P-01_Q-01

১০ নম্বর

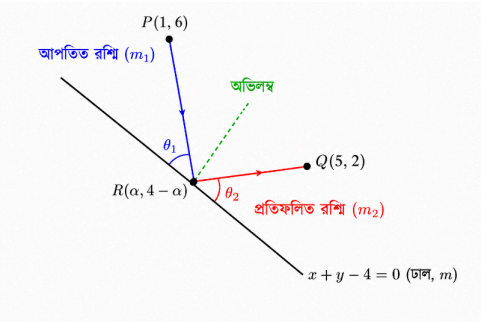
১. ধরি, আয়নার সমীকরণ $AB : x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -x + 4$

$\therefore$ আয়নার ঢাল, $m = -1$

ধরি, আয়নার উপর আপতন বিন্দু $R(\alpha, 4 - \alpha)$

আপতিত রশ্মি $P(1, 6)$ বিন্দু হতে এসে R বিন্দুতে পড়ে। সুতরাং আপতিত রশ্মির ঢাল: $m_1 = \frac{(4-\alpha)-6}{\alpha-1} = \frac{-\alpha-2}{\alpha-1}$

প্রতিফলিত রশ্মি R থেকে $Q(5, 2)$ বিন্দু দিয়ে যায়। সুতরাং প্রতিফলিত রশ্মির ঢাল: $m_2 = \frac{2-(4-\alpha)}{5-\alpha} = \frac{\alpha-2}{5-\alpha}$ প্রতিফলনের



সূত্রানুসারে, আপতন কোণ = প্রতিফলন কোণ।

জ্যামিতিকভাবে, আপতিত রশ্মি ও আয়নার মধ্যবর্তী কোণ (θ_1) এবং আয়না ও প্রতিফলিত রশ্মির মধ্যবর্তী কোণ (θ_2) পরস্পর সমান হবে।

অর্থাৎ, $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\Rightarrow \frac{m-m_1}{1+m\cdot m_1} = \frac{m_2-m}{1+m_2\cdot m}$ (ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিক বিবেচনা করে)

$\Rightarrow \frac{-1-m_1}{1+(-1)m_1} = \frac{m_2-(-1)}{1+m_2(-1)}$

$\Rightarrow \frac{-(1+m_1)}{1-m_1} = \frac{m_2+1}{1-m_2}$

$\Rightarrow -(1 + m_1)(1 - m_2) = (m_2 + 1)(1 - m_1)$

$\Rightarrow -1 + m_2 - m_1 + m_1m_2 = 1 - m_1 + m_2 - m_1m_2$

$\Rightarrow 2m_1m_2 = 2$

$\Rightarrow m_1m_2 = 1$

এবার m_1 ও m_2 এর মান বসিয়ে পাই: $\left(\frac{-\alpha-2}{\alpha-1}\right)\left(\frac{\alpha-2}{5-\alpha}\right) = 1$

$\Rightarrow -(\alpha^2 - 4) = (\alpha - 1)(5 - \alpha)$

$\Rightarrow -\alpha^2 + 4 = 5\alpha - \alpha^2 - 5 + \alpha$

$\Rightarrow 6\alpha = 9$

$\Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

তাহলে, আপতিত রশ্মির ঢাল, $m_1 = \frac{-\frac{3}{2}-2}{\frac{3}{2}-1} = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = -7$

(এবং প্রতিফলিত রশ্মির ঢাল, $m_2 = \frac{1}{m_1} = -\frac{1}{7}$)

$\therefore P(1, 6)$ বিন্দুগামী আপতিত রশ্মির সমীকরণ: $y - 6 = -7(x - 1) \Rightarrow 7x + y - 13 = 0$

$\therefore Q(5, 2)$ বিন্দুগামী প্রতিফলিত রশ্মির সমীকরণ: $y - 2 = -\frac{1}{7}(x - 5) \Rightarrow x + 7y - 19 = 0$

P-01_Q-02

১০ নম্বর

২. ধরি, যে রেখা বরাবর দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে তার ঢাল $m = 1$

$\therefore \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$

সুতরাং, $(2, 3)$ বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্নকারী রেখার প্যারামেট্রিক সমীকরণ:

$\frac{x-2}{\cos 45°} = \frac{y-3}{\sin 45°} = r$ (যেখানে r হলো নির্ণেয় দূরত্ব)

$\Rightarrow \frac{x-2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = r$

$\therefore x = 2 + \frac{r}{\sqrt{2}}$ এবং $y = 3 + \frac{r}{\sqrt{2}}$

যেহেতু এই বিন্দুটি $2x + y - 12 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত, মানগুলো বসিয়ে পাই: $2\left(2 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) + \left(3 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - 12 = 0$

$\Rightarrow 4 + \sqrt{2}r + 3 + \frac{r}{\sqrt{2}} = 12$

$\Rightarrow 7 + r\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 12$

$\Rightarrow r\left(\frac{2+1}{\sqrt{2}}\right) = 5$

$\Rightarrow \frac{3r}{\sqrt{2}} = 5$

$\Rightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ একক।

P-02_Q-03 ১০ নম্বর

৩. ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র হলো শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দু।
এখানে, ভূমি BC রেখাটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত (যেহেতু উভয়ের কোটি 0)
সুতরাং, $A(3, 4)$ বিন্দু হতে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বটি হবে y-অক্ষের সমান্তরাল।
$\therefore$ A হতে অঙ্কিত লম্বের সমীকরণ: $x = 3$ **..... (i)**
আবার, AC রেখার ঢাল, $m_{AC} = \frac{4-0}{3-6} = -\frac{4}{3}$
যেহেতু B হতে অঙ্কিত লম্ব AC এর উপর লম্ব, তাই এর ঢাল হবে $m = \frac{3}{4}$
$B(0, 0)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{3}{4}$ ঢালবিশিষ্ট লম্বের সমীকরণ: $y - 0 = \frac{3}{4}(x - 0)$
$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x$ **..... (ii)**
লম্বকেন্দ্র হবে **(i)** ও **(ii)** নং রেখার ছেদবিন্দু।
$x = 3$ সমীকরণ **(ii)**-এ বসিয়ে পাই, $y = \frac{3}{4}(3) = \frac{9}{4}$
$\therefore$ ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র: $\left(3, \frac{9}{4}\right)$

P-02_Q-04 ১০ নম্বর

৪. প্রদত্ত সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বই হবে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য।
বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \frac{|5-(-15)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4$ একক।
বর্গক্ষেত্রের অপর বাহু দুটি প্রদত্ত বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব হবে।
$3x - 4y = 0$ এর লম্ব রেখার সমীকরণ ধরি, $4x + 3y + k = 0$
যেহেতু তৃতীয় বাহুটি $(2, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায়, $\Rightarrow 4(2) + 3(3) + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -17$
$\therefore$ একটি বাহুর সমীকরণ: $4x + 3y - 17 = 0$
চতুর্থ বাহুটি এই বাহুর সমান্তরাল হবে। ধরি এর সমীকরণ $4x + 3y + k_2 = 0$
যেহেতু বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 4 একক, তাই এই দুটি সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব 4 হবে।
$\Rightarrow \frac{|k_2-(-17)|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|k_2+17|}{5} = 4$
$\Rightarrow k_2 + 17 = \pm 20$
(+) নিয়ে পাই, $k_2 = 20 - 17 = 3$
(−) নিয়ে পাই, $k_2 = -20 - 17 = -37$
$\therefore$ অপর বাহু দুটির সমীকরণ হবে: $4x + 3y - 17 = 0$ এবং $4x + 3y + 3 = 0$
অথবা, $4x + 3y - 17 = 0$ এবং $4x + 3y - 37 = 0$
ব্যাখ্যা:

P-03_Q-05 ১০ নম্বর

৫. প্রথমে রেখাদ্বয়ের ধ্রুবকপদ ধনাত্মক করে লিখি: $-3x - 4y + 11 = 0$ এবং $-12x + 5y + 2 = 0$
এখানে, $a_1 = -3, b_1 = -4$ এবং $a_2 = -12, b_2 = 5$
এখন, $a_1a_2 + b_1b_2 = (-3)(-12) + (-4)(5) = 36 - 20 = 16$
যেহেতু $a_1a_2 + b_1b_2 > 0$, তাই ধনাত্মক (+) চিহ্ন নিয়ে স্থূলকোণের এবং ঋণাত্মক (−) চিহ্ন নিয়ে সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডক পাওয়া যাবে।

সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $\frac{-3x-4y+11}{\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}} = -\frac{-12x+5y+2}{\sqrt{(-12)^2+5^2}}$

$\Rightarrow \frac{-3x-4y+11}{5} = \frac{12x-5y-2}{13}$

$\Rightarrow 13(-3x-4y+11) = 5(12x-5y-2)$

$\Rightarrow -39x-52y+143 = 60x-25y-10$

$\Rightarrow 99x+27y-153 = 0$

$\Rightarrow 11x+3y-17 = 0$ **(৯ দ্বারা ভাগ করে)**

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $11x+3y-17 = 0$

P-03_Q-06 ১০ নম্বর

৬. ধরি, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $G(\alpha, \beta)$

ভরকেন্দ্রের সূত্রানুসারে, $\alpha = \frac{2+0+x}{3} \Rightarrow x = 3\alpha-2$

এবং $\beta = \frac{0+4+y}{3} \Rightarrow y = 3\beta-4$

দেওয়া আছে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= 12$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|2(4-y)+0(y-0)+x(0-4)| = 12$

$\Rightarrow |8-2y-4x| = 24$

$\Rightarrow |-4x-2y+8| = 24$

$\Rightarrow 2x+y-4 = \pm 12$ **(2 দ্বারা ভাগ করে)**

এখন x ও y এর মান প্রতিস্থাপন করে পাই: $2(3\alpha-2)+(3\beta-4)-4 = \pm 12$

$\Rightarrow 6\alpha-4+3\beta-4-4 = \pm 12$

$\Rightarrow 6\alpha+3\beta-12 = \pm 12$

$\Rightarrow 2\alpha+\beta-4 = \pm 4$ **(3 দ্বারা ভাগ করে)**

(+) নিয়ে: $2\alpha+\beta-4 = 4 \Rightarrow 2\alpha+\beta-8 = 0$

(−) নিয়ে: $2\alpha+\beta-4 = -4 \Rightarrow 2\alpha+\beta = 0$

$\therefore$ ভরকেন্দ্রের নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $2x+y-8 = 0$ অথবা $2x+y = 0$

P-04_Q-07 ১০ নম্বর

৭. আমরা জানি, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুই রম্বসটির কেন্দ্র।

সমীকরণদ্বয় সমাধান করে: কেন্দ্র $O(1, 2)$

প্রদত্ত শীর্ষবিন্দু $A(3, 6)$ কর্ণ $2x-y = 0$ এর উপর অবস্থিত **(যেহেতু $2(3)-6 = 0$)**

