$$ (প্রমাণিত)

প্রয়োগসমূহ:

১ম ক্ষেত্র ($n = 3$):

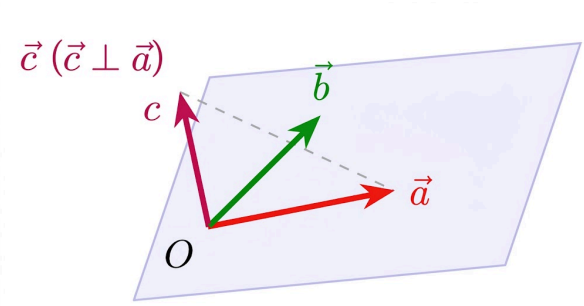
$$\vec{\nabla} \cdot (r^3 \vec{r}) = (3+3) r^3 = 6r^3$$

২য় ক্ষেত্র ($n = -3$):

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{\nabla} \cdot (r^{-3} \vec{r}) = (-3+3) r^{-3} = 0$$

উত্তর: ১ম ক্ষেত্রে $6r^3$ এবং ২য় ক্ষেত্রে 0

২২.



১. সমতলীয় হওয়ার শর্তানুসারে (Scalar Triple Product = 0):
যেহেতু $\vec{c}$, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ একই সমতলে অবস্থিত, তাই তাদের নির্ণায়কের মান শূন্য হতে হবে:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x(3(1) - (-1)(1)) - y(2(1) - (-1)(0)) + z(2(1) - 3(0)) = 0$$
$$\Rightarrow x(3+1) - y(2) + z(2) = 0$$
$$\Rightarrow 4x - 2y + 2z = 0 \Rightarrow 2x - y + z = 0 \quad -(i)$$

২. লম্ব হওয়ার শর্তানুসারে (Dot Product = 0):
যেহেতু $\vec{c}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ এর উপর লম্ব, তাই:
$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 0$$
$$\Rightarrow 2x + 3y - z = 0 \quad -(ii)$$

৩. তৃতীয় শর্তানুসারে ($\vec{c} \cdot \vec{b} = 24$):
$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 24 \Rightarrow (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (\hat{j} + \hat{k}) = 24$$
$$\Rightarrow y + z = 24 \Rightarrow z = 24 - y \quad -(iii)$$

সমীকরণ **(i)** এবং **(ii)** যোগ করে পাই:
$$(2x - y + z) + (2x + 3y - z) = 0 \Rightarrow 4x + 2y = 0 \Rightarrow y = -2x \quad -(iv)$$

এখন সমীকরণ **(iv)** ও **(iii)** এর মান সমীকরণ **(i)**-এ বসিয়ে পাই:
$$2x - (-2x) + (24 + 2x) = 0$$
$$\Rightarrow 6x + 24 = 0 \Rightarrow 6x = -24 \Rightarrow x = -4$$

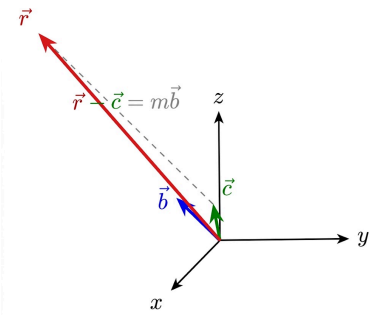
প্রাপ্ত x এর মান ব্যবহার করে y ও z এর মান পাই:
$$y = -2(-4) = 8$$
$$z = 24 - 8 = 16$$

অতএব, নির্ণেয় ভেক্টরটি:
$$\vec{c} = -4\hat{i} + 8\hat{j} + 16\hat{k}$$

ভেক্টরের মান **(Magnitude):**
$$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 16^2} = \sqrt{16 + 64 + 256} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$$

উত্তর: $\vec{c} = -4\hat{i} + 8\hat{j} + 16\hat{k}$ এবং মান $4\sqrt{21}$

২৩.



দেওয়া আছে প্রথম সম্পর্কটি:
$\vec{r} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{b} \Rightarrow (\vec{r} - \vec{c}) \times \vec{b} = \vec{0}$

যেহেতু দুটি অশুন্য ভেক্টরের ক্রস গুণফল শূন্য এসেছে, সেহেতু ভেক্টর $(\vec{r} - \vec{c})$ এবং $\vec{b}$ পরস্পর সমান্তরাল বা সমরেখ। অতএব, আমরা লিখতে পারি:
$\vec{r} - \vec{c} = m\vec{b} \Rightarrow \vec{r} = \vec{c} + m\vec{b} \quad -(i)$ [যেখানে m একটি স্কেলার রাশি]

এখন সমীকরণ **(i)** এর উভয় পক্ষে $\vec{a}$ দ্বারা ডট গুণ করে পাই:
$\vec{r} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} + m(\vec{b} \cdot \vec{a})$

শর্তানুসারে, $\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$। অতএব:
$0 = \vec{c} \cdot \vec{a} + m(\vec{b} \cdot \vec{a}) \Rightarrow m = -\frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{\vec{b} \cdot \vec{a}} \quad -(ii)$

প্রদত্ত ভেক্টরসমূহের ডট গুণফল হিসাব করি:
$\vec{c} \cdot \vec{a} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (-\hat{i} - \hat{k}) = (1)(-1) + (2)(0) + (3)(-1) = -1 - 3 = -4$
$\vec{b} \cdot \vec{a} = (-\hat{i} + \hat{j}) \cdot (-\hat{i} - \hat{k}) = (-1)(-1) + (1)(0) + (0)(-1) = 1$

সমীকরণ **(ii)**-এ মানগুলো বসিয়ে পাই:
$m = -\frac{-4}{1} = 4$

সুতরাং, সমীকরণ **(i)** থেকে পাই:
$\vec{r} = \vec{c} + 4\vec{b}$

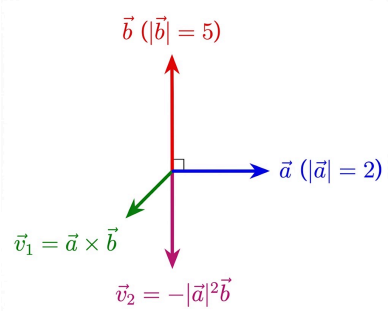
এখন আমাদের কাঙ্ক্ষিত মান $\vec{r} \cdot \vec{b}$ নির্ণয় করি:
$\vec{r} \cdot \vec{b} = (\vec{c} + 4\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \quad -(iii)$

এখানে:
$\vec{c} \cdot \vec{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + \hat{j}) = (1)(-1) + (2)(1) + (3)(0) = -1 + 2 = 1$
$|\vec{b}|^2 = (-1)^2 + (1)^2 + 0^2 = 2$

সমীকরণ **(iii)**-এ মানগুলো বসিয়ে পাই:
$\vec{r} \cdot \vec{b} = 1 + 4(2) = 9$

উত্তর: 9

২৪.