কেন্দ্র O থেকে A এর দূরত্ব, $d = OA = \sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\therefore$ ১ম কর্ণের দৈর্ঘ্য, $d_1 = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

ধরি, অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য d_2।

সমকোণী ত্রিভুজ ΔAOB-তে পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে, $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$ **(যেখানে বাহু $a = \sqrt{29}$)**

$\Rightarrow (2\sqrt{5})^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = (\sqrt{29})^2$

$\Rightarrow 20+\frac{d_2^2}{4} = 29$

$\Rightarrow \frac{d_2^2}{4} = 9$

$\Rightarrow d_2^2 = 36$

$\Rightarrow d_2 = 6$

রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 6 = 12\sqrt{5}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $12\sqrt{5}$ বর্গ একক।

P-04_Q-08 ১০ নম্বর

৮. প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু হলো $(2, 1)$।

$(2, 1)$ বিন্দুগামী যেকোনো সরলরেখার সমীকরণ: $y-1 = m(x-2)$

$\Rightarrow mx-y+(1-2m) = 0$ **..... (i)**

প্রশ্নমতে, মূলবিন্দু $(0, 0)$ হতে **(i)** নং রেখার লম্ব দূরত্ব $= 1$

$\Rightarrow \frac{|m(0)-0+1-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1$

$\Rightarrow \frac{|1-2m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$

$\Rightarrow (1-2m)^2 = m^2+1$

$\Rightarrow 1-4m+4m^2 = m^2+1$

$\Rightarrow 3m^2-4m = 0$

$\Rightarrow m(3m-4) = 0$

$\therefore m = 0$ অথবা $m = \frac{4}{3}$

m এর মান **(i)** নং এ বসিয়ে পাই:

$m = 0$ হলে, $-y+1 = 0 \Rightarrow y = 1$

$m = \frac{4}{3}$ হলে, $\frac{4}{3}x - y + \left(1-\frac{8}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4x-3y-5 = 0$

$\therefore$ সম্ভাব্য সমীকরণ: $y = 1$ এবং $4x-3y-5 = 0$

P-05_Q-09 ১০ নম্বর

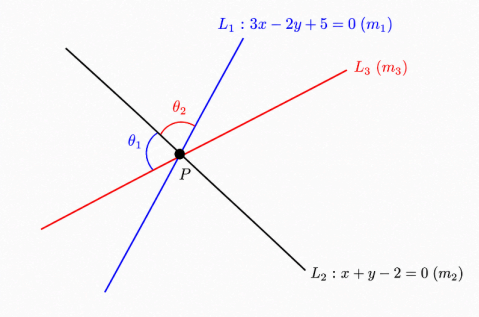
৯. ধরি, প্রতিফলক রেখা $L_2 : x+y-2 = 0 \Rightarrow y = -x+2$

$\therefore$ প্রতিফলকের ঢাল, $m_2 = -1$

প্রদত্ত বস্তুরেখা $L_1 : 3x-2y+5 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

$\therefore$ বস্তুরেখার ঢাল, $m_1 = \frac{3}{2}$

ধরি, আয়নার সাপেক্ষে L_1 রেখার প্রতিবিম্ব রেখাটি হলো L_3 এবং এর ঢাল m_3



প্রতিফলনের সূত্রানুসারে, বস্তুরেখা L_1 আয়নার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, প্রতিবিম্ব রেখা L_3-ও আয়নার সাথে ঠিক একই কোণ উৎপন্ন করবে।

অর্থাৎ, জ্যামিতিকভাবে $\theta_1 = \theta_2$ হবে।

$\therefore \tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\Rightarrow \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \frac{m_2-m_3}{1+m_2m_3}$ **(দিক বিবেচনায়)**

এখন $m_1 = \frac{3}{2}$ এবং $m_2 = -1$ মান বসিয়ে পাই: $\frac{\frac{3}{2}-(-1)}{1+\left(\frac{3}{2}\right)(-1)} = \frac{-1-m_3}{1+(-1)m_3}$

$\Rightarrow m_3 = \frac{2}{3}$

এখন রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $P\left(-\frac{1}{5}, \frac{11}{5}\right)$

প্রতিবিম্ব রেখাটি P বিন্দুগামী এবং এর ঢাল $m_3 = \frac{2}{3}$

সুতরাং, নির্ণেয় রেখার সমীকরণ: $y-\frac{11}{5} = \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{5}\right)$

$\therefore$ প্রতিবিম্ব রেখার সমীকরণ: $2x-3y+7 = 0$

P-05_Q-10 ১০ নম্বর

১০. ধরি, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1$

রেখাটি $(2, 3)$ বিন্দুগামী হওয়ায়: $\frac{2}{a}+\frac{3}{b} = 1$ ..... **(i)**

অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খণ্ডিত অংশের প্রান্তবিন্দু দুটি হলো $A(a, 0)$ এবং $B(0, b)$।

ধরি, খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দু $M(x, y)$

$\therefore x = \frac{a+0}{2} \Rightarrow a = 2x$ এবং $y = \frac{0+b}{2} \Rightarrow b = 2y$

a ও b এর মান **(i)** নং এ বসিয়ে পাই: $\frac{2}{2x}+\frac{3}{2y} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{3}{2y} = 1$

$\Rightarrow 2y + 3x = 2xy$

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ: $3x + 2y - 2xy = 0$

অক্ষদ্বয়ের সাথে উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}ab$

সমীকরণ **(i)** হতে পাই, $b = \frac{3a}{a-2}$

$\therefore \Delta = \frac{1}{2}a\left(\frac{3a}{a-2}\right) = \frac{3a^2}{2(a-2)}$

a এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{d\Delta}{da} = \frac{3}{2}\left[\frac{(a-2)\cdot 2a - a^2\cdot 1}{(a-2)^2}\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{2a^2-4a-a^2}{(a-2)^2}\right) = \frac{3(a^2-4a)}{2(a-2)^2}$

ক্ষেত্রফল ন্যূনতম হওয়ার শর্তানুসারে, $\frac{d\Delta}{da} = 0$

$\Rightarrow a^2 - 4a = 0$

যেহেতু ত্রিভুজ গঠিত হয়, $a = 0$ হবে না। সুতরাং $a = 4$

এখন ২য় অন্তরজ যাচাই করি: $\frac{d^2\Delta}{da^2} = \frac{3}{2}\frac{d}{da}\left(\frac{a^2-4a}{(a-2)^2}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{(2a-4)(a-2)^2 - (a^2-4a)\cdot 2(a-2)}{(a-2)^4}\right]$

$a = 4$ হলে, $\left.\frac{d^2\Delta}{da^2}\right|_{a=4} = \frac{3}{2}\left[\frac{4(4)-0}{16}\right] = \frac{3}{2} > 0$

যেহেতু ২য় অন্তরজ ধনাত্মক, তাই $a = 4$ এর জন্য ক্ষেত্রফল ন্যূনতম হবে।

$a = 4$ হলে, $b = \frac{3(4)}{4-2} = \frac{12}{2} = 6$

$\therefore$ ন্যূনতম ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$ বর্গ একক।

P-06_Q-11 ১০ নম্বর

১১. আমরা জানি, $P(x, y)$, $A(3, 4)$ এবং $B(-2, 1)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}|x(4-1) + 3(1-y) + (-2)(y-4)|$

প্রশ্নমতে, ক্ষেত্রফল $= 10$ বর্গ একক

$\therefore \frac{1}{2}|3x + 3 - 3y - 2y + 8| = 10$

$\Rightarrow |3x - 5y + 11| = 20$

$\Rightarrow 3x - 5y + 11 = \pm 20$

(+) নিয়ে: $3x - 5y + 11 = 20 \Rightarrow 3x - 5y - 9 = 0$

(−) নিয়ে: $3x - 5y + 11 = -20 \Rightarrow 3x - 5y + 31 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $3x - 5y - 9 = 0$ অথবা $3x - 5y + 31 = 0$

P-06_Q-12 ১০ নম্বর

১২. প্রথম দুটি রেখার ছেদবিন্দু $(2, 1)$।

যেহেতু রেখাত্রয় সমবিন্দু, তাই $(2, 1)$ বিন্দুটি $kx - 3y + 1 = 0$ রেখাকেও সিদ্ধ করবে।

$\therefore k(2) - 3(1) + 1 = 0$

$\Rightarrow k = 1$

এখন, $4x + 3y - 7 = 0$ রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ ধরি, $3x - 4y + c = 0$ **..... (iii)**

এই রেখাটি $(2, 1)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 3(2) - 4(1) + c = 0$

$\Rightarrow c = -2$

c এর মান **(iii)** নং এ বসিয়ে পাই: $3x - 4y - 2 = 0$

$\therefore k = 1$ এবং নির্ণেয় লম্ব রেখার সমীকরণ $3x - 4y - 2 = 0$

P-07_Q-13 ১০ নম্বর

১৩. ধরি, রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $P(\alpha, \beta)$

যেহেতু ছেদবিন্দুটি $x + y - 3 = 0$ রেখার ওপর অবস্থিত, $\therefore \alpha + \beta - 3 = 0 \Rightarrow \beta = 3 - \alpha$

$L(2, -3)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল: $m_1 = \frac{\beta-(-3)}{\alpha-2} = \frac{(3-\alpha)+3}{\alpha-2} = \frac{6-\alpha}{\alpha-2}$

$M(-1, 5)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল: $m_2 = \frac{\beta-5}{\alpha-(-1)} = \frac{(3-\alpha)-5}{\alpha+1} = \frac{-\alpha-2}{\alpha+1}$

যেহেতু রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব, তাই তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হবে। $\therefore m_1 m_2 = -1$

$\Rightarrow \frac{6-\alpha}{\alpha-2} \cdot \frac{-\alpha-2}{\alpha+1} = -1$

$\Rightarrow (6 - \alpha)(-\alpha - 2) = -(\alpha - 2)(\alpha + 1)$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 12 = -\alpha^2 + \alpha + 2$

$\Rightarrow 2\alpha^2 - 5\alpha - 14 = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণটি সমাধান করে পাই: $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-14)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+112}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{137}}{4}$

$\therefore \alpha \approx 4.176$ অথবা $\alpha \approx -1.676$

এখন α এর মান ব্যবহার করে L রেখার ঢাল m_1 নির্ণয় করি ($m_1 = \frac{6-\alpha}{\alpha-2}$):

$\alpha = 4.176$ হলে, $m_1 = \frac{6-4.176}{4.176-2} = \frac{1.824}{2.176} \approx 0.838$

$\alpha = -1.676$ হলে, $m_1 = \frac{6-(-1.676)}{-1.676-2} = \frac{7.676}{-3.676} \approx -2.088$

$\therefore L(2, -3)$ বিন্দুগামী নির্ণেয় রেখার সমীকরণ ($y - y_1 = m_1(x - x_1)$):

১ম ক্ষেত্রে ($m_1 = 0.838$): $y - (-3) = 0.838(x - 2) \Rightarrow y + 3 = 0.838x - 1.676 \Rightarrow 0.838x - y - 4.676 = 0$