ধরি, প্রথম ক্রস গুণফল $\vec{v}_1 = \vec{a} \times \vec{b}$।
ভেক্টর ত্রয়ী গুণফলের সূত্র $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$ ব্যবহার করে পাই:
$\vec{v}_2 = \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b}$

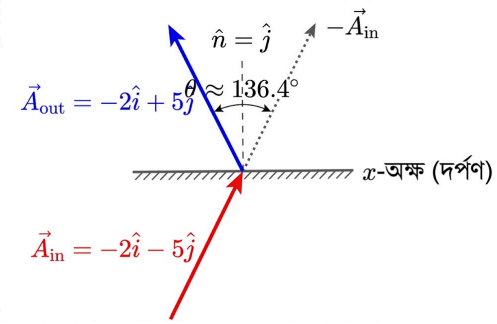
যেহেতু $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ এবং $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$:
$\vec{v}_2 = -|\vec{a}|^2\vec{b}$

একইভাবে পরবর্তী ক্রস গুণফলগুলো পর্যায়ক্রমে নির্ণয় করি:
$\vec{v}_3 = \vec{a} \times \vec{v}_2 = \vec{a} \times (-|\vec{a}|^2\vec{b}) = -|\vec{a}|^2(\vec{a} \times \vec{b})$
$\vec{v}_4 = \vec{a} \times \vec{v}_3 = \vec{a} \times (-|\vec{a}|^2(\vec{a} \times \vec{b})) = -|\vec{a}|^2[\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})] = -|\vec{a}|^2(-|\vec{a}|^2\vec{b}) = |\vec{a}|^4\vec{b}$
$\vec{v}_5 = \vec{a} \times \vec{v}_4 = \vec{a} \times (|\vec{a}|^4\vec{b}) = |\vec{a}|^4(\vec{a} \times \vec{b})$
$\vec{v}_6 = \vec{a} \times \vec{v}_5 = \vec{a} \times (|\vec{a}|^4(\vec{a} \times \vec{b})) = |\vec{a}|^4[\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})] = |\vec{a}|^4(-|\vec{a}|^2\vec{b}) = -|\vec{a}|^6\vec{b}$

প্রদত্ত মান $|\vec{a}| = 2$ বসিয়ে পাই:
$-|\vec{a}|^6\vec{b} = -(2)^6\vec{b} = -64\vec{b}$

উত্তর: $-64\vec{b}$

২৫.



১. প্রতিফলিত ভেক্টর $(\vec{A}_{\text{out}})$ নির্ণয়:
সমতল দর্পণটি x-অক্ষ বরাবর অবস্থিত হওয়ায় দর্পণের অভিলম্বটি y-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর খাড়া উপরের দিকে ক্রিয়াশীল থাকবে। অতএব, একক অভিলম্ব ভেক্টর: $\hat{n} = \hat{j}$।
ভেক্টর প্রতিফলন সূত্রানুসারে প্রতিফলিত রশ্মির দিক নির্দেশক ভেক্টর:
$\vec{A}_{\text{out}} = \vec{A}_{\text{in}} - 2(\vec{A}_{\text{in}} \cdot \hat{n})\hat{n}$

এখানে ডট গুণফলের মান:
$\vec{A}_{\text{in}} \cdot \hat{n} = (-2\hat{i} - 5\hat{j}) \cdot \hat{j} = -5$

মানটি বসিয়ে প্রতিফলিত রশ্মির ভেক্টর পাই:
$\vec{A}_{\text{out}} = (-2\hat{i} - 5\hat{j}) - 2(-5)\hat{j} = -2\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{j} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$

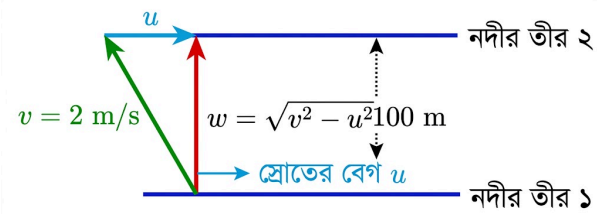
২. ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ (θ) নির্ণয়:
ধরি, আপতিত ও প্রতিফলিত ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ θ।
$\cos\theta = \frac{\vec{A}_{\text{in}} \cdot \vec{A}_{\text{out}}}{|\vec{A}_{\text{in}}||\vec{A}_{\text{out}}|}$

এখানে:
$\vec{A}_{\text{in}} \cdot \vec{A}_{\text{out}} = (-2\hat{i} - 5\hat{j}) \cdot (-2\hat{i} + 5\hat{j}) = (-2)(-2) + (-5)(5) = 4 - 25 = -21$
$|\vec{A}_{\text{in}}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$
$|\vec{A}_{\text{out}}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

অতএব:
$\cos\theta = \frac{-21}{\sqrt{29}\sqrt{29}} = -\frac{21}{29}$
$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{21}{29}\right) \approx 136.4^\circ$

উত্তর: আপতিত ও প্রতিফলিত রশ্মির মধ্যবর্তী কোণ $\approx 136.4^\circ$

২৬.



ধরি, নৌকার বেগ $\mathrm{v} = 2\ \mathrm{m/s}$, স্রোতের বেগ $= \mathrm{u}$, এবং নদীর প্রস্থ $\mathrm{d} = 100\ \mathrm{m}$।

১ম ক্ষেত্রে (ন্যূনতম পথে নদী পার হতে সময় $\mathrm{t_1}$):
সোজা বিপরীত পাড়ে পৌঁছানোর জন্য কার্যকরী বেগ $\mathrm{w} = \sqrt{\mathrm{v^2 - u^2}}$।
$\mathrm{t_1} = \frac{\mathrm{d}}{\sqrt{\mathrm{v^2 - u^2}}} \quad -(\mathrm{i})$

২য় ক্ষেত্রে (স্রোতহীন নদীতে সর্বনিম্ন সময়ে পারাপার হতে সময় $\mathrm{t_2}$):
স্রোত না থাকলে সরাসরি সোজা রওনা দিলে সবচেয়ে কম সময় লাগবে।
$\mathrm{t_2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{v}} \quad -(\mathrm{ii})$

শর্তানুসারে:
$\mathrm{t_2} = \frac{1}{2}\mathrm{t_1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{d}}{2\sqrt{\mathrm{v^2 - u^2}}}$
$\Rightarrow 2\sqrt{\mathrm{v^2 - u^2}} = \mathrm{v}$

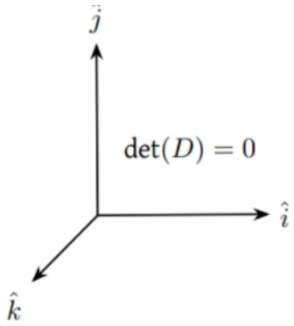
উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই:
$4(\mathrm{v^2 - u^2}) = \mathrm{v^2} \Rightarrow 4\mathrm{v^2} - 4\mathrm{u^2} = \mathrm{v^2} \Rightarrow 3\mathrm{v^2} = 4\mathrm{u^2}$
$\Rightarrow \mathrm{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{v}$

দেওয়া আছে নৌকার বেগ $\mathrm{v} = 2\ \mathrm{m/s}$। মানটি বসিয়ে পাই:
$\mathrm{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}\ \mathrm{m/s} \approx 1.732\ \mathrm{m/s}$

ন্যূনতম সময়ে নদী পারাপার ($\mathrm{t_{min}}$):
আমরা জানি, যেকোনো নদীতে সর্বনিম্ন সময়ে পার হওয়ার শর্ত হলো স্রোতের লম্ব অভিমুখে রওনা দেওয়া ($\alpha = 90^\circ$)।
$\mathrm{t_{min}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{v}} = \frac{100\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{m/s}} = 50\ \mathrm{s}$

উত্তর: স্রোতের বেগ $\sqrt{3}\ \mathrm{m/s}$ এবং নদী পারাপারের সর্বনিম্ন সময় $50\ \mathrm{s}$

২৭.