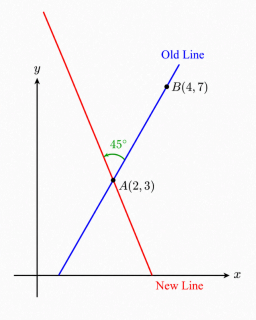
২য় ক্ষেত্রে ($m_1 = -2.088$): $y - (-3) = -2.088(x - 2) \Rightarrow y + 3 = -2.088x + 4.176 \Rightarrow 2.088x + y - 1.176 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $0.838x - y - 4.676 = 0$ অথবা $2.088x + y - 1.176 = 0$

ব্যাখ্যা:

P-07_Q-14 ১০ নম্বর

১৪. প্রথমে AB রেখার ঢাল (m_1) নির্ণয় করি: $m_1 = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$



ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে $\theta = 45°$ কোণে ঘোরালে নতুন রেখার ঢাল m_2 হলে: $m_2 = \frac{m_1 + \tan 45°}{1 - m_1 \tan 45°}$

$\Rightarrow m_2 = \frac{2+1}{1-2(1)} = \frac{3}{-1} = -3$

নতুন রেখাটি $A(2, 3)$ বিন্দু দিয়েই যাবে। সুতরাং, -3 ঢালবিশিষ্ট এবং $(2, 3)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ: $y - 3 = -3(x - 2)$

$\Rightarrow y - 3 = -3x + 6$

$\Rightarrow 3x + y - 9 = 0$

$\therefore$ নতুন রেখাটির সমীকরণ: $3x + y - 9 = 0$

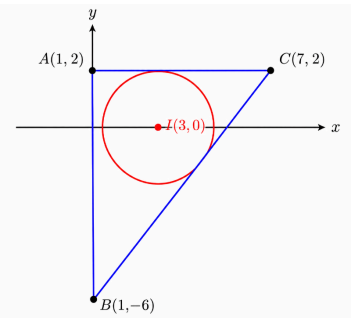
P-08_Q-15 ১০ নম্বর

১৫. ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি:

$c = AB = \sqrt{(1-1)^2 + (2-(-6))^2} = \sqrt{0 + 64} = 8$

$a = BC = \sqrt{(1-7)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

$b = CA = \sqrt{(7-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{36 + 0} = 6$



অন্তঃকেন্দ্র $I(x, y)$ এর স্থানাঙ্কের সূত্র: $x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}$ এবং $y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}$

মানগুলো বসিয়ে পাই: $x = \frac{10(1)+6(1)+8(7)}{10+6+8} = \frac{10+6+56}{24} = \frac{72}{24} = 3$

$y = \frac{10(2)+6(-6)+8(2)}{10+6+8} = \frac{20-36+16}{24} = \frac{0}{24} = 0$

$\therefore$ ত্রিভুজটির অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, 0)$

P-08_Q-16 ১০ নম্বর

১৬. প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণকে ছেদক আকৃতিতে প্রকাশ করি: $3x + 4y = 24$

$\Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

অতএব, রেখাটি x-অক্ষকে $A(8, 0)$ এবং y-অক্ষকে $B(0, 6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

অক্ষদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়ায় ΔOAB একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার সমকোণটি মূলবিন্দু $O(0, 0)$ তে অবস্থিত।

আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দুতে অবস্থান করে।

এখানে অতিভুজ হলো AB।

অতিভুজের মধ্যবিন্দু (পরিকেন্দ্র) $C = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (4, 3)$

পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলো পরিকেন্দ্র হতে যেকোনো শীর্ষের দূরত্ব।

$R = OC = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ একক।

পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi R^2 = \pi(5)^2 = 25\pi$ বর্গ একক

$\therefore$ পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(4, 3)$ এবং পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল 25π বর্গ একক।

P-09_Q-17 ১০ নম্বর

১৭. প্রদত্ত রেখার সমীকরণ: $\sqrt{3}x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখার ঢাল, $m_1 = \sqrt{3}$। ধরি, নির্ণেয় রেখার ঢাল m। প্রশ্নমতে, রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$

আমরা জানি, $\tan\theta = \pm\frac{m-m_1}{1+mm_1}$

$\Rightarrow \tan 60° = \pm\frac{m-\sqrt{3}}{1+m\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \pm\frac{m-\sqrt{3}}{1+m\sqrt{3}}$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই: $\sqrt{3}(1 + m\sqrt{3}) = m - \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} + 3m = m - \sqrt{3}$

$\Rightarrow 2m = -2\sqrt{3}$

$\Rightarrow m = -\sqrt{3}$

$(1, -2)$ বিন্দুগামী এবং $-\sqrt{3}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ: $y - (-2) = -\sqrt{3}(x - 1)$

$\Rightarrow \sqrt{3}x + y + 2 - \sqrt{3} = 0$

(−) চিহ্ন নিয়ে পাই: $\sqrt{3}(1 + m\sqrt{3}) = -(m - \sqrt{3})$

$\Rightarrow m = 0$

$(1, -2)$ বিন্দুগামী এবং 0 ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ: $y - (-2) = 0(x - 1) \Rightarrow y + 2 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $\sqrt{3}x + y + 2 - \sqrt{3} = 0$ এবং $y + 2 = 0$

P-09_Q-18 ১০ নম্বর

১৮. ধরি, নতুন অক্ষব্যবস্থায় কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক (X, Y)

মূলবিন্দুকে $(h, k) = (2, -3)$ বিন্দুতে স্থানান্তর করায় স্থানাঙ্কের রূপান্তর সূত্রানুসারে: $x = X + h \Rightarrow x = X + 2$

$y = Y + k \Rightarrow y = Y - 3$

প্রদত্ত সমীকরণ: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$

সমীকরণে x ও y এর মান প্রতিস্থাপন করে পাই: $(X + 2)^2 + (Y - 3)^2 - 4(X + 2) + 6(Y - 3) + 12 = 0$

$\Rightarrow (X^2 + 4X + 4) + (Y^2 - 6Y + 9) - 4X - 8 + 6Y - 18 + 12 = 0$

$\Rightarrow X^2 + Y^2 + (4X - 4X) + (-6Y + 6Y) + (4 + 9 - 8 - 18 + 12) = 0$

$\Rightarrow X^2 + Y^2 + (-1) = 0$

$\Rightarrow X^2 + Y^2 = 1$

$\therefore$ রূপান্তরিত নতুন সমীকরণ: $X^2 + Y^2 = 1$

P-10_Q-19 ১০ নম্বর

১৯. ধরি, সরলরেখাটির সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

রেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে $A(a, 0)$ ও $B(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

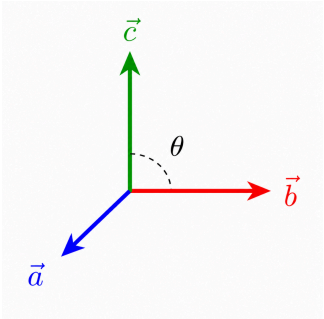
AB খণ্ডিত অংশের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
প্রশ্নমতে, মধ্যবিন্দু $(3, -4)$
$\therefore \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6$
এবং $\frac{b}{2} = -4 \Rightarrow b = -8$ **[2 Marks]**
a ও b এর মান সমীকরণে বসিয়ে পাই: $\frac{x}{6} + \frac{y}{-8} = 1$
$\Rightarrow 4x - 3y - 24 = 0$ **[3 Marks]**
রেখাটি ও অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হলো $O(0, 0)$, $A(6, 0)$ এবং $B(0, -8)$
ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য: $OA = |6| = 6$ একক
$OB = |-8| = 8$ একক
অতিভুজ $AB = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ একক
ত্রিভুজের পরিসীমা $= OA + OB + AB = 6 + 8 + 10 = 24$ একক।
$\therefore$ ত্রিভুজের পরিসীমা 24 একক। **[5 Marks]**
ব্যাখ্যা:

P-10_Q-20 ১০ নম্বর

২০. ধরি, সরলরেখাটির সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
প্রশ্নমতে, অক্ষদ্বয়ের ছেদ অংশের যোগফল, $a + b = 14 \Rightarrow b = 14 - a$
যেহেতু রেখাটি $(3, 4)$ বিন্দুগামী, $\frac{3}{a} + \frac{4}{14-a} = 1$
$\Rightarrow \frac{3(14-a)+4a}{a(14-a)} = 1$
$\Rightarrow 42 - 3a + 4a = 14a - a^2$
$\Rightarrow 42 + a = 14a - a^2$
$\Rightarrow a^2 - 13a + 42 = 0$
$\Rightarrow a(a - 6) - 7(a - 6) = 0$
$\Rightarrow (a - 6)(a - 7) = 0$
$\therefore a = 6$ অথবা $a = 7$
প্রথম ক্ষেত্র (যখন $a = 6$): $b = 14 - 6 = 8$
সমীকরণ: $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1 \Rightarrow 4x + 3y = 24$
দ্বিতীয় ক্ষেত্র (যখন $a = 7$): $b = 14 - 7 = 7$
সমীকরণ: $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} = 1 \Rightarrow x + y = 7$
$\therefore$ রেখাটির নির্ণেয় সমীকরণ: $4x + 3y = 24$ অথবা $x + y = 7$

P-11_Q-21 ১০ নম্বর

২১.



দেওয়া আছে, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ এবং $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \cos\theta$
প্রদত্ত সমীকরণটির উভয় পক্ষে যথাক্রমে $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ দ্বারা ডট গুণ করে তিনটি সমীকরণ তৈরি করি:
১. $\vec{a}$ দ্বারা ডট গুণ করে পাই (যেহেতু $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$):
$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = p + (q + r)\cos\theta$ -- **(i)**
২. $\vec{b}$ দ্বারা ডট গুণ করে পাই:
$0 = p\cos\theta + q + r\cos\theta \Rightarrow q = -(p + r)\cos\theta$ -- **(ii)**
৩. $\vec{c}$ দ্বারা ডট গুণ করে পাই (যেহেতু $\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$):

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (p+q)\cos\theta + r$ -- **(iii)**

সমীকরণ **(i)** এবং **(iii)** তুলনা করে পাই:

$p + (q+r)\cos\theta = r + (p+q)\cos\theta \Rightarrow p(1-\cos\theta) = r(1-\cos\theta)$

যেহেতু ভেক্টর তিনটি অসমতলীয়, তাই $\theta \neq 0$ এবং $\cos\theta \neq 1$। অতএব:

$p = r$ -- **(iv)**

সমীকরণ **(iv)** এর মান সমীকরণ **(ii)**-এ বসিয়ে পাই:

$q = -2p\cos\theta$ -- **(v)**

সমান কোণে আনত তিনটি একক ভেক্টরের স্কেলার ত্রয়ী গুণফল ও কোণের সম্পর্কটি হলো:

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta}$ -- **(vi)**

এখন সমীকরণ **(v)** ও **(iv)**-এর মান সমীকরণ **(i)**-এ বসিয়ে পাই:

$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = p + (-2p\cos\theta + p)\cos\theta = p(1+\cos\theta-2\cos^2\theta) = p(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)$

সমীকরণ **(vi)** থেকে সমাধান করে পাই:

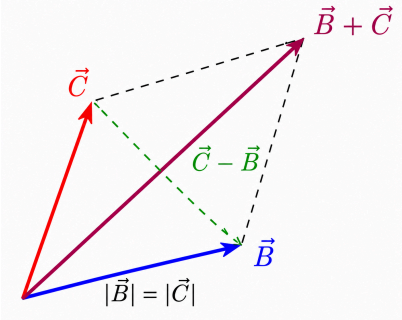
$(1-\cos\theta)\sqrt{1+2\cos\theta} = p(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)$

$\Rightarrow p = \frac{\sqrt{1+2\cos\theta}}{1+2\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+2\cos\theta}}$

অতএব, $p = r = \frac{1}{\sqrt{1+2\cos\theta}}$, $q = \frac{-2\cos\theta}{\sqrt{1+2\cos\theta}}$

P-11_Q-22 ১০ নম্বর

২২.