উভয় পক্ষ হতে $\hat{\mathrm{i}}, \hat{\mathrm{j}}, \hat{\mathrm{k}}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই:

$(1-\lambda)\mathrm{x} + 3\mathrm{y} - 4\mathrm{z} = 0$

$\mathrm{x} - (3+\lambda)\mathrm{y} + 5\mathrm{z} = 0$

$3\mathrm{x} + \mathrm{y} - \lambda\mathrm{z} = 0$

সমজাতীয় রৈখিক সমীকরণ জোটের অশূন্য **(non-trivial)** সমাধান থাকার শর্তানুসারে নির্ণায়ক শূন্য হবে:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -4 \\ 1 & -(3+\lambda) & 5 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

বিস্তৃত করে পাই:

$(1-\lambda)[\lambda(3+\lambda) - 5] - 3[-\lambda - 15] - 4[1 + 3(3+\lambda)] = 0$

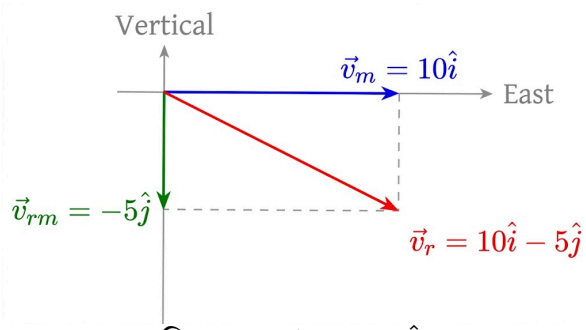
$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 5) + 3(\lambda + 15) - 4(3\lambda + 10) = 0$

$\Rightarrow -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda+1)^2 = 0$

অতএব, $\lambda = 0$ অথবা $\lambda = -1$।

উত্তর: $\lambda = 0, -1$

২৮.



আরোহীর বেগ $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{m} = 10\hat{\mathrm{i}}$ km/h এবং আপেক্ষিক বেগ $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{rm} = -5\hat{\mathrm{j}}$ km/h।

আমরা জানি:

$\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{rm} = \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} - \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{m} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} = \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{rm} + \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{m} = 10\hat{\mathrm{i}} - 5\hat{\mathrm{j}}$ km/h

বৃষ্টির প্রকৃত বেগের মান:

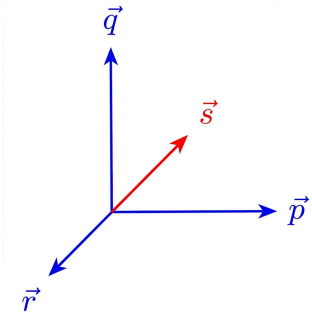
$|\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r}| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ km/h ≈ 11.18 km/h

দিক (উলম্বের সাথে কোণ θ):

$\tan\theta = \frac{|\mathrm{v_{rx}}|}{|\mathrm{v_{ry}}|} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2) \approx 63.43^\circ$

উত্তর: বৃষ্টির প্রকৃত বেগ 11.18 km/h এবং এটি উলম্বের সাথে 63.43° কোণে হেলিয়ে আরোহীর গতির অভিমুখে পড়ছে।

২৯.



ভেক্টর $\vec{s}$ কে আদি ও নতুন দুই জোড়া অক্ষের মাধ্যমে প্রকাশ করে পাই:

$\vec{s} = 4\vec{p} + 3\vec{q} + 5\vec{r} \quad -(i)$

এবং

$\vec{s} = x(-\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}) + y(\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}) + z(-\vec{p} - \vec{q} + \vec{r})$

$\Rightarrow \vec{s} = (-x + y - z)\vec{p} + (x - y - z)\vec{q} + (x + y + z)\vec{r} \quad -(ii)$

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ অসমতলীয় হওয়ায় সহগসমূহ সমীকৃত করে পাই:

$-x + y - z = 4 \quad -(1)$

$x - y - z = 3 \quad -(2)$

$x + y + z = 5 \quad -(3)$

সমীকরণ **(2)** ও **(3)** যোগ করে পাই:

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$

সমীকরণ **(1)** ও **(3)** যোগ করে পাই:

$2y = 9 \Rightarrow y = 4.5$

x ও y এর মান **(3)**-এ বসিয়ে পাই:

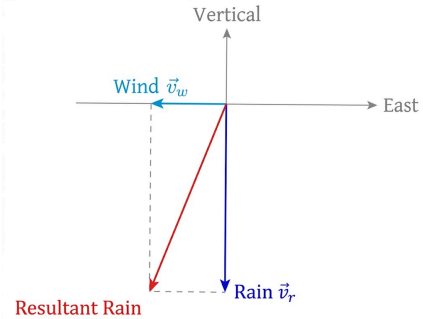
$4 + 4.5 + z = 5 \Rightarrow z = -3.5$

নির্ণেয় রাশির মান:

$2x + y + z = 2(4) + 4.5 + (-3.5) = 8 + 4.5 - 3.5 = 9$

উত্তর: **9**

৩০.



পূর্ব দিককে $+\mathrm{x}$ এবং খাড়া উপরের দিককে $+\mathrm{y}$ অক্ষ ধরি। বৃষ্টির বেগ $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} = -5\hat{\mathrm{j}}$, বাতাসের বেগ $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{w} = -2\hat{\mathrm{i}}$। বৃষ্টির মোট প্রকৃত বেগ, $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{rain} = -2\hat{\mathrm{i}} - 5\hat{\mathrm{j}}$।

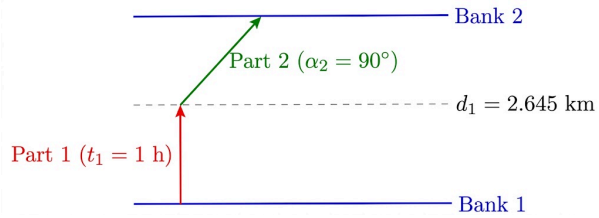
(ক) স্থির পূর্বমুখী গাড়ির ক্ষেত্রে: গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{rel} = -2\hat{\mathrm{i}} - 5\hat{\mathrm{j}}$। যেহেতু $\mathbf{x}$-উপাংশ ঋণাত্মক (পশ্চিমমুখী), বৃষ্টি সামনের দিক থেকে আসবে। ফলে সামনের কাচ ভিজবে। কোণ:
$\tan\theta = \frac{|\mathrm{v_x}|}{|\mathrm{v_y}|} = \frac{2}{5} = 0.4 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0.4) \approx 21.8^\circ$ (উলম্বের সাথে)

(খ) গাড়িটি $3\ \mathrm{m/s}$ বেগে পূর্ব দিকে গতিশীল হলে: গাড়ির বেগ $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{c} = 3\hat{\mathrm{i}}$। আপেক্ষিক বেগ:
$\vec{\mathrm{v}}'_\mathrm{rel} = \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{rain} - \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{c} = (-2\hat{\mathrm{i}} - 5\hat{\mathrm{j}}) - 3\hat{\mathrm{i}} = -5\hat{\mathrm{i}} - 5\hat{\mathrm{j}}$

এখানেও $\mathbf{x}$-উপাংশ ঋণাত্মক হওয়ায় সামনের কাচই ভিজবে, তবে নতুন কোণ হবে:
$\tan\theta' = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow \theta' = 45^\circ$ (উলম্বের সাথে)

উত্তর: (ক) সামনের কাচ 21.8° কোণে ভিজবে। **(খ)** গাড়ি পূর্ব দিকে চললে বৃষ্টি 45° কোণে সামনের কাচকে ভিজিয়ে দেবে।

৩১.



দেওয়া আছে, $d = 5$ km, $u = 3$ km/h, $v = 4$ km/h।

১ম অংশ (ন্যূনতম পথে পারাপারের চেষ্টা): সোজাসুজি পার হওয়ার কোণ α_1:

$\cos\alpha_1 = -\frac{u}{v} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha_1 \approx 138.59^\circ$

প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ:

$v_{y1} = v\sin\alpha_1 = 4\sin(138.59^\circ) \approx 2.645$ km/h

$t_1 = 1$ h সময়ে প্রস্থ বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব:

$d_1 = v_{y1} \times t_1 = 2.645$ km

বাকি পথ:

$d_2 = d - d_1 = 5 - 2.645 = 2.355$ km

২য় অংশ (বাকি পথ সর্বনিম্ন সময়ে পারাপার): সর্বনিম্ন সময়ে নদী পারাপারের জন্য খাড়া সোজাসুজি পাড়ি দিতে হয় ($\alpha_2 = 90^\circ$)। এক্ষেত্রে প্রস্থ বরাবর বেগ $v_{y2} = v = 4$ km/h।

প্রয়োজনীয় সময়:

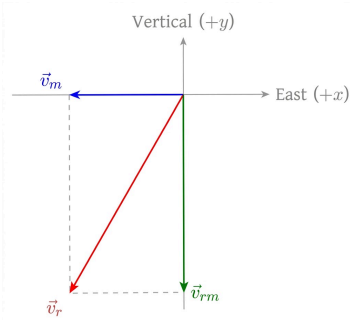
$t_2 = \frac{d_2}{v} = \frac{2.355}{4} \approx 0.588$ h

সর্বমোট সময়:

$t_{total} = t_1 + t_2 = 1 + 0.588 = 1.588$ h **(বা 1 ঘণ্টা 35 মিনিট 18 সেকেন্ড)**

উত্তর: **1.588 h** বা **1** ঘণ্টা **35** মিনিট **18** সেকেন্ড

৩২.



পূর্ব দিককে $+\mathrm{x}$ অক্ষ এবং খাড়া উপরের দিককে $+\mathrm{y}$ অক্ষ ধরি। ধরি, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} = \mathrm{v_x}\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y}\hat{\mathrm{j}}$।
১ম ক্ষেত্রে: লোকের বেগ পশ্চিম দিকে হওয়ায়, $\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{m} = -4\hat{\mathrm{i}}\ \mathrm{km/h}$। লোকের সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ:
$\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{rm} = \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} - \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{m} = (\mathrm{v_x} - (-4))\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y}\hat{\mathrm{j}} = (\mathrm{v_x} + 4)\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y}\hat{\mathrm{j}}$

শর্তানুসারে, বৃষ্টি খাড়া নিচের দিকে পড়ে। সুতরাং, আপেক্ষিক বেগের অনুভূমিক উপাংশ শূন্য হবে:
$\mathrm{v_x} + 4 = 0 \Rightarrow \mathrm{v_x} = -4\ \mathrm{km/h}$

২য় ক্ষেত্রে (বেগ দ্বিগুণ করা হলে): নতুন লোকের বেগ, $\vec{\mathrm{v}}'_\mathrm{m} = -8\hat{\mathrm{i}}\ \mathrm{km/h}$। নতুন আপেক্ষিক বেগ:
$\vec{\mathrm{v}}'_\mathrm{rm} = \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} - \vec{\mathrm{v}}'_\mathrm{m} = (\mathrm{v_x} + 8)\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y}\hat{\mathrm{j}} = (-4 + 8)\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y}\hat{\mathrm{j}} = 4\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y}\hat{\mathrm{j}}$

শর্তানুসারে, বৃষ্টি উলম্বের সাথে 30° কোণে পড়ে:
$\tan 30^\circ = \frac{|\text{Horizontal Component}|}{|\text{Vertical Component}|} = \frac{4}{|\mathrm{v_y}|}$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{|\mathrm{v_y}|} \Rightarrow |\mathrm{v_y}| = 4\sqrt{3}\ \mathrm{km/h}$

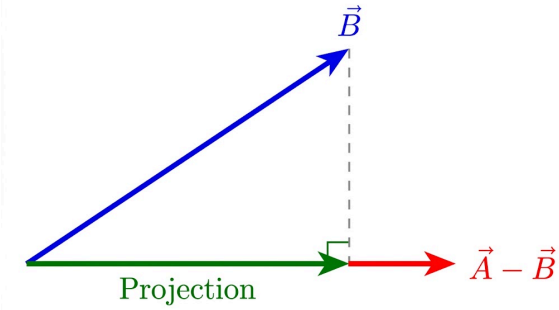
যেহেতু বৃষ্টি নিচের দিকে পড়ে, তাই $\mathrm{v_y} = -4\sqrt{3}\ \mathrm{km/h}$।
বৃষ্টির প্রকৃত বেগের মান:
$|\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r}| = \sqrt{\mathrm{v_x^2} + \mathrm{v_y^2}} = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8\ \mathrm{km/h}$

দিক নির্ণয়:
$\tan\theta = \frac{|\mathrm{v_x}|}{|\mathrm{v_y}|} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ$ (উলম্বের সাথে কোণ)

উত্তর: বৃষ্টির প্রকৃত বেগ $8\ \mathrm{km/h}$, যা উলম্বের সাথে 30° কোণে পশ্চিম দিকে হেলিয়ে পড়ছে।

৩৩. ল্যাগরেঞ্জের অভেদ ($|\vec{A}\times\vec{B}|^2+(\vec{A}\cdot\vec{B})^2=|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2$) ব্যবহার করে পাই:

$|\vec{A}|^2=1^2+(-1)^2+2^2=6$



$|\vec{A}\times\vec{B}|^2=2^2+(-1)^2=5$

$5+3^2=6|\vec{B}|^2\Rightarrow 14=6|\vec{B}|^2\Rightarrow|\vec{B}|^2=\frac{7}{3}$

$\vec{A}-\vec{B}$ বরাবর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ:

$\text{Projection}=\frac{\vec{B}\cdot(\vec{A}-\vec{B})}{|A-B|}=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}-|\vec{B}|^2}{\sqrt{|\vec{A}-\vec{B}|^2}}$

হর (denominator) হিসাব করি:

$|\vec{A}-\vec{B}|^2=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2-2(\vec{A}\cdot\vec{B})=6+\frac{7}{3}-6=\frac{7}{3}$

$\Rightarrow|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{\frac{7}{3}}$

লব (numerator) হিসাব করি:

$\vec{A}\cdot\vec{B}-|\vec{B}|^2=3-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}$

অতএব, লম্ব অভিক্ষেপ:

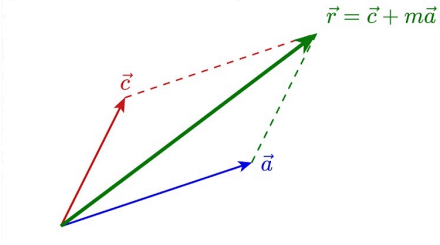
$\text{Projection}=\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$

উত্তর: $\frac{2}{\sqrt{21}}$ (বা ≈ 0.436)

৩৪. প্রথম সম্পর্কটি থেকে পাই: $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \Rightarrow (\vec{r} - \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{0}$

যেহেতু দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফল শূন্য, তাই $(\vec{r} - \vec{c})$ এবং $\vec{a}$ সমান্তরাল: $\vec{r} - \vec{c} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{r} = \vec{c} + m\vec{a} \quad -(i)$

উভয় পক্ষে $\vec{b}$ দ্বারা ডট গুণ করি: $\vec{r} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} + m(\vec{a} \cdot \vec{b})$



ভেক্টর জ্যামিতিক উপস্থাপন (Geometric representation of vector $\vec{r}$)

শর্তানুসারে $\vec{r} \cdot \vec{b} = 0$: $0 = \vec{c} \cdot \vec{b} + m(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad -(ii)$

প্রয়োজনীয় ডট গুণফল নির্ণয় করি: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(1) + (2)(-1) + (-1)(0) = -1$; $\vec{c} \cdot \vec{b} = (1)(1) + (-1)(-1) + (-1)(0) = 2$

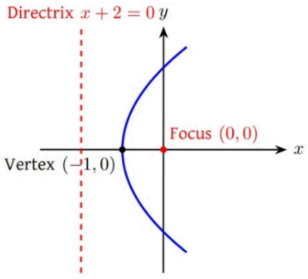
সমীকরণ **(ii)**-এ মান বসিয়ে পাই: $0 = 2 + m(-1) \Rightarrow m = 2$

সুতরাং, $\vec{r} = \vec{c} + 2\vec{a}$।
এখন $\vec{r} \cdot \vec{a}$ নির্ণয় করি:
$\vec{r} \cdot \vec{a} = (\vec{c} + 2\vec{a}) \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} + 2|\vec{a}|^2$

এখানে: $\vec{c} \cdot \vec{a} = (1)(1) + (-1)(2) + (-1)(-1) = 0$
$|\vec{a}|^2 = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 = 6$

$\vec{r} \cdot \vec{a} = 0 + 2(6) = 12$

৩৫.



কণাটির গতিপথের পরাবৃত্তীয় রূপ (Parabolic trajectory of the particle)

দেওয়া আছে, অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}(t) = (t^2-1)\hat{i} + 2t\hat{j}$। কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক অনুযায়ী পাই:

$x = t^2 - 1 \quad -(i)$

$y = 2t \Rightarrow t = \frac{y}{2} \quad -(ii)$

সমীকরণ **(ii)** থেকে t এর মান সমীকরণ **(i)**-এ বসিয়ে পাই:

$x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2}{4} - 1$

$\Rightarrow y^2 = 4(x+1)$

এটি $y^2 = 4aX$ আকারের একটি আদর্শ পরাবৃত্তের সমীকরণ, যেখানে $X = x+1$ এবং $a = 1$। যেহেতু সঞ্চারপথের সমীকরণটি এই আকারে প্রকাশ করা যায়, সেহেতু কণাটির গতিপথ একটি পরাবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

উপকেন্দ্র **(Focus)** নির্ণয়:

আদর্শ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(X, y) = (a, 0)$।

$x + 1 = a \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

$y = 0$

অতএব, পরাবৃত্তটির উপকেন্দ্র হলো মূলবিন্দু $(0,0)$।

নিয়ামকের **(Directrix)** সমীকরণ নির্ণয়:

নিয়ামকের সমীকরণ $X = -a$:

$x + 1 = -1 \Rightarrow x + 2 = 0$

উত্তর: উপকেন্দ্র $(0,0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x + 2 = 0$

৩৬. যেহেতু ভেক্টর $\vec{A}$ এর মান ধ্রুবক, তাই: $|\vec{A}| = A = \text{constant}$

আমরা জানি, যেকোনো ভেক্টরের নিজের সাথে ডট গুণফল তার মানের বর্গের সমান: $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = A^2 = \text{constant}$

উভয় পক্ষকে সময়ের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করি: $\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = \frac{d}{dt}(A^2)$

ডট গুণফলের অন্তরীকরণের গুণন সূত্র প্রয়োগ করে পাই: $\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$

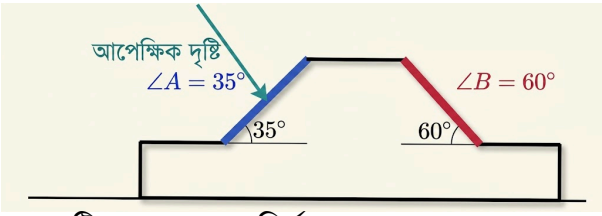
যেহেতু ডট গুণফল বিনিময় নিয়ম মেনে চলে ($\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$):

$2\left(\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$

যেহেতু দুটি অশুন্য ভেক্টরের ডট গুণফল শূন্য, সেহেতু ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

অতএব, $\frac{d\vec{A}}{dt}$ ভেক্টরটি সর্বদা $\vec{A}$ এর উপর লম্ব। **(প্রমাণিত)**

৩৭.