ধরি, $\vec{u} = (\vec{A}+\vec{B}) \times (\vec{A}+\vec{C})$।

বণ্টন সূত্র প্রয়োগ করে পাই:

$\vec{u} = \vec{A} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{A} + \vec{B} \times \vec{C}$

যেহেতু $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$ এবং $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$:

$\vec{u} = \vec{A} \times \vec{C} - \vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{C}-\vec{B}) + \vec{B} \times \vec{C}$ -- **(i)**

এখন ভেক্টর ত্রয়ী গুণফলের সূত্র $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$ ব্যবহার করে পাই:

$\vec{u} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{u} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{u} \cdot \vec{B})\vec{C}$

এবার এই ভেক্টরটিকে $(\vec{B}+\vec{C})$ এর সাথে ডট গুণ করি:

$\text{LHS} = [(\vec{u} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{u} \cdot \vec{B})\vec{C}] \cdot (\vec{B}+\vec{C})$

$\Rightarrow \text{LHS} = (\vec{u} \cdot \vec{C})|\vec{B}|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{C}) - (\vec{u} \cdot \vec{B})(\vec{C} \cdot \vec{B}) - (\vec{u} \cdot \vec{B})|\vec{C}|^2$

ধরি, $|\vec{B}|^2 = |\vec{C}|^2 = b^2$ এবং $\vec{B} \cdot \vec{C} = k$।

$\text{LHS} = (\vec{u} \cdot \vec{C})b^2 + (\vec{u} \cdot \vec{C})k - (\vec{u} \cdot \vec{B})k - (\vec{u} \cdot \vec{B})b^2$

$\Rightarrow \text{LHS} = [\vec{u} \cdot (\vec{C}-\vec{B})](b^2+k)$ -- **(ii)**

এখন সমীকরণ **(i)** থেকে প্রাপ্ত $\vec{u}$ এর মান সমীকরণ **(ii)**-এর $\vec{u} \cdot (\vec{C}-\vec{B})$ অংশে বসিয়ে পাই:

$\vec{u} \cdot (\vec{C}-\vec{B}) = [\vec{A} \times (\vec{C}-\vec{B}) + \vec{B} \times \vec{C}] \cdot (\vec{C}-\vec{B})$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{C}-\vec{B}) = [\vec{A} \times (\vec{C}-\vec{B})] \cdot (\vec{C}-\vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot (\vec{C}-\vec{B})$

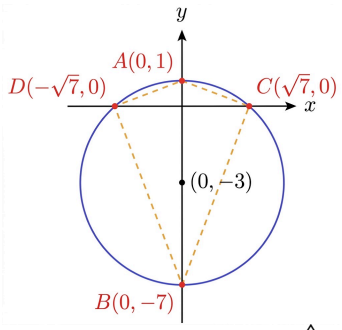
$\Rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{C}-\vec{B}) = 0$

যেহেতু $\vec{u} \cdot (\vec{C}-\vec{B}) = 0$, সেহেতু সমীকরণ **(ii)** থেকে পাই:

$\text{LHS} = 0 \times (b^2+k) = 0$ **(প্রমাণিত)**

P-12_Q-23 ১০ নম্বর

২৩.



ধরি, অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$।

প্রদত্ত সমীকরণ:

$\vec{r} \cdot (\vec{r} + 6\hat{j}) = 7$

$(x\hat{i} + y\hat{j}) \cdot (x\hat{i} + (y+6)\hat{j}) = 7$

$\Rightarrow x^2 + y(y+6) = 7 \Rightarrow x^2 + y^2 + 6y = 7$

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ অনুযায়ী সাজিয়ে পাই:

$x^2 + (y+3)^2 = 7 + 9 = 16$

এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র $(0, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $R = 4$।

স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দুসমূহ নির্ণয়:

১. y-অক্ষের ছেদবিন্দু (যেখানে $x = 0$):

$0^2 + y^2 + 6y - 7 = 0 \Rightarrow (y+7)(y-1) = 0 \Rightarrow y = 1$ অথবা $y = -7$

অতএব, y-অক্ষের ছেদবিন্দুদ্বয় হলো: $A(0, 1)$ এবং $B(0, -7)$।

২. x-অক্ষের ছেদবিন্দু (যেখানে $y = 0$):

$x^2 + 0^2 + 6(0) = 7 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$

অতএব, x-অক্ষের ছেদবিন্দুদ্বয় হলো: $C(\sqrt{7}, 0)$ এবং $D(-\sqrt{7}, 0)$।

চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

ছেদবিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটির কর্ণ দুটি মূল অক্ষ বরাবর লম্বভাবে অবস্থিত। অক্ষ বরাবর কর্ণ দুটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে:

$d_1 = AB = 1 - (-7) = 8$ একক

$d_2 = CD = \sqrt{7} - (-\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$ একক

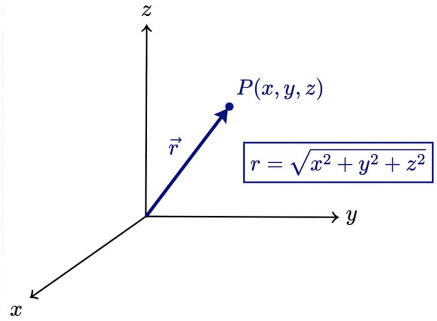
আমরা জানি, লম্বকর্ণ বিশিষ্ট চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল:

$\text{Area} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$ বর্গ একক

উত্তর: $8\sqrt{7}$ বর্গ একক

P-12_Q-24 ১০ নম্বর

২৪.



আমরা জানি, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

অতএব, $\phi = \ln r = \ln(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + z^2)$

এখন $\vec{\nabla}(\ln r)$ এর x-উপাংশটি হিসাব করি:

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2 + z^2)\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$

একইভাবে y ও z উপাংশের জন্য আংশিক অন্তরীকরণ করে পাই:

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}$

$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$

এখন মূল গ্রেডিয়েন্ট সূত্রে মানগুলো বসিয়ে পাই:

$\vec{\nabla}(\ln r) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$

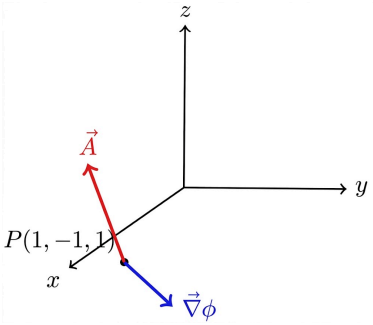
$\vec{\nabla}(\ln r) = \frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{x^2+y^2+z^2}$

যেহেতু লব $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \vec{r}$ এবং হর $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, সেহেতু:

$\vec{\nabla}(\ln r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$ (প্রমাণিত)

P-13_Q-25 ১০ নম্বর

২৫.



প্রথমে স্কেলার ক্ষেত্র ϕ এর গ্রেডিয়েন্ট $(\vec{\nabla}\phi)$ নির্ণয় করি:

$\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2z - x^3y) = -3x^2y$

$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2z - x^3y) = -x^3$

$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2z - x^3y) = 2$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\phi = -3x^2y\hat{i} - x^3\hat{j} + 2\hat{k}$

$(1,-1,1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\phi$ এর মান:

$\vec{\nabla}\phi_{(1,-1,1)} = -3(1)^2(-1)\hat{i} - (1)^3\hat{j} + 2\hat{k} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$(1,-1,1)$ বিন্দুতে $\vec{A}$ ভেক্টরের মান:

$\vec{A}_{(1,-1,1)} = 2(1)^2\hat{i} - 3(-1)(1)\hat{j} + (1)(1)^2\hat{k} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

এখন ডট গুণফল $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$ হিসাব করি:

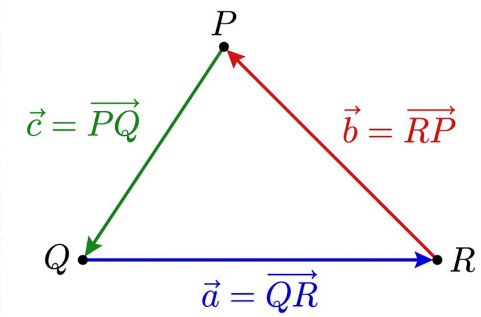
$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi = (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})\cdot(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

$= 2(3) + 3(-1) + 1(2) = 6 - 3 + 2 = 5$

উত্তর: 5

P-13_Q-26 ১০ নম্বর

২৬.



ত্রিভুজ সূত্রানুসারে:

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$ — (i)

১. $\vec{a}\cdot\vec{b} = -72$ প্রমাণ: দেওয়া আছে $\vec{b}\cdot\vec{c} = 24$:

$\vec{b}\cdot[-(\vec{a} + \vec{b})] = 24 \Rightarrow -\vec{a}\cdot\vec{b} - |\vec{b}|^2 = 24$

$|\vec{b}| = 4\sqrt{3} \Rightarrow |\vec{b}|^2 = 48$ বসিয়ে পাই:

$-\vec{a}\cdot\vec{b}-48=24 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-72$ **(প্রমাণিত)**

২. $|\vec{c}|$ **এর মান নির্ণয়:**

$|\vec{c}|^2=[-(\vec{a}+\vec{b})]\cdot[-(\vec{a}+\vec{b})]=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

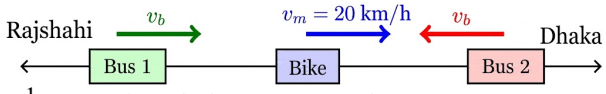
$|\vec{c}|^2=12^2+48+2(-72)=144+48-144=48$

$\Rightarrow |\vec{c}|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

উত্তর: $|\vec{c}|=4\sqrt{3}$

P-14_Q-27 ১০ নম্বর

২৭.