(ক) বৃষ্টির প্রকৃত বেগ নির্ণয়:
গাড়ি ও বাতাস একই অভিমুখে গতিশীল। গাড়ির সাপেক্ষে বাতাসের আপেক্ষিক অনুভূমিক বেগ:

$$v_{rel,x} = v_{wind} - v_{car} = 2 - 12 = -10 \text{ m/s}$$

ধরি, বৃষ্টির প্রকৃত খাড়া নিচের দিকের বেগ $= V_r$।
গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ অনুভূমিকের সাথে 35° কোণ উৎপন্ন করে (যেহেতু এটি 35° কোণে থাকা সামনের কাচে লম্বভাবে আপতিত হয়):

$$\tan 35^\circ = \frac{\text{Horizontal relative velocity}}{\text{Vertical velocity}} = \frac{10}{V_r}$$

$$\Rightarrow V_r = \frac{10}{\tan 35^\circ} \approx 14.28 \text{ m/s}$$

অতএব, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ খাড়া নিচের দিকে 14.28 m/s।

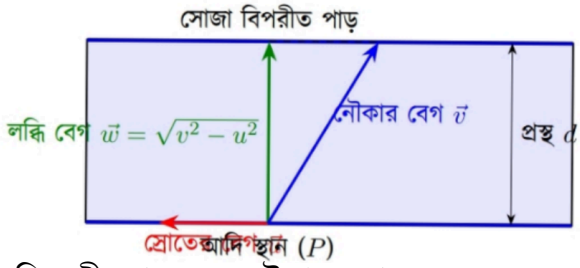
(খ) পিছনের কাচে বৃষ্টি আঘাত করবে কি না তার বিশ্লেষণ:
গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক গতিপথ অনুভূমিকের সাথে 35° কোণ তৈরি করে। অর্থাৎ, উলম্বের সাথে এই কোণটি হলো:

$$\theta = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

পিছনের কাচটি অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে হেলানো আছে, যার উলম্বের সাথে কোণ $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$।
পিছনের কাচে বৃষ্টি সরাসরি না আঘাত করার জন্য আপেক্ষিক বৃষ্টির কোণ উলম্বের সাথে 30° এর বেশি হতে হবে।
যেহেতু আপেক্ষিক বৃষ্টির উলম্ব কোণ $55^\circ > 30^\circ$, সেহেতু বৃষ্টির ফোঁটা সরাসরি পিছনের কাচে আঘাত করবে না।

উত্তর: (ক) 14.28 m/s; **(খ)** পিছনের কাচে সরাসরি আঘাত করবে না।

৩৮.



ধরি, নদীর প্রস্থ = d, নৌকার বেগ = $v = 2\ m/s$ এবং স্রোতের বেগ = u।

১. ন্যূনতম বা সোজা সুজি পথে নদী পারাপারের ক্ষেত্রে:

সোজা সুজি নদী পার হতে লব্ধি বেগের দিক স্রোতের সাথে 90° হতে হবে। এই ক্ষেত্রে লব্ধি বেগ $w = \sqrt{v^2 - u^2}$।

অতএব, ন্যূনতম পথে নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়:

$t = \frac{d}{w} = \frac{d}{\sqrt{v^2-u^2}} \quad -(i)$

২. স্রোত না থাকলে সোজাসুজি পারাপারের ক্ষেত্রে:

স্রোত না থাকলে নৌকাটি সরাসরি v বেগে অপর পাড়ে যাবে। প্রয়োজনীয় সময়:

$t' = \frac{d}{v} \quad -(ii)$

শর্তানুসারে, স্রোতযুক্ত ন্যূনতম পথের সময় স্রোতবিহীন সময়ের দ্বিগুণ ($t = 2t'$ বা $t' = \frac{1}{2}t$):

$\frac{d}{v} = \frac{d}{2\sqrt{v^2-u^2}}$

উভয় পক্ষ থেকে d বাদ দিয়ে এবং বর্গ করে পাই:

$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{4(v^2-u^2)}$

$\Rightarrow 4v^2 - 4u^2 = v^2$

$\Rightarrow 3v^2 = 4u^2 \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}v$

দেওয়া আছে, নৌকার বেগ $v = 2\ m/s$। মানটি বসিয়ে পাই:

$u = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}\ m/s \approx 1.732\ m/s$

উত্তর: $\sqrt{3}\ m/s$ **(বা** $1.732\ m/s$**)**

৩৯. **১.** তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয়:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{i}\cos\omega t + \hat{j}\sin\omega t) = -\omega\sin\omega t\hat{i} + \omega\cos\omega t\hat{j}$$

২. তাৎক্ষণিক ত্বরণ নির্ণয়:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega\sin\omega t\hat{i} + \omega\cos\omega t\hat{j}) = -\omega^2\cos\omega t\hat{i} - \omega^2\sin\omega t\hat{j} = -\omega^2\vec{r}$$

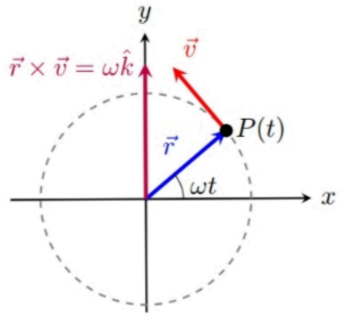
৩. ক্রস গুণফল $(\vec{r}\times\vec{v})$ নির্ণয়:

$$\vec{r}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}[\cos\omega t(\omega\cos\omega t) - \sin\omega t(-\omega\sin\omega t)]$$

$$= \hat{k}(\omega\cos^2\omega t + \omega\sin^2\omega t) = \omega\hat{k}(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = \omega\hat{k}$$

যেহেতু ω এবং একক ভেক্টর $\hat{k}$ উভয়ই সময়-স্বাধীন ধ্রুবক, তাই $\vec{r}\times\vec{v} = \omega\hat{k}$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর। **(দেখানো হলো)**



৪০. ধরি, নতুন ভেক্টর $\vec{A} = \vec{\gamma} - c\vec{\alpha} - d\vec{\beta}$।
$\vec{A} = (5\hat{i} + 8\hat{k}) - c(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) - d(-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$
$\vec{A} = (5 - c + d)\hat{i} - (c + 2d)\hat{j} + (8 + 2c - 3d)\hat{k}$

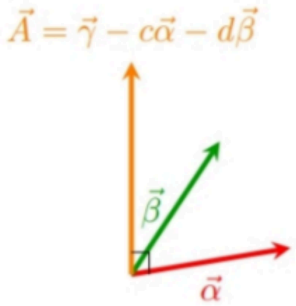
যেহেতু $\vec{A}$ ভেক্টরটি $\vec{\alpha}$ এর উপর লম্ব:
$\vec{A} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Rightarrow 1(5 - c + d) + 1(-c - 2d) - 2(8 + 2c - 3d) = 0$
$\Rightarrow 5 - c + d - c - 2d - 16 - 4c + 6d = 0$
$\Rightarrow -6c + 5d = 11 \quad -(i)$

আবার, যেহেতু $\vec{A}$ ভেক্টরটি $\vec{\beta}$ এর উপর লম্ব:
$\vec{A} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow -1(5 - c + d) + 2(-c - 2d) + 3(8 + 2c - 3d) = 0$
$\Rightarrow -5 + c - d - 2c - 4d + 24 + 6c - 9d = 0$
$\Rightarrow 5c - 14d = -19 \quad -(ii)$