ধরি, বাসের প্রকৃত বেগ $= v_b\ \text{kmh}^{-1}$ এবং বাস ছাড়ার সময় ব্যবধান $= T$ h

দুটি বাসের মধ্যবর্তী দূরত্ব $d = v_b \times T$

মোটরসাইকেলের বেগ $v_m = 20\ \text{kmh}^{-1}$

সামনে থেকে আসা বাসের ক্ষেত্রে **(বিপরীত অভিমুখে আপেক্ষিক বেগ):**

$v_{rel1} = v_b + v_m = v_b + 20$

মিলিত হওয়ার সময় ব্যবধান $t_1 = 6\ \text{min} = \frac{1}{10}\ \text{h}$

$d = (v_b+20)\times\frac{1}{10} \Rightarrow v_bT = \frac{v_b+20}{10}$ — (i)

পেছন থেকে আসা বাসের ক্ষেত্রে **(একই অভিমুখে আপেক্ষিক বেগ):**

$v_{rel2} = v_b - v_m = v_b - 20$

অতিক্রম করার সময় ব্যবধান $t_2 = 18\ \text{min} = \frac{18}{60}\ \text{h} = \frac{3}{10}\ \text{h}$

$d = (v_b-20)\times\frac{3}{10} \Rightarrow v_bT = \frac{3(v_b-20)}{10}$ — (ii)

সমীকরণ **(i)** এবং **(ii)** তুলনা করে পাই:

$\frac{v_b+20}{10} = \frac{3(v_b-20)}{10}$

$\Rightarrow v_b+20 = 3v_b-60$

$\Rightarrow 2v_b = 80 \Rightarrow v_b = 40\ \text{kmh}^{-1}$

v_b এর মান সমীকরণ **(i)**-এ বসিয়ে পাই:

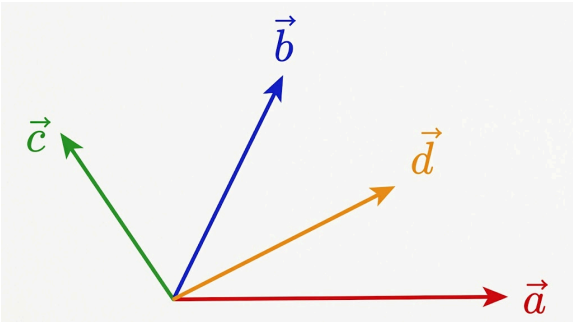
$40\times T = \frac{40+20}{10} = 6$

$\Rightarrow T = \frac{6}{40}\ \text{h} = \frac{6}{40}\times 60\ \text{min} = 9\ \text{min}$

উত্তর: বাসের প্রকৃত বেগ $40\ \text{kmh}^{-1}$ এবং বাস ছাড়ার সময় ব্যবধান 9 মিনিট।

P-14_Q-28 ১০ নম্বর

২৮.



ধরি, লব্ধি ভেক্টরটি $\vec{V}$ । ভেক্টর ত্রয়ী গুণন সূত্র প্রয়োগ করে প্রতিটি পদ বিস্তৃত করি:

১. $\vec{T}_1 = (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{b} - [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{a}$

২. $\vec{T}_2 = (\vec{a}\times\vec{c})\times(\vec{d}\times\vec{b}) = [\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{b}]\vec{c} - [\vec{c}\ \vec{d}\ \vec{b}]\vec{a}$

৩. $\vec{T}_3 = (\vec{a}\times\vec{d})\times(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{d} - [\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{a}$

সমষ্টি নিয়ে পাই:

$\vec{V} = \left([\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{b} + [\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{b}]\vec{c} + [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{d}\right) - \left([\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}] + [\vec{c}\ \vec{d}\ \vec{b}] + [\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}]\right)\vec{a}$

ভেক্টর অভেদানুসারে:

$[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{b} + [\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{b}]\vec{c} + [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\vec{d} = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{a}$

এবং স্কেলার ত্রয়ী গুণফলের চক্রাকার নিয়ম থেকে:

$[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}] = [\vec{c}\ \vec{d}\ \vec{b}] = [\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

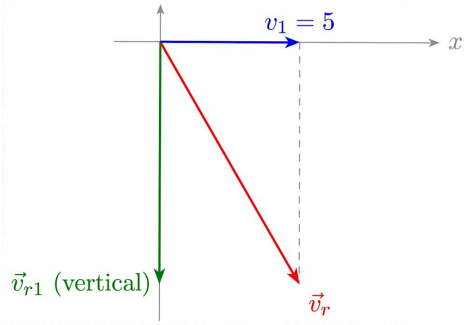
সুতরাং:

$\vec{V} = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{a} - 3[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{a} = -2[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]\vec{a}$

যেহেতু $-2[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]$ একটি বাস্তব স্কেলার, সেহেতু $\vec{V}$ ভেক্টরটি সর্বদা $\vec{a}$ এর সমান্তরাল। (প্রমাণিত)

P-15_Q-29 ১০ নম্বর

২৯.



ধরি, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ $\vec{v}_r = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$

১ম ক্ষেত্র ($v_1 = 5\ ms^{-1}$): বৃষ্টি লম্বভাবে পড়ার শর্তে অনুভূমিক আপেক্ষিক বেগ শূন্য:

$v_x - 5 = 0 \Rightarrow v_x = 5\ ms^{-1}$

২য় ক্ষেত্র ($v_2 = 10\ ms^{-1}$): আপেক্ষিক বেগ উল্লম্বের সাথে $30°$ কোণ তৈরি করে:

$\tan 30° = \frac{|v_x - 10|}{|v_y|} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{|5-10|}{|v_y|} = \frac{5}{|v_y|}$

$\Rightarrow |v_y| = 5\sqrt{3}\ ms^{-1} \Rightarrow v_y = -5\sqrt{3}\ ms^{-1}$

বৃষ্টির প্রকৃত বেগের মান:

$|\vec{v}_r| = \sqrt{5^2 + (-5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10\ ms^{-1}$

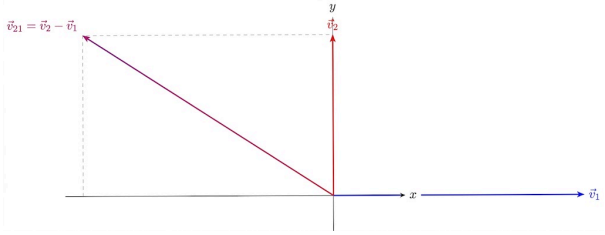
দিক (উল্লম্বের সাথে):

$\tan\theta = \frac{v_x}{|v_y|} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30°$

উত্তর: বৃষ্টির প্রকৃত বেগ $10\ ms^{-1}$ এবং এটি উল্লম্বের সাথে $30°$ কোণে হেলে পড়েছে।

P-15_Q-30 ১০ নম্বর

৩০.



১. প্রথম কণার বেগ ($\vec{v}_1$):

$v_1 = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(10 + 8t + 3t^2) = 8 + 6t$

$t = 1\ s$ সময়ে, $v_1 = 8 + 6(1) = 14\ ms^{-1} \Rightarrow \vec{v}_1 = 14\hat{i}\ ms^{-1}$

২. দ্বিতীয় কণার বেগ ($\vec{v}_2$):

$v_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 3t^3) = 9t^2$

$t = 1\ s$ সময়ে, $v_2 = 9(1)^2 = 9\ ms^{-1} \Rightarrow \vec{v}_2 = 9\hat{j}\ ms^{-1}$

৩. ১মে কণার সাপেক্ষে ২য় কণার আপেক্ষিক বেগ ($\vec{v}_{21}$):

$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -14\hat{i} + 9\hat{j}\ ms^{-1}$

আপেক্ষিক বেগের মান:

$|\vec{v}_{21}| = \sqrt{(-14)^2 + 9^2} = \sqrt{196 + 81} = \sqrt{277} \approx 16.64\ ms^{-1}$

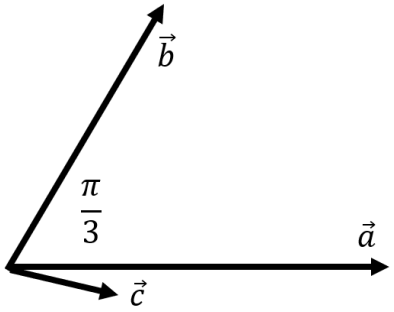
দিক (x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ θ):

$\tan\theta = \frac{9}{14} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0.643) \approx 32.74°$ (উত্তর-পশ্চিম দিকে)

উত্তর: আপেক্ষিক বেগের মান $16.64\ \text{ms}^{-1}$ এবং দিক **x**-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে $32.74°$ কোণে।

P-16_Q-31 ১০ নম্বর

৩১.



দেওয়া আছে, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ এবং প্রতি জোড়ার মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{3}$। অতএব,

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

প্রদত্ত সমীকরণ:

$\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$

১. সমীকরণের উভয় পক্ষে $\vec{a}$ দ্বারা ডট গুণ করে পাই:

$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) + \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = p(\vec{a}\cdot\vec{a}) + q(\vec{a}\cdot\vec{b}) + r(\vec{a}\cdot\vec{c})$

$\Rightarrow 0 + [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = p(1) + q\left(\frac{1}{2}\right) + r\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = p + \frac{q}{2} + \frac{r}{2}$ — (i)

২. উভয় পক্ষে $\vec{b}$ দ্বারা ডট গুণ করে পাই:

$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) + \vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = p(\vec{b}\cdot\vec{a}) + q(\vec{b}\cdot\vec{b}) + r(\vec{b}\cdot\vec{c})$

$\Rightarrow 0 + 0 = p\left(\frac{1}{2}\right) + q(1) + r\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow p + 2q + r = 0 \Rightarrow p + r = -2q$ — (ii)

৩. উভয় পক্ষে $\vec{c}$ দ্বারা ডট গুণ করে পাই:

$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) + \vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = p(\vec{c}\cdot\vec{a}) + q(\vec{c}\cdot\vec{b}) + r(\vec{c}\cdot\vec{c})$

$\Rightarrow [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] + 0 = p\left(\frac{1}{2}\right) + q\left(\frac{1}{2}\right) + r(1)$

$\Rightarrow [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + r$ — (iii)

সমীকরণ **(i)** ও **(iii)** তুলনা করে পাই:

$p + \frac{q}{2} + \frac{r}{2} = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + r \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{r}{2} \Rightarrow p = r$

$p = r$ মানটি সমীকরণ **(ii)**-এ বসিয়ে পাই:

$2p + 2q = 0 \Rightarrow p = -q$ এবং $r = -q$

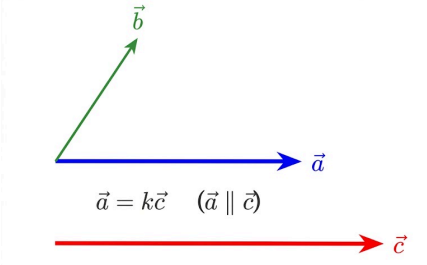
নির্ণেয় রাশির মান:

$\frac{p^2+2q^2+r^2}{q^2} = \frac{(-q)^2+2q^2+(-q)^2}{q^2} = \frac{q^2+2q^2+q^2}{q^2} = \frac{4q^2}{q^2} = 4$

উত্তর: 4

P-16_Q-32 ১০ নম্বর

৩২.



পরস্পর সমান্তরাল ভেক্টরদ্বয় $\vec{a}$ ও $\vec{c}$ (Parallel vectors $\vec{a}$ and $\vec{c}$)

ভেক্টর ত্রয়ী গুণফলের সূত্রানুসারে:

LHS: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

RHS: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

প্রদত্ত শর্তানুসারে LHS = RHS:

$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

উভয় পক্ষ থেকে $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ বাদ দিলে পাই:

$-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}=-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\Rightarrow\vec{a}=\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{c}}\right)\vec{c}$

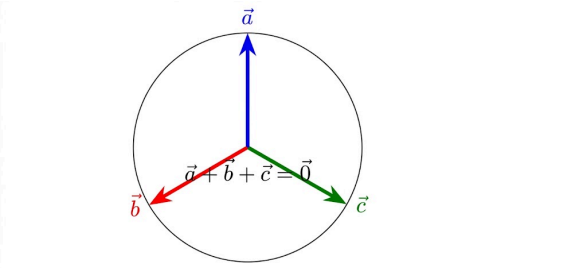
ধরি, $k=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{c}}$ একটি স্কেলার ধ্রুবক।

$\vec{a}=k\vec{c}$

যেহেতু একটি ভেক্টরকে অন্যটির স্কেলার গুণিতক হিসেবে প্রকাশ করা গেছে, সেহেতু $\vec{a}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। (প্রমাণিত)

P-17_Q-33 ১০ নম্বর

৩৩.



সাম্যবস্থায় তিনটি একক ভেক্টর (Equilibrium of three unit vectors)

যেহেতু $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ একক ভেক্টর, তাই $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

একইভাবে প্রদত্ত সমীকরণ সম্প্রসারণ করে পাই:

$(2-2\vec{a}\cdot\vec{b})+(2-2\vec{b}\cdot\vec{c})+(2-2\vec{c}\cdot\vec{a})=9$

$\Rightarrow 6-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=9\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\frac{3}{2}$

এখন, $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$ এর বিস্তার করি:

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=1+1+1+2\left(-\frac{3}{2}\right)=3-3=0$

$\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$

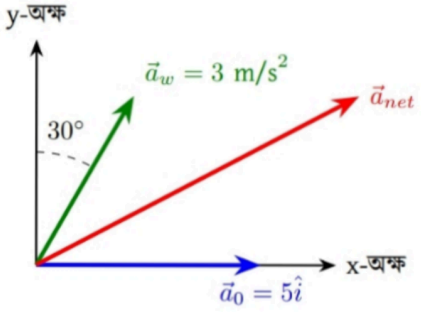
কাঙ্ক্ষিত মান:

$|2\vec{a}+5\vec{b}+5\vec{c}|=|2\vec{a}+5(\vec{b}+\vec{c})|=|2\vec{a}-5\vec{a}|=|-3\vec{a}|=3|\vec{a}|=3$

উত্তর: 3

P-17_Q-34 ১০ নম্বর

৩৪.



কণাটির উপর প্রযুক্ত আদি ত্বরণ $\vec{a}_0=5\hat{i}\,\mathrm{ms^{-2}}$। বাতাসের ত্বরণ $\vec{a}_w$ **y**-অক্ষের সাথে 30° কোণে ক্রিয়াশীল হওয়ায় এর উপাংশসমূহ:

$a_{wx}=3\sin 30°=1.5\,\mathrm{ms^{-2}}$

$a_{wy}=3\cos 30°=1.5\sqrt{3}\,\mathrm{ms^{-2}}$

কণাটির লব্ধি ত্বরণ $\vec{a}$:

$a_x = a_{0x} + a_{wx} = 5 + 1.5 = 6.5\,ms^{-2}$

$a_y = a_{wy} = 1.5\sqrt{3}\,ms^{-2}$

$\vec{a} = 6.5\hat{i} + 1.5\sqrt{3}\hat{j}\,ms^{-2}$

সরণ ভেক্টর ($\vec{s}$) নির্ণয় (আদিবেগ $u = 0$):

$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \frac{1}{2}(6.5\hat{i} + 1.5\sqrt{3}\hat{j})(3)^2 = 4.5(6.5\hat{i} + 1.5\sqrt{3}\hat{j})$

$\vec{s} = 29.25\hat{i} + 6.75\sqrt{3}\hat{j}\,m \approx 29.25\hat{i} + 11.69\hat{j}\,m$

$s = |\vec{s}| = \sqrt{29.25^2 + (6.75\sqrt{3})^2} \approx \sqrt{855.56 + 136.69} \approx 31.50\,m$

শেষ বেগ ভেক্টর ($\vec{v}$) নির্ণয়:

$\vec{v} = \vec{a}t = (6.5\hat{i} + 1.5\sqrt{3}\hat{j}) \times 3 = 19.5\hat{i} + 4.5\sqrt{3}\hat{j}\,ms^{-1}$

$|\vec{v}| = \sqrt{19.5^2 + (4.5\sqrt{3})^2} = \sqrt{380.25 + 60.75} = \sqrt{441} = 21\,ms^{-1}$

উত্তর: নিট সরণ $31.50\,m$ এবং শেষ বেগের মান $21\,ms^{-1}$

P-18_Q-35 ১০ নম্বর

৩৫. স্কেলার ক্ষেত্রের গ্রেডিয়েন্টের ডাইভারজেন্স হলো ল্যাপলাসিয়ান অপারেটর:

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

আংশিক অন্তরীকরণগুলো নির্ণয় করি:

১. x এর সাপেক্ষে:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + z^3 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

২. y এর সাপেক্ষে:

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 4yz \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 4z$

৩. z এর সাপেক্ষে:

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2y^2 + 3z^2x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6zx$

সমীকরণগুলো ল্যাপলাসিয়ান সূত্রে বসিয়ে পাই:

$\nabla^2 f = 0 + (2x + 4z) + 6zx = 2x + 4z + 6zx$

$(1, 1, 1)$ বিন্দুতে ($x = 1, y = 1, z = 1$):

$\nabla^2 f = 2(1) + 4(1) + 6(1)(1) = 2 + 4 + 6 = 12$

উত্তর: 12

P-18_Q-36 ১০ নম্বর

৩৬. ধরি, $\vec{c} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

১. সমতলীয় **(coplanar)** হওয়ার শর্তানুসারে:

ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হওয়ায় এদের স্কেলার ত্রয়ী গুণফল শূন্য হবে:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x(3 - (-1)) - y(2 - 0) + z(2 - 0) = 0$

$\Rightarrow 4x - 2y + 2z = 0 \Rightarrow 2x - y + z = 0 \quad \text{— (i)}$

২. $\vec{c} \perp \vec{a}$ হওয়ার শর্তানুসারে:

$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z = 0 \quad \text{— (ii)}$

৩. দেওয়া আছে $\vec{c} \cdot \vec{b} = 24$:

$(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (0\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 24 \Rightarrow y + z = 24 \quad \text{— (iii)}$

সমীকরণ **(i)** এবং **(ii)** যোগ করে পাই:

$(2x - y + z) + (2x + 3y - z) = 0 \Rightarrow 4x + 2y = 0 \Rightarrow y = -2x$ — (iv)

সমীকরণ **(iv)** কে **(iii)**-এ বসিয়ে পাই:

$-2x + z = 24 \Rightarrow z = 24 + 2x$ — (v)

y ও z এর মান **(i)**-এ বসিয়ে পাই:

$2x - (-2x) + (24 + 2x) = 0 \Rightarrow 6x + 24 = 0 \Rightarrow x = -4$

x এর মান থেকে পাই:

$y = -2(-4) = 8, \quad z = 24 + 2(-4) = 16$

অতএব, ভেক্টরটি $\vec{c} = -4\hat{i} + 8\hat{j} + 16\hat{k}$

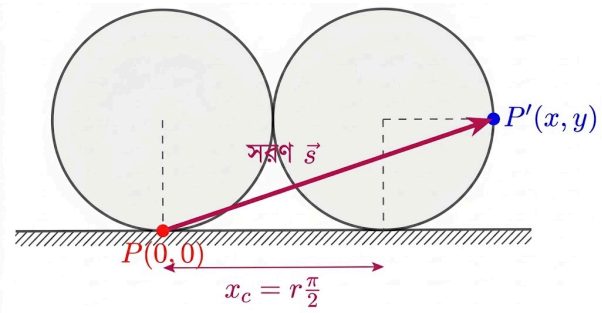
$\vec{c}$ ভেক্টরের মান:

$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 16^2} = \sqrt{16 + 64 + 256} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21} \approx 18.33$ unit

উত্তর: $\vec{c} = -4\hat{i} + 8\hat{j} + 16\hat{k}$ এবং মান $4\sqrt{21}$

P-19_Q-37 ১০ নম্বর

৩৭.



চাকাটি পিছলে না গিয়ে বিশুদ্ধ ঘূর্ণন করায়, $90°$ $(\theta = \frac{\pi}{2}$ rad**)** ঘূর্ণনের জন্য চাকার কেন্দ্রের আনুভূমিক সরণ হবে:

$x_c = r\theta = r\left(\frac{\pi}{2}\right)$

আদি স্পর্শবিন্দুকে মূলবিন্দু $(0, 0)$ ধরলে, $90°$ ঘূর্ণন শেষে P বিন্দুর নতুন স্থানাঙ্ক:

অণুভূমিক সরণ **(x):**

$x = x_c + r\sin(90°) = r\frac{\pi}{2} + r = r\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$

উল্লম্ব সরণ **(y):**

$y = r - r\cos(90°) = r(1 - 0) = r$

নিট সরণ ভেক্টরের মান **(s):**

$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left[r\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\right]^2 + r^2} = r\sqrt{\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)^2 + 1^2}$

$s = r\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \pi + 1 + 1} = r\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \pi + 2}$

এখানে $r = 45$ cm $= 0.45$ m বসিয়ে পাই:

$s = 0.45 \times \sqrt{\frac{3.1416^2}{4} + 3.1416 + 2} \approx 0.45 \times \sqrt{2.4674 + 3.1416 + 2}$

$s \approx 0.45 \times \sqrt{7.609} \approx 0.45 \times 2.758 \approx 1.241$ m

উত্তর: 1.241 m **(**বা 124.1 cm**)**

P-19_Q-38 ১০ নম্বর

৩৮. প্রথমে স্কেলার ক্ষেত্র ϕ এবং ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{A}$ এর গুণফল নির্ণয় করি:

$\phi\vec{A} = (xy^2z)(xz\hat{i} - xy^2\hat{j} + yz^2\hat{k})$

$\Rightarrow \phi\vec{A} = x^2y^2z^2\hat{i} - x^2y^4z\hat{j} + xy^3z^3\hat{k}$

এখন, x এর সাপেক্ষে প্রথমবার আংশিক অন্তরীকরণ **(partial differentiation)** করি:

$\frac{\partial(\phi\vec{A})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2z^2\hat{i} - x^2y^4z\hat{j} + xy^3z^3\hat{k})$

$\Rightarrow \frac{\partial(\phi\vec{A})}{\partial x} = 2xy^2z^2\hat{i} - 2xy^4z\hat{j} + y^3z^3\hat{k}$

এবার x এর সাপেক্ষে দ্বিতীয়বার আংশিক অন্তরীকরণ করি:

$\frac{\partial^2(\phi\vec{A})}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2z^2\hat{i} - 2xy^4z\hat{j} + y^3z^3\hat{k})$

$\Rightarrow \frac{\partial^2(\phi\vec{A})}{\partial x^2} = 2y^2z^2\hat{i} - 2y^4z\hat{j}$

অবশেষে, প্রাপ্ত মানটিকে z এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরীকরণ করি:

$\frac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2y^2z^2\hat{i} - 2y^4z\hat{j})$

$\Rightarrow \frac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z} = 4y^2z\hat{i} - 2y^4\hat{j}$

এখন $(2, -1, 1)$ বিন্দুতে অর্থাৎ $x = 2, y = -1$ এবং $z = 1$ বসিয়ে পাই:

$\frac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z} = 4(-1)^2(1)\hat{i} - 2(-1)^4\hat{j} = 4\hat{i} - 2\hat{j}$

উত্তর: $4\hat{i} - 2\hat{j}$

P-20_Q-39 ১০ নম্বর

৩৯. ধরি, যেকোনো ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$।

প্রথমে $\vec{A}$ এর কার্ল নির্ণয় করি:

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

এখন এই কার্লের ডাইভারজেন্স $(\vec{\nabla}\cdot)$ নির্ণয় করি:

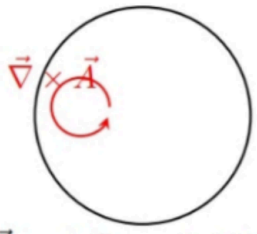
$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}$

আংশিক অন্তরীকরণের ক্রম পরিবর্তনশীলতার উপপাদ্যানুসারে $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)$:

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right) = 0$

অতএব, যেকোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্লের ডাইভারজেন্স সর্বদা শূন্য। (প্রমাণিত)



$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ (Zero Net Flux Outward)

P-20_Q-40 ১০ নম্বর

৪০. $\vec{d}_1$ ভেক্টরটি **yz**-তলে অবস্থিত। ধরি, $\vec{d}_1 = y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

এখানে $z_1 = 4.50\,\text{m}$ এবং **y**-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $63°$:

$\tan 63° = \frac{z_1}{y_1} = \frac{4.50}{y_1} \Rightarrow y_1 = \frac{4.50}{\tan 63°} \approx 2.30\,\text{m}$

অতএব, $\vec{d}_1 = 2.30\hat{j} + 4.50\hat{k}$

$\vec{d}_2$ ভেক্টরটি **xz**-তলে অবস্থিত। ধরি, $\vec{d}_2 = x_2\hat{i} + z_2\hat{k}$

এখানে $z_2 = 1.40\,\text{m}$ এবং **x**-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $30°$:

$\tan 30° = \frac{z_2}{x_2} = \frac{1.40}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1.40}{\tan 30°} \approx 2.42\,\text{m}$

অতএব, $\vec{d}_2 = 2.42\hat{i} + 1.40\hat{k}$

(ক) ডট গুণফল $(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)$:

$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (0\hat{i} + 2.30\hat{j} + 4.50\hat{k}) \cdot (2.42\hat{i} + 0\hat{j} + 1.40\hat{k})$

$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (0 \times 2.42) + (2.30 \times 0) + (4.50 \times 1.40) = 6.30\,\text{m}^2$

(খ) ক্রস গুণফল $(\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)$:

$$\vec{d}_1 \times \vec{d}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2.30 & 4.50 \\ 2.42 & 0 & 1.40 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(2.30 \times 1.40 - 0) - \hat{j}(0 - 4.50 \times 2.42) + \hat{k}(0 - 2.30 \times 2.42)$

$= 3.22\hat{i} + 10.89\hat{j} - 5.56\hat{k}\ m^2$

(গ) মধ্যবর্তী কোণ (θ):

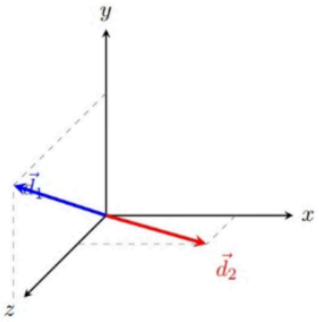
$|\vec{d}_1| = \sqrt{2.30^2 + 4.50^2} \approx 5.05\ m$

$|\vec{d}_2| = \sqrt{2.42^2 + 1.40^2} \approx 2.80\ m$

$\cos\theta = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{|d_1||d_2|} = \frac{6.30}{5.05 \times 2.80} \approx 0.4455$

$\theta = \cos^{-1}(0.4455) \approx 63.55°$

উত্তর: (ক) $6.30\ m^2$, **(খ)** $3.22\hat{i} + 10.89\hat{j} - 5.56\hat{k}\ m^2$, **(গ)** $63.55°$



P-21_Q-41 ১০ নম্বর

৪১. এখানে, $\Delta[N_2O_5] = 0.080 - 0.060 = 0.020\ molL^{-1}$

এবং $\Delta t = 20\ s$

N_2O_5 হ্রাসের হার $= \frac{\Delta[N_2O_5]}{\Delta t} = \frac{0.020}{20} = 1.0 \times 10^{-3}\ molL^{-1}s^{-1}$

সহগ অনুযায়ী বিক্রিয়ার হার, $r = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d[N_2O_5]}{dt} = \frac{1}{2} \times 1.0 \times 10^{-3} = 5.0 \times 10^{-4}\ molL^{-1}s^{-1}$

NO_2 উৎপাদনের হার $= \frac{4}{2} \times r = 4 \times 5.0 \times 10^{-4} = 2.0 \times 10^{-3}\ molL^{-1}s^{-1}$

অতএব, O_2 উৎপাদনের হার $= r = 5.0 \times 10^{-4}\ molL^{-1}s^{-1}$

P-21_Q-42 ১০ নম্বর

৪২. প্রদত্ত, $k_1 = 2.0 \times 10^{-3}\ s^{-1}$, $T_1 = 300\ K$

$k_2 = 1.2 \times 10^{-2}\ s^{-1}$, $T_2 = 320\ K$

$R = 8.314\ Jmol^{-1}K^{-1}$

সূত্র: $\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$

এখানে, $\frac{k_2}{k_1} = \frac{1.2 \times 10^{-2}}{2.0 \times 10^{-3}} = 6.0 \implies \ln 6 = 1.7918$

আবার, $\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = \frac{1}{300} - \frac{1}{320} = 2.0833 \times 10^{-4}\ K^{-1}$

সুতরাং, $E_a = \frac{R \times \ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right)}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{8.314 \times 1.7918}{2.0833 \times 10^{-4}}$

অতএব, $E_a = 71504\ Jmol^{-1} \approx 71.5\ kJmol^{-1}$

P-22_Q-43 ১০ নম্বর

৪৩. প্রদত্ত, ঢাল **(slope)** $= -\frac{E_a}{R} = -4200\ K$

সুতরাং, $E_a = -\text{slope} \times R = 4200 \times 8.314 = 34918.8\ Jmol^{-1} \approx 34.9\ kJmol^{-1}$

এখন, $\ln\left(\frac{k_{310}}{k_{300}}\right) = \frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{310}\right) = 4200 \times 1.0753 \times 10^{-4} = 0.4516$

$\therefore \frac{k_{310}}{k_{300}} = e^{0.4516} = 1.57$

অতএব, যেহেতু অনুপাত > 1, তাই তাপমাত্রা বাড়ালে k বৃদ্ধি পায়

P-22_Q-44 ১০ নম্বর

৪৪. প্রদত্ত, তাপমাত্রা সহগ (μ) = 2.5 প্রতি 10°C

$r_{20} = 4.0 \times 10^{-3}\ molL^{-1}s^{-1}$

এখানে, 20°C → 40°C হলো দুইটি 10°C ধাপ

সুতরাং, মোট গুণক = $\mu^2 = 2.5^2 = 6.25$

অতএব, $r_{40} = r_{20} \times 6.25 = 4.0 \times 10^{-3} \times 6.25 = 2.5 \times 10^{-2}\ molL^{-1}s^{-1}$

P-23_Q-45 ১০ নম্বর

৪৫. প্রদত্ত, $E_{a1} = 85\ kJmol^{-1}$ **(catalyst ছাড়া)**

$E_{a2} = 55\ kJmol^{-1}$ **(catalyst সহ)**

$T = 300\ K$

এখানে, $k = A \cdot e^{-\frac{E_a}{RT}}$, A অপরিবর্তিত থাকায়:

$\frac{k_2}{k_1} = \exp\left[\frac{E_{a1}-E_{a2}}{RT}\right] = \exp\left[\frac{30000}{8.314\times300}\right]$

অতএব, $\frac{k_2}{k_1} = \exp(12.03) \approx 1.67 \times 10^5$

P-23_Q-46 ১০ নম্বর

৪৬. প্রদত্ত, $[A] = 0.40\ M, [B] = 0.20\ M, [C] = 0.80\ M$

ভরক্রিয়ার সূত্র থেকে, $K_c = \frac{[C]}{[A][B]}$

অতএব, $K_c = \frac{0.80}{0.40\times0.20} = \frac{0.80}{0.08} = 10$

P-24_Q-47 ১০ নম্বর

৪৭. প্রদত্ত, প্রাথমিক: $H_2 = I_2 = 1.00\ mol, HI = 0.20\ mol; V = 2.0\ L$

সাম্যাবস্থায় $H_2 = 0.40\ mol$

এখানে, H_2 বিক্রিয়া করেছে = $1.00 - 0.40 = 0.60\ mol$

স্টয়কিওমিতি (1 : 1 : 2) অনুযায়ী, I_2 বিক্রিয়া করেছে = 0.60 mol, HI উৎপন্ন হয়েছে = 1.20 mol

সুতরাং সাম্যাবস্থায়, $H_2 = 0.40\ mol, I_2 = 1.00 - 0.60 = 0.40\ mol, HI = 0.20 + 1.20 = 1.40\ mol$

ঘনমাত্রা (÷2.0 L): $[H_2] = 0.20\ M, [I_2] = 0.20\ M, [HI] = 0.70\ M$

অতএব, $K_c = \frac{[HI]^2}{[H_2][I_2]} = \frac{(0.70)^2}{0.20\times0.20} = \frac{0.49}{0.04} = 12.25$