সমীকরণ **(i)** থেকে পাই, $d = \frac{6c+11}{5}$। এটি সমীকরণ **(ii)**-এ বসিয়ে পাই:
$5c - 14\left(\frac{6c+11}{5}\right) = -19$
$\Rightarrow 25c - 84c - 154 = -95$
$\Rightarrow -59c = 59 \Rightarrow c = -1$

c এর মান সমীকরণে বসিয়ে পাই:
$d = \frac{6(-1)+11}{5} = 1$

উত্তর: $c = -1$ এবং $d = 1$



৪১. এখানে, $-\frac{d[NH_3]}{dt} = 0.24\,molL^{-1}s^{-1}$
বিক্রিয়ার হার, $r = -\frac{1}{4}\frac{d[NH_3]}{dt} = \frac{0.24}{4} = 0.06\,molL^{-1}s^{-1}$
O_2-এর **disappearance rate** $= 5r = 5 \times 0.06 = 0.30\,molL^{-1}s^{-1}$
NO-এর **formation rate** $= 4r = 4 \times 0.06 = 0.24\,molL^{-1}s^{-1}$
অতএব, H_2O-এর **formation rate** $= 6r = 6 \times 0.06 = 0.36\,molL^{-1}s^{-1}$

৪২. এখানে, $k_1 = 4.0 \times 10^{-3}\,s^{-1}$ **(310 K),** $k_2 = 2.0 \times 10^{-2}\,s^{-1}$ **(340 K)**
$\frac{k_2}{k_1} = 5.0 \implies \ln 5 = 1.6094$
আবার, $\frac{1}{310} - \frac{1}{340} = 2.8463 \times 10^{-4}\,K^{-1}$
সুতরাং, $E_a = \frac{8.314 \times 1.6094}{2.8463 \times 10^{-4}} = 47011\,Jmol^{-1}$
অতএব, $E_a \approx 47.0\,kJmol^{-1}$

৪৩. এখানে, $\log k$ বনাম $\frac{1}{T}$ ঢাল $= -\frac{E_a}{2.303R} = -2500\,K$
সুতরাং, $E_a = 2500 \times 2.303 \times R = 2500 \times 2.303 \times 8.314$
$E_a = 47868\,Jmol^{-1}$
অতএব, $E_a \approx 47.9\,kJmol^{-1}$

৪৪. এখানে, $\mu = 2$ প্রতি $10^\circ C$
$r_{27} = 3.0 \times 10^{-4}\,mol L^{-1} s^{-1}$
$27^\circ C \to 57^\circ C =$ তিনটি $10^\circ C$ ধাপ
মোট গুণক $= 2^3 = 8$
অতএব, $r_{57} = 3.0 \times 10^{-4} \times 8 = 2.4 \times 10^{-3}\,mol L^{-1} s^{-1}$

৪৫. এখানে, $E_{a1} = 100\,kJ mol^{-1}, E_{a2} = 70\,kJ mol^{-1}, T = 298\,K$
$\frac{k_2}{k_1} = \exp\left[\frac{E_{a1}-E_{a2}}{RT}\right] = \exp\left[\frac{30000}{8.314\times298}\right]$
$= \exp(12.11) \approx 1.81 \times 10^5$
অতএব, $\frac{k_2}{k_1} \approx 1.81 \times 10^5$

৪৬. এখানে, $[CO] = 0.20, [Cl_2] = 0.10, [COCl_2] = 0.40\,M$
$K_c = \frac{[COCl_2]}{[CO][Cl_2]} = \frac{0.40}{0.20\times0.10} = \frac{0.40}{0.02}$
অতএব, $K_c = 20$

৪৭. এখানে, প্রাথমিক $HI = 1.00\,mol, V = 1.0\,L$; সাম্যাবস্থায় $HI = 0.40\,mol$
HI বিক্রিয়া করেছে $= 1.00 - 0.40 = 0.60\,mol$
স্টয়কিওমিতি $(2:1:1)$ অনুযায়ী, $H_2 = I_2 = \frac{0.60}{2} = 0.30\,mol$
ঘনমাত্রা $(V = 1.0\,L)$: $[HI] = 0.40\,M, [H_2] = [I_2] = 0.30\,M$
সুতরাং, $K_c = \frac{[H_2][I_2]}{[HI]^2} = \frac{0.30\times0.30}{(0.40)^2} = \frac{0.09}{0.16}$
অতএব, $K_c = 0.5625$

৪৮. এখানে, প্রাথমিক $N_2O_4 = 0.50\,mol, V = 2.0\,L$, 40% বিয়োজিত
বিয়োজিত $N_2O_4 = 0.40 \times 0.50 = 0.20\,mol$; NO_2 উৎপন্ন $= 2 \times 0.20 = 0.40\,mol$
সাম্যাবস্থায়, $N_2O_4 = 0.50 - 0.20 = 0.30\,mol, NO_2 = 0.40\,mol$
ঘনমাত্রা $(\div 2.0\,L)$: $[N_2O_4] = 0.15\,M, [NO_2] = 0.20\,M$
সুতরাং, $K_c = \frac{[NO_2]^2}{[N_2O_4]} = \frac{(0.20)^2}{0.15} = \frac{0.04}{0.15}$
অতএব, $K_c \approx 0.267$

৪৯. এখানে, $P(H_2) = 0.20, P(Cl_2) = 0.30, P(HCl) = 1.20\,atm$
$K_p = \frac{P(HCl)^2}{P(H_2)P(Cl_2)} = \frac{(1.20)^2}{0.20\times0.30} = \frac{1.44}{0.06} = 24.0$
$\Delta n = 2 - 2 = 0$, তাই $K_c = K_p$ (তাপমাত্রা নির্বিশেষে)
অতএব, $K_p = 24.0$; $K_c = 24.0$ ($350\,K$-তেও একই)

৫০. এখানে, $K_c = 2.5, \Delta n = 2, T = 600\,K$
$RT = 0.0821 \times 600 = 49.26$
$K_p = K_c(RT)^2 = 2.5 \times (49.26)^2 = 2.5 \times 2426.5 = 6066.3$
বিপরীত বিক্রিয়া: $K_c' = \frac{1}{K_c} = \frac{1}{2.5} = 0.40$; $K_p' = \frac{1}{K_p} = \frac{1}{6066.3}$
অতএব, $K_p \approx 6066$; বিপরীত বিক্রিয়ায় $K_c' = 0.40, K_p' \approx 1.65 \times 10^{-4}$

৫১. এখানে, $K_p = 0.50, P(SO_3) = 2\,atm, P(SO_2) = 1\,atm$
$K_p = \frac{P(SO_2)^2 \cdot P(O_2)}{P(SO_3)^2}$
$0.50 = \frac{(1)^2 \times P(O_2)}{(2)^2} \implies 0.50 = \frac{P(O_2)}{4}$
অতএব, $P(O_2) = 2.0\,atm$

৫২. এখানে, $K_p = 0.60\,\text{atm}$
$K_p = P(CO_2)$ **(কঠিন পদার্থ বাদ)** $\implies P(CO_2) = 0.60\,\text{atm}$
$CaCO_3$-এর কিছু অংশ অপসারণ করলে **(যতক্ষণ কিছু কঠিন অবশিষ্ট থাকে)** K_p ও $P(CO_2)$-এর কোনো পরিবর্তন হবে না, কারণ কঠিনের পরিমাণ **expression**-এ নেই
অতএব, $P(CO_2) = 0.60\,\text{atm}$**;** কঠিন অপসারণে **equilibrium pressure** অপরিবর্তিত থাকবে

৫৩. এখানে, $n(H_2) = 0.50, n(CO_2) = 0.40, n(H_2O) = 0.30, n(CO) = 0.20\,\text{mol}; V = 2.0\,\text{L}$
ঘনমাত্রা **(**$\div 2.0\,\text{L}$**):** $[H_2] = 0.25, [CO_2] = 0.20, [H_2O] = 0.15, [CO] = 0.10\,\text{M}$
সুতরাং, $K_c = \frac{[H_2O][CO]}{[H_2][CO_2]} = \frac{0.15\times0.10}{0.25\times0.20} = \frac{0.015}{0.05}$
অতএব, $K_c = 0.30$

৫৪. এখানে, $\Delta n(\text{forward}) = 2 - 3 = -1, \Delta H < 0$ **(exothermic)**
চাপ বাড়ালে সাম্য কম মোলসংখ্যার **(**SO_3**, forward)** দিকে সরে যাবে $\rightarrow SO_3$ বৃদ্ধি
SO_3 যোগ করলে সাম্য **reverse** দিকে সরে যাবে **(**অতিরিক্ত **product** কমাতে**)** $\rightarrow$ সাময়িকভাবে SO_3 কিছুটা কমবে যতক্ষণ না নতুন সাম্য প্রতিষ্ঠিত হয়
তাপমাত্রা কমালে **exothermic** বিক্রিয়ার সাম্য **forward** দিকে সরে যাবে $\rightarrow SO_3$ আরও বৃদ্ধি পাবে
অতএব, সামগ্রিকভাবে তিনটি পরিবর্তনই **(**SO_3 যোগ ছাড়া**) forward** দিকে সাম্য সরিয়ে SO_3-এর উৎপাদন বাড়ায়

৫৫. এখানে, $K_c = 5.0 \times 10^{-3}, K_p = 0.20, T = 300\,\text{K}$
$\frac{K_p}{K_c} = (RT)^{\Delta n} = \frac{0.20}{0.005} = 40$
আবার, $RT = 0.0821 \times 300 = 24.63$
সুতরাং, $\Delta n = \frac{\ln 40}{\ln 24.63} = \frac{3.689}{3.204} \approx 1.15$
অতএব, $\Delta n \approx 1$ **(নিকটতম পূর্ণসংখ্যা)**

৫৬. এখানে, $K_p = 1.44\,\text{atm}^2, T = 400\,\text{K}$
$\Delta n = 2$ **(কঠিন বাদে)**
$RT = 0.0821 \times 400 = 32.84; (RT)^2 = 1078.5$
সুতরাং, $K_c = \frac{K_p}{(RT)^2} = \frac{1.44}{1078.5}$
অতএব, $K_c \approx 1.34 \times 10^{-3}$

৫৭. এখানে, $k_1 = 1.0 \times 10^{-3}$ **(**$300\,\text{K}$**),** $k_2 = 8.0 \times 10^{-3}$ **(**$350\,\text{K}$**)**
$\frac{k_2}{k_1} = 8.0 \implies \ln 8 = 2.0794$
আবার, $\frac{1}{300} - \frac{1}{350} = 4.7619 \times 10^{-4}\,\text{K}^{-1}$
সুতরাং, $E_a = \frac{8.314\times2.0794}{4.7619\times10^{-4}} = 36306\,\text{Jmol}^{-1} \approx 36.3\,\text{kJmol}^{-1}$
অতএব, $k_{325} = k_{300} \times \exp\left[\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{325}\right)\right] = 1.0 \times 10^{-3} \times \exp(1.120) = 1.0 \times 10^{-3} \times 3.065 \approx 3.06 \times 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$

৫৮. একমুখী **(irreversible)** বিক্রিয়া শুধু একদিকে সম্পূর্ণভাবে অগ্রসর হয় এবং **reactant** প্রায় সম্পূর্ণ **product**-এ রূপান্তরিত হয় — যেমন জ্বালানির দহন: $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$।
উভমুখী **(reversible)** বিক্রিয়া **forward** ও **reverse** উভয় দিকে ঘটে এবং সাম্যাবস্থায় পৌঁছায় — যেমন $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$।
অতএব, কোনো **product**-কে ক্রমাগত অপসারণ করলে **(**যেমন গ্যাস হিসেবে বের হয়ে যাওয়া, অধঃক্ষেপ গঠন, বা খোলা পাত্রে বিক্রিয়া করানো**) Le Chatelier** নীতি অনুযায়ী সাম্য বারবার **forward** দিকে সরে যায়, ফলে **reversible** বিক্রিয়া কার্যত সম্পূর্ণ **(practically irreversible)** হয়ে যায়।

৫৯. **Homogeneous equilibrium**-এ সকল বিক্রিয়ক ও উৎপাদ একই দশায় **(phase)** থাকে — উদাহরণ: $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$, সবগুলোই গ্যাসীয়, তাই সব পদার্থ K_c/K_p **expression**-এ অন্তর্ভুক্ত হয়। **Heterogeneous equilibrium**-এ বিভিন্ন দশার পদার্থ উপস্থিত থাকে — উদাহরণ: $CaCO_3(s) \rightleftharpoons CaO(s) + CO_2(g)$।
অতএব, খাঁটি কঠিন ও খাঁটি তরল পদার্থের ঘনমাত্রা **(activity)** ধ্রুবক $(= 1)$ ধরা হয়, তাই এগুলো **expression**-এ লেখা হয় না — উপরের উদাহরণে শুধু $K_p = P(CO_2)$ লেখা হয়, $CaCO_3$ বা CaO নয়।

৬০. সাম্যাবস্থায় $\text{rate}_{\text{forward}} = \text{rate}_{\text{reverse}}$, অর্থাৎ $k_f[\text{reactants}]^m = k_r[\text{products}]^n$।
যেহেতু k_f ও k_r সাধারণত ভিন্ন মানের হয় (প্রতিটি বিক্রিয়ার নিজস্ব সক্রিয়ণ শক্তি ও **pre-exponential factor** থাকে), তাই $[\text{reactants}]$ ও $[\text{products}]$-এর মান সমান হতে হবে এমন কোনো বাধ্যবাধকতা নেই।
অতএব, $K_c = \frac{k_f}{k_r} = \frac{[\text{products}]}{[\text{reactants}]}$ অনুপাত নির্ধারণ করে — K_c বড় হলে **product** বেশি, ছোট হলে **reactant** বেশি থাকে, কিন্তু উভয় ক্ষেত্রেই **forward** ও **reverse**-এর হার সমান থাকে।