P-24_Q-48 ১০ নম্বর

৪৮. প্রদত্ত, $K_c = 4.0 \times 10^{-2}, T = 500\ K$

$R = 0.0821\ Latmmol^{-1}K^{-1}$

এখানে, Δn = (গ্যাসীয় product মোল) − (গ্যাসীয় reactant মোল) = 2 − (1 + 3) = −2

আবার, $RT = 0.0821 \times 500 = 41.05$

সুতরাং, $K_p = K_c(RT)^{\Delta n} = 4.0 \times 10^{-2} \times (41.05)^{-2} = \frac{4.0\times10^{-2}}{1685.1} \approx 2.37 \times 10^{-5}$

P-25_Q-49 ১০ নম্বর

৪৯. প্রদত্ত, $P(PCl_5) = 0.40, P(PCl_3) = 0.30, P(Cl_2) = 0.30\ atm$

$T = 400\ K$

এখানে, $K_p = \frac{P(PCl_3)\times P(Cl_2)}{P(PCl_5)} = \frac{0.30\times0.30}{0.40} = \frac{0.09}{0.40} = 0.225$

আবার, $\Delta n = 2 - 1 = 1$

সুতরাং, $K_c = \frac{K_p}{(RT)^{\Delta n}} = \frac{0.225}{0.0821\times400} = \frac{0.225}{32.84} \approx 6.85 \times 10^{-3}$

P-25_Q-50 ১০ নম্বর

৫০. প্রদত্ত, $K_c = 0.025, \Delta n = -1, T = 400\ K$

এখানে, $K_p = K_c(RT)^{\Delta n} = 0.025 \times (0.0821 \times 400)^{-1} = \frac{0.025}{32.84} = 7.61 \times 10^{-4}$

অতএব, বিপরীত বিক্রিয়ার $K_p' = \frac{1}{K_p} = \frac{1}{7.61\times10^{-4}} = 1313.6 \approx 1.31 \times 10^3$

P-26_Q-51 ১০ নম্বর

৫১. প্রদত্ত, $[SO_2] = 0.20, [O_2] = 0.10, [SO_3] = 0.50\,M$
$K_c = 60$
এখানে, $Q_c = \frac{[SO_3]^2}{[SO_2]^2[O_2]} = \frac{(0.50)^2}{(0.20)^2\times0.10} = \frac{0.25}{0.004} = 62.5$
অতএব, যেহেতু $Q_c(62.5) > K_c(60)$, সুতরাং বিক্রিয়া বিপরীতমুখী **(product → reactant)** অগ্রসর হবে

P-26_Q-52 ১০ নম্বর

৫২. প্রদত্ত, $P\,(CO_2) = 0.75$ atm সাম্যাবস্থায়
এখানে, খাঁটি কঠিন পদার্থ $(CaCO_3, CaO)$ **expression**-এ অন্তর্ভুক্ত হয় না
সুতরাং, $K_p = P\,(CO_2) = 0.75$ atm
অতএব, $CaCO_3$-এর পরিমাণ দ্বিগুণ করলে K_p অপরিবর্তিত থাকে (যতক্ষণ কিছু কঠিন উপস্থিত থাকে) এবং **equilibrium**-এর অবস্থানেরও কোনো পরিবর্তন হয় না

P-27_Q-53 ১০ নম্বর

৫৩. প্রদত্ত, $\Delta n(\text{forward}) = 2 - 4 = -2$ (মোল সংখ্যা কমে)
এখানে, চাপ দ্বিগুণ করলে সিস্টেম কম মোলসংখ্যার দিকে সরে যায় **(Le Chatelier)** — অর্থাৎ **forward** (NH_3 উৎপাদনের) দিকে সাম্য সরে যাবে
অতএব, NH_3 অপসারণ করলে সিস্টেম অপসারিত পদার্থ পুনরায় তৈরি করার চেষ্টা করবে — তাই সাম্য পুনরায় **forward** দিকে সরে যাবে

P-27_Q-54 ১০ নম্বর

৫৪. প্রদত্ত, $\Delta n(\text{forward}) = 1 - 2 = -1$ (মোল কমে)
$\Delta H < 0$ **(exothermic)**
এখানে, আয়তন অর্ধেক করলে চাপ বাড়ে → সাম্য কম মোলসংখ্যার (N_2O_4, **forward**) দিকে সরে যায় → N_2O_4 বৃদ্ধি পায়, NO_2 হ্রাস পায়
অতএব, তাপমাত্রা বাড়ালে **exothermic** বিক্রিয়ার সাম্য **reverse (endothermic** দিক, NO_2) দিকে সরে যায় → N_2O_4 হ্রাস পায়, NO_2 বৃদ্ধি পায়

P-28_Q-55 ১০ নম্বর

৫৫. প্রদত্ত, $K_p = 4.0, K_c = 0.50, T = 298\,K, R = 0.0821$
এখানে, $\frac{K_p}{K_c} = (RT)^{\Delta n} \implies \frac{4.0}{0.50} = 8.0 = (RT)^{\Delta n}$
আবার, $RT = 0.0821 \times 298 = 24.47$
সুতরাং, $\Delta n = \frac{\ln 8}{\ln 24.47} = \frac{2.079}{3.198} \approx 0.65$
অতএব, নিকটতম পূর্ণসংখ্যা হিসেবে $\Delta n = 1$

P-28_Q-56 ১০ নম্বর

৫৬. প্রদত্ত, $K_c = 0.040, T = 500\,K$
এখানে, $\Delta n = 2 - 0 = 2$ (কঠিন বাদে)
আবার, $RT = 0.0821 \times 500 = 41.05$
অতএব, $K_p = K_c(RT)^2 = 0.040 \times (41.05)^2 = 0.040 \times 1685.1 \approx 67.4\,atm^2$

P-29_Q-57 ১০ নম্বর

৫৭. প্রদত্ত, $k_1 = 2.0 \times 10^{-4}\,s^{-1}$ (300 K), $k_2 = 1.6 \times 10^{-3}\,s^{-1}$ (330 K)
এখানে, $\frac{k_2}{k_1} = 8.0 \implies \ln 8 = 2.0794$
আবার, $\frac{1}{300} - \frac{1}{330} = 3.0303 \times 10^{-4}\,K^{-1}$
সুতরাং, $E_a = \frac{8.314\times2.0794}{3.0303\times10^{-4}} = 57052\,Jmol^{-1} \approx 57.05\,kJmol^{-1}$
অতএব, $k_{315} = k_{300} \times \exp\left[\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{315}\right)\right] = 2.0 \times 10^{-4} \times \exp(1.089) = 2.0 \times 10^{-4} \times 2.972 \approx 5.94 \times 10^{-4}\,s^{-1}$

P-29_Q-58 ১০ নম্বর

৫৮. **(a)** ধরি, 15 মিনিটে বিয়োজিত A এর চাপ = x mmHg
এখানে, মোট চাপ = $(200 - x) + 2x + x = 200 + 2x$
প্রশ্নমতে, $200 + 2x = 380$, সুতরাং $x = 90$ mmHg
অবশিষ্ট A এর আংশিক চাপ, $p_A = 200 - 90 = 110$ mmHg
প্রথম ক্রমের জন্য, $k_1 = \frac{1}{t} \ln \frac{p_0}{p_A}$, যেখানে $t = 15 \text{ min} = 900$ s
$k_1 = \frac{1}{900} \ln \frac{200}{110} = \frac{0.5978}{900}$
অতএব, $k_1 = 6.64 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

(b) মোট চাপ 500 mmHg হলে, $200 + 2x = 500$, সুতরাং $x = 150$ mmHg
তখন $p_A = 200 - 150 = 50$ mmHg
$t = \frac{1}{k_1} \ln \frac{p_0}{p_A} = \frac{\ln 4}{6.64 \times 10^{-4}} = \frac{1.3863}{6.64 \times 10^{-4}}$
$t = 2087$ s
অতএব, $t \approx 34.8$ মিনিট

ব্যাখ্যা:

P-30_Q-59 ১০ নম্বর

৫৯. **(a)** দ্বিতীয় ক্রমের বিক্রিয়ার জন্য, $t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k[X]_0}$
সুতরাং, $k = \frac{1}{t_{\frac{1}{2}}[X]_0} = \frac{1}{25 \times 0.40} = \frac{1}{10}$
অতএব, $k = 0.1 \text{ Lmol}^{-1}\text{s}^{-1}$

(b) এখানে, $[X]_0 = 0.15$ M; 80% সম্পন্ন হলে অবশিষ্ট 20%
$[X] = 0.20 \times 0.15 = 0.03$ M
তাপমাত্রা অপরিবর্তিত বলে $k = 0.1 \text{ Lmol}^{-1}\text{s}^{-1}$
দ্বিতীয় ক্রমের সমাকলিত সমীকরণ, $kt = \frac{1}{[X]} - \frac{1}{[X]_0}$
$0.1 \times t = \frac{1}{0.03} - \frac{1}{0.15} = 33.33 - 6.67 = 26.67$
অতএব, $t = 266.7$ s

ব্যাখ্যা:

P-30_Q-60 ১০ নম্বর

৬০. মোলার ভর: $C_6H_6 = 78$, $C_4H_{10} = 58$, $O_2 = 32$, $C_4H_2O_3 = 98$, $CO_2 = 44$, $H_2O = 18$
(ক) এখানে, পরমাণু অর্থনীতি হলো কাঙ্ক্ষিত উৎপাদের ভর ও বিক্রিয়কসমূহের মোট ভরের অনুপাতের শতকরা মান।
পথ-**A:** পরমাণু অর্থনীতি $= \frac{2 \times 98}{(2 \times 78) + (9 \times 32)} \times 100 = \frac{196}{444} \times 100 = 44.14\%$
পথ-**B:** পরমাণু অর্থনীতি $= \frac{2 \times 98}{(2 \times 58) + (7 \times 32)} \times 100 = \frac{196}{340} \times 100 = 57.65\%$
সুতরাং, পথ-**B** অধিক সবুজ; কারণ এতে উপজাত হিসেবে CO_2 উৎপন্ন হয় না, কেবল পানি উৎপন্ন হয়, ফলে বিক্রিয়কের অধিক সংখ্যক পরমাণু উৎপাদে স্থান পায়।
(খ) বেনজিনের মোল সংখ্যা $= \frac{39}{78} = 0.5$ mol
মোলার সমতুল্য $O_2 = 0.5 \times \frac{9}{2} = 2.25$ mol, অর্থাৎ $2.25 \times 32 = 72$ g
তাত্ত্বিক উৎপাদ $= 0.5 \times 98 = 49$ g; প্রকৃত উৎপাদ $= 49 \times 0.80 = 39.2$ g
মোট ইনপুট ভর $= 39 + 72 + 50 = 161$ g
পুনরুদ্ধারকৃত দ্রাবক $= 50 \times 0.90 = 45$ g **(এটি বর্জ্য নয়)**
বর্জ্যের মোট ভর $= 161 - 39.2 - 45 = 76.8$ g
অতএব, **E-factor** $= \frac{76.8}{39.2} = 1.96$
ব্যাখ্যা: