P-01_Q-01 ১০ নম্বর

১. প্রদত্ত সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমীকরণ: $L_1 : 4x - 3y + 10 = 0$
$L_2 : 4x - 3y - 10 = 0$
বর্গক্ষেত্রটির বাহুর দৈর্ঘ্য (a) = L_1 ও L_2 সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব: $a = \frac{|10-(-10)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$ একক।
ধরি, বর্গক্ষেত্রের অপর দুটি বাহু L_3 ও L_4।
যেহেতু বর্গের সন্নিহিত বাহুগুলো পরস্পর লম্ব, তাই L_3 এর সমীকরণ হবে: $3x + 4y + k = 0$
প্রশ্নমতে, L_3 রেখাটি $(2, 3)$ বিন্দুগামী: $3(2) + 4(3) + k = 0 \Rightarrow 6 + 12 + k = 0 \Rightarrow k = -18$
$\therefore L_3$ এর সমীকরণ: $3x + 4y - 18 = 0$
L_4 বাহুটি L_3 এর সমান্তরাল, তাই এর সমীকরণ ধরি $3x + 4y + c = 0$।
এই রেখা এবং L_3 এর মধ্যবর্তী দূরত্ব হবে বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান (4 একক)।
$\therefore \frac{|c-(-18)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4$
$\Rightarrow \frac{|c+18|}{5} = 4 \Rightarrow c + 18 = \pm 20$
(+) নিয়ে: $c = 20 - 18 = 2$
(−) নিয়ে: $c = -20 - 18 = -38$
$\therefore$ অপর বাহুদ্বয়ের সমীকরণ: $3x + 4y + 2 = 0$ অথবা $3x + 4y - 38 = 0$

P-01_Q-02 ১০ নম্বর

২. প্রথমে রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় করি: $2x + 3y - 5 = 0$ ..... **(i)**
$x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow x = 4y - 3$ ..... **(ii)**
x এর মান **(i)** নং এ বসিয়ে পাই: $2(4y - 3) + 3y - 5 = 0$
$\Rightarrow 8y - 6 + 3y - 5 = 0$
$\Rightarrow 11y = 11 \Rightarrow y = 1$
$\therefore x = 4(1) - 3 = 1$
ছেদবিন্দুটি হলো $(1, 1)$।
অক্ষদ্বয় হতে সমান অংশ ছেদকারী রেখার সমীকরণ ধরি, $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a$
যেহেতু রেখাটি $(1, 1)$ বিন্দুগামী: $\therefore 1 + 1 = a \Rightarrow a = 2$
a এর মান সমীকরণে বসিয়ে পাই: $x + y = 2$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x + y - 2 = 0$

P-02_Q-03 ১০ নম্বর

৩. ধরি, আপতিত রশ্মি $L_1 : x - y = 2 \Rightarrow m_1 = 1$
আয়নারূপী রেখা $L_2 : 2x - y = 3 \Rightarrow m_2 = 2$
প্রথমে রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (আপতন বিন্দু Q) নির্ণয় করি: $x - (2x - 3) = 2$ ($y = 2x - 3$ বসিয়ে)
$\Rightarrow -x + 3 = 2 \Rightarrow x = 1$
$\therefore y = 1 - 2 = -1$
$\therefore$ আপতন বিন্দু $Q(1, -1)$।
প্রতিফলিত রশ্মির ঢাল m_3 হলে, প্রতিফলনের সূত্রানুসারে আপতন ও প্রতিফলন কোণ সমান। $\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} = \frac{m_3-m_2}{1+m_3m_2}$
$\Rightarrow \frac{2-1}{1+2(1)} = \frac{m_3-2}{1+2m_3}$
$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{m_3-2}{1+2m_3}$
$\Rightarrow 1 + 2m_3 = 3m_3 - 6$
$\Rightarrow m_3 = 7$
$Q(1, -1)$ বিন্দুগামী এবং $m_3 = 7$ ঢালবিশিষ্ট প্রতিফলিত রশ্মির সমীকরণ: $y - (-1) = 7(x - 1)$
$\Rightarrow y + 1 = 7x - 7$

$\Rightarrow 7x - y - 8 = 0$

$\therefore$ প্রতিফলিত রশ্মির সমীকরণ: $7x - y - 8 = 0$

P-02_Q-04 ১০ নম্বর

৪. $P(1, 5)$ এবং $Q(k, -1)$ এর মধ্যবিন্দু $M\left(\frac{k+1}{2}, 2\right)$।

PQ রেখার ঢাল, $m_{PQ} = \frac{-1-5}{k-1} = \frac{-6}{k-1}$

লম্বদ্বিখণ্ডকটি PQ এর উপর লম্ব হওয়ায় এর ঢাল, $m = \frac{k-1}{6}$

$M\left(\frac{k+1}{2}, 2\right)$ বিন্দুগামী এবং $m = \frac{k-1}{6}$ ঢালবিশিষ্ট লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $y - 2 = \frac{k-1}{6}\left(x - \frac{k+1}{2}\right)$

রেখাটির y-অক্ষের ছেদকাংশ -2 হওয়ায় এটি $(0, -2)$ বিন্দুগামী।

সমীকরণে $x = 0, y = -2$ বসিয়ে পাই: $-2 - 2 = \frac{k-1}{6}\left(0 - \frac{k+1}{2}\right)$

$\Rightarrow -4 = -\frac{k^2-1}{12}$

$\Rightarrow 48 = k^2 - 1 \Rightarrow k^2 = 49$

$\Rightarrow k = \pm 7$

$\therefore$ k-এর ধনাত্মক মান 7।

P-03_Q-05 ১০ নম্বর

৫. ধরি, সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

প্রশ্নমতে, y-ছেদক = x-ছেদক $+3 \Rightarrow b = a + 3$

রেখাটি $(2, 2)$ বিন্দুগামী, সুতরাং সমীকরণে বিন্দুটি বসালে: $\frac{2}{a} + \frac{2}{a+3} = 1$

$\Rightarrow \frac{2(a+3)+2a}{a(a+3)} = 1$

$\Rightarrow 4a + 6 = a^2 + 3a$

$\Rightarrow a^2 - a - 6 = 0$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাই: $a^2 - 3a + 2a - 6 = 0 \Rightarrow (a - 3)(a + 2) = 0$

$\therefore a = 3$ অথবা $a = -2$

$a = 3$ হলে $b = 6 \Rightarrow$ সমীকরণ: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 2x + y - 6 = 0$

$a = -2$ হলে $b = 1 \Rightarrow$ সমীকরণ: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $2x + y - 6 = 0$ এবং $x - 2y + 2 = 0$

P-03_Q-06 ১০ নম্বর

৬. প্রদত্ত সমান বাহুদ্বয়ের ঢাল যথাক্রমে $m_1 = 2$ এবং $m_2 = \frac{1}{2}$।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হওয়ায় ৩য় বাহু (যার ঢাল m ধরি) সমান বাহু দুটির সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করবে।

$\therefore \frac{m-2}{1+2m} = \pm\frac{\frac{1}{2}-m}{1+\frac{m}{2}}$

$\Rightarrow \frac{m-2}{1+2m} = \pm\frac{1-2m}{2+m}$

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই: $(m - 2)(2 + m) = (1 - 2m)(1 + 2m)$

$\Rightarrow m^2 - 4 = 1 - 4m^2$

$\Rightarrow 5m^2 = 5 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

$(-)$ চিহ্ন নিলে কাল্পনিক মান আসে $(m^2 - 4 = -(1 - 4m^2) \Rightarrow 3m^2 = -3)$, যা গ্রহণযোগ্য নয়।

$(3, 4)$ বিন্দুগামী ৩য় বাহুর সমীকরণ:

$m = 1$ হলে: $y - 4 = 1(x - 3) \Rightarrow x - y + 1 = 0$

$m = -1$ হলে: $y - 4 = -1(x - 3) \Rightarrow x + y - 7 = 0$

$\therefore$ সম্ভাব্য সমীকরণ: $x - y + 1 = 0$ এবং $x + y - 7 = 0$

P-04_Q-07 ১০ নম্বর

৭. আমরা জানি, ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্বদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই পরিকেন্দ্র।

AB বাহুর মধ্যবিন্দু: $M_1\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{5+5}{2}\right) = (2, 5)$

AB এর ঢাল $= \frac{5-5}{5-(-1)} = 0$

সুতরাং, AB এর লম্বদ্বিখণ্ডকটি y-অক্ষের সমান্তরাল এবং এর সমীকরণ $x = 2$ **..... (i)**

BC বাহুর মধ্যবিন্দু: $M_2\left(\frac{5+6}{2}, \frac{5-2}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$
BC এর ঢাল $= \frac{-2-5}{6-5} = -7$। সুতরাং BC এর লম্বদ্বিখণ্ডকের ঢাল $= \frac{1}{7}$।
লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $y - \frac{3}{2} = \frac{1}{7}\left(x - \frac{11}{2}\right)$
$\Rightarrow 7y - \frac{21}{2} = x - \frac{11}{2} \Rightarrow x - 7y + 5 = 0$ **..... (ii)**
পরিকেন্দ্র নির্ণয়ে $x = 2$ সমীকরণ **(ii)**-এ বসালে: $2 - 7y + 5 = 0 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = 1$
$\therefore$ পরিকেন্দ্র $O(2, 1)$।
ব্যাসার্ধ $R = OA = \sqrt{(-1-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$ একক।
$\therefore$ পরিকেন্দ্র $(2, 1)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 একক।

P-04_Q-08 ১০ নম্বর

৮. প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়: $A(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ এবং $B(a\cos\beta, a\sin\beta)$
AB রেখার মধ্যবিন্দু M-এর স্থানাঙ্ক: $\left(\frac{a}{2}(\cos\alpha + \cos\beta), \frac{a}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)\right)$
মূলবিন্দু $O(0, 0)$ এবং M বিন্দুগামী রেখার ঢাল: $m = \frac{\frac{a}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)-0}{\frac{a}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)-0} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$
ত্রিকোণমিতিক সূত্র প্রয়োগ করে: $m = \frac{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$
প্রশ্নমতে, রেখাটির ঢাল $m = \sqrt{3}$।
$\therefore \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$
$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$
$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$

P-05_Q-09 ১ নম্বর

৯. প্রথমে রেখাদ্বয়ের সমীকরণের ধ্রুবক পদগুলো ধনাত্মক করে লিখি: $-4x - 3y + 6 = 0$ **..... (i)**
$-5x - 12y + 10 = 0$ **..... (ii)**
আমরা জানি, ধ্রুবক পদ ধনাত্মক রাখার পর সমদ্বিখণ্ডকের সূত্রে ধনাত্মক (+) চিহ্ন নিয়ে যে সমদ্বিখণ্ডকটি পাওয়া যায়, তা সর্বদা মূলবিন্দু ধারী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
সুতরাং, মূলবিন্দু ধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $\frac{-4x-3y+6}{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}} = +\frac{-5x-12y+10}{\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}}$
$\Rightarrow \frac{-4x-3y+6}{5} = \frac{-5x-12y+10}{13}$
$\Rightarrow 13(-4x - 3y + 6) = 5(-5x - 12y + 10)$
$\Rightarrow -52x - 39y + 78 = -25x - 60y + 50$
$\Rightarrow -52x + 25x - 39y + 60y + 78 - 50 = 0$
$\Rightarrow -27x + 21y + 28 = 0$
$\Rightarrow 27x - 21y - 28 = 0$
$\therefore$ মূলবিন্দু ধারী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $27x - 21y - 28 = 0$

P-05_Q-10 ১০ নম্বর

১০. প্রদত্ত ঢাল $m = \tan\theta = \frac{3}{4}$।
যেহেতু $\tan\theta > 0$, তাই $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ উভয়েই একই চিহ্নযুক্ত হবে।
সমকোণী ত্রিভুজ হতে অতিভুজ $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$।
$\therefore \cos\theta = \pm\frac{4}{5}$ এবং $\sin\theta = \pm\frac{3}{5}$
প্যারামেট্রিক সমীকরণ ব্যবহার করে নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক (যেখানে দূরত্ব $r = 5$): $x = x_1 + r\cos\theta = 1 \pm 5\left(\frac{4}{5}\right) = 1 \pm 4$
$y = y_1 + r\sin\theta = 2 \pm 5\left(\frac{3}{5}\right) = 2 \pm 3$
(+) চিহ্ন নিয়ে: $x = 1 + 4 = 5$ এবং $y = 2 + 3 = 5 \Rightarrow P_1(5, 5)$
(−) চিহ্ন নিয়ে: $x = 1 - 4 = -3$ এবং $y = 2 - 3 = -1 \Rightarrow P_2(-3, -1)$
$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দুসমূহ $(5, 5)$ এবং $(-3, -1)$।

P-06_Q-11 ১০ নম্বর

১১. প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ঢাল: $m_1 = \frac{4}{3}$ এবং $m_2 = -\frac{5}{12}$।
নির্ণেয় রেখার ঢাল m হলে, এটি উভয়ের সাথে সমান কোণ তৈরি করে: $\frac{m-\frac{4}{3}}{1+\frac{4m}{3}} = -\frac{m-(-\frac{5}{12})}{1+m(-\frac{5}{12})}$

$\Rightarrow \frac{3m-4}{3+4m} = -\frac{12m+5}{12-5m}$

বজ্রগুণন করে পাই: $(3m-4)(12-5m) = -(12m+5)(3+4m)$

$\Rightarrow 36m - 15m^2 - 48 + 20m = -(36m + 48m^2 + 15 + 20m)$

$\Rightarrow -15m^2 + 56m - 48 = -48m^2 - 56m - 15$

$\Rightarrow 33m^2 + 112m - 33 = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করে: $m = \frac{-112\pm\sqrt{12544-4(33)(-33)}}{66} = \frac{-112\pm\sqrt{16900}}{66} = \frac{-112\pm130}{66}$

$\therefore m = \frac{18}{66} = \frac{3}{11}$ অথবা $m = \frac{-242}{66} = -\frac{11}{3}$

$(1,-1)$ বিন্দুগামী রেখাসমূহের সমীকরণ:

$m = \frac{3}{11}$ হলে: $y + 1 = \frac{3}{11}(x-1) \Rightarrow 3x - 11y - 14 = 0$

$m = -\frac{11}{3}$ হলে: $y + 1 = -\frac{11}{3}(x-1) \Rightarrow 11x + 3y - 8 = 0$

P-06_Q-12 ১০ নম্বর

১২. প্রদত্ত সমীকরণ: $t - \frac{2}{t} = \mu \Rightarrow t^2 - \mu t - 2 = 0$

মূলদ্বয় t_1 ও t_2 হওয়ায়: $t_1 + t_2 = \mu$ এবং $t_1 t_2 = -2$

প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(at_1^2, 2at_1)$ এবং $B(at_2^2, 2at_2)$ এর সংযোগকারী রেখার সমীকরণ: $y - 2at_1 = \frac{2at_2-2at_1}{at_2^2-at_1^2}(x - at_1^2) = \frac{2a(t_2-t_1)}{a(t_2-t_1)(t_2+t_1)}(x - at_1^2)$

$\Rightarrow y - 2at_1 = \frac{2}{t_1+t_2}(x - at_1^2)$

$\Rightarrow y(t_1 + t_2) - 2at_1(t_1 + t_2) = 2x - 2at_1^2$

$\Rightarrow y(t_1 + t_2) - 2at_1^2 - 2at_1 t_2 = 2x - 2at_1^2$

$\Rightarrow y(t_1 + t_2) - 2a(-2) = 2x$ ($t_1 t_2 = -2$ বসিয়ে)

মান বসিয়ে পাই: $\mu y + 4a = 2x \Rightarrow 2x - \mu y - 4a = 0$

এটি $(2x - 4a) - \mu y = 0$ আকারে লেখা যায়। এটি $L_1 + \mu L_2 = 0$ প্রকৃতির, যা নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

রেখাটি $2x - 4a = 0 \Rightarrow x = 2a$ এবং $y = 0$ এর ছেদবিন্দুগামী।

$\therefore$ রেখাটি সর্বদা নির্দিষ্ট বিন্দু $(2a, 0)$ দিয়ে যায়। (প্রমাণিত)

ব্যাখ্যা:

P-07_Q-13 ১০ নম্বর

১৩. যেহেতু সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে, তাই এর ঢাল: $m = \tan 45° = 1$

রেখাটি $(-1, 2)$ বিন্দুগামী। সুতরাং এর সমীকরণ: $y - 2 = 1(x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = x + 1 \Rightarrow x - y + 3 = 0$ ..... **(i)**

প্রদত্ত অপর রেখা: $3x - y = 5 \Rightarrow 3x - y - 5 = 0$ ..... **(ii)**

(i) ও **(ii)** নং সমীকরণ বিয়োগ করে ছেদবিন্দু নির্ণয় করি: $(3x - x) - y - (-y) - 5 - 3 = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$

x এর মান **(i)** নং এ বসিয়ে: $4 - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 7$

$\therefore$ ছেদবিন্দুটি হলো $Q(4, 7)$।

নির্ণেয় রেখাংশের দৈর্ঘ্য হবে প্রদত্ত বিন্দু $P(-1, 2)$ এবং ছেদবিন্দু $Q(4, 7)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব: $d = \sqrt{(4-(-1))^2 + (7-2)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2}$

$= \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক।

P-07_Q-14 ১০ নম্বর

১৪. ΔOAB এর ক্ষেত্রফলের নির্ণায়ক মান (δ_{OAB}): $\delta_{OAB} = x_O(y_A - y_B) + x_A(y_B - y_O) + x_B(y_O - y_A)$

$= 0 + 2(4 - 0) + 1(0 - 3) = 8 - 3 = 5$

ΔOAC এর ক্ষেত্রফলের নির্ণায়ক মান (δ_{OAC}): $\delta_{OAC} = 0 + 2(y - 0) + x(0 - 3) = 2y - 3x$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}|\delta_{OAC}| = |\delta_{OAB}|$

$\Rightarrow |2y - 3x| = 10 \Rightarrow 2y - 3x = \pm 10$

OA রেখার সমীকরণ: $3x - 2y = 0$

যেহেতু $B(1,4)$ বিন্দুটি OA এর একটি পার্শ্বে অবস্থিত, বিন্দুটি সমীকরণে বসালে: $3(1)-2(4)=3-8=-5$ (যা ঋণাত্মক)।
যেহেতু $C(x,y)$ বিন্দুটিও একই পার্শ্বে অবস্থিত, তাই $3x-2y<0 \Rightarrow 2y-3x>0$ হবে।
অতএব, মডুলাস ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে খুলবে: $2y-3x=10 \Rightarrow 3x-2y+10=0$
$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $3x-2y+10=0$

P-08_Q-15 ১০ নম্বর

১৫. প্রদত্ত বিন্দুসমূহ: $O(0,0)$, $A(6a,0)$ এবং $B(0,6b)$
AB এর মধ্যবিন্দু D-এর স্থানাঙ্ক: $\left(\frac{6a+0}{2}, \frac{0+6b}{2}\right)=(3a,3b)$
ΔABO এর ভরকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক: $\left(\frac{6a+0+0}{3}, \frac{0+6b+0}{3}\right)=(2a,2b)$
ধরি, সঞ্চারপথের উপর যেকোনো বিন্দু $P(x,y)$
P ও G বিন্দুগামী রেখার ঢাল, $m_{PG}=\frac{y-2b}{x-2a}$
P ও D বিন্দুগামী রেখার ঢাল, $m_{PD}=\frac{y-3b}{x-3a}$
প্রশ্নমতে, $\angle GPD=90^\circ \Rightarrow PG \perp PD \Rightarrow m_{PG}\times m_{PD}=-1$
$\Rightarrow \left(\frac{y-2b}{x-2a}\right)\left(\frac{y-3b}{x-3a}\right)=-1$
$\Rightarrow (y-2b)(y-3b)=-(x-2a)(x-3a)$
$\Rightarrow y^2-5by+6b^2=-(x^2-5ax+6a^2)$
$\Rightarrow x^2+y^2-5ax-5by+6a^2+6b^2=0$
$\therefore P$ বিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ: $x^2+y^2-5ax-5by+6(a^2+b^2)=0$

P-08_Q-16 ১০ নম্বর

১৬. PQ বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(5-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ একক।
PQ বাহুর ঢাল, $m_{PQ}=\frac{1-3}{5-2}=-\frac{2}{3}$
যেহেতু $\angle QPR=90^\circ$, তাই $PR \perp PQ \Rightarrow m_{PR}=\frac{3}{2}$।
$P(2,3)$ বিন্দুগামী PR রেখার সমীকরণ: $y-3=\frac{3}{2}(x-2) \Rightarrow 2y-6=3x-6 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x$
ধরি, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2a,3a)$।
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot PR=13 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot PR=13 \Rightarrow PR=2\sqrt{13}$
দূরত্বের সূত্রানুসারে $P(2,3)$ ও $R(2a,3a)$ এর দূরত্ব: $PR^2=(2a-2)^2+(3a-3)^2 \Rightarrow (2\sqrt{13})^2=4(a-1)^2+9(a-1)^2$
$\Rightarrow 52=13(a-1)^2 \Rightarrow (a-1)^2=4 \Rightarrow a-1=\pm 2$
$a=3$ হলে $x=6, y=9$ (প্রথম চতুর্ভাগ)।
$a=-1$ হলে $x=-2, y=-3$ (তৃতীয় চতুর্ভাগ)।
যেহেতু R প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত, $\therefore R$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(6,9)$।

P-09_Q-17 ১০ নম্বর

১৭. প্রদত্ত $x+2y=4$ রেখার ঢাল $=-\frac{1}{2}$।
এর লম্ব রেখার (যেই পথ বরাবর দূরত্ব মাপা হবে তার) ঢাল $m=2$।
$P(1,3)$ বিন্দুগামী এবং 2 ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ: $y-3=2(x-1) \Rightarrow y=2x+1$
এখন গন্তব্য রেখা $3x-y+5=0$ এবং গমনপথ $y=2x+1$ এর ছেদবিন্দু নির্ণয় করি: $3x-(2x+1)+5=0$
$\Rightarrow 3x-2x-1+5=0 \Rightarrow x+4=0 \Rightarrow x=-4$
$\therefore y=2(-4)+1=-8+1=-7$
ছেদবিন্দু $Q(-4,-7)$।
নির্ণেয় দূরত্ব হবে $P(1,3)$ এবং $Q(-4,-7)$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব: $d=\sqrt{(-4-1)^2+(-7-3)^2}=\sqrt{(-5)^2+(-10)^2}$
$=\sqrt{25+100}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ একক।

P-09_Q-18 ১০ নম্বর

১৮. ১ম রেখা: $x\tan\theta-y-\sqrt{8}r=0$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ হতে এর লম্ব দূরত্ব $d_1 = 4$: $\frac{|-\sqrt{8}\,r|}{\sqrt{\tan^2\theta+(-1)^2}} = 4 \Rightarrow \frac{\sqrt{8}\,r}{\sec\theta} = 4 \Rightarrow \sqrt{8}\,r\cos\theta = 4$ (প্রথম চতুর্ভাগ ধরে)

বর্গ করে পাই: $8r^2\cos^2\theta = 16 \Rightarrow r^2\cos^2\theta = 2$ ..... **(i)**

২য় রেখা: $x + y\cot\theta - r = 0$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ হতে এর লম্ব দূরত্ব $d_2 = 3$: $\frac{|-r|}{\sqrt{1^2+\cot^2\theta}} = 3 \Rightarrow \frac{r}{\csc\theta} = 3 \Rightarrow r\sin\theta = 3$

বর্গ করে পাই: $r^2\sin^2\theta = 9$ ..... **(ii)**

(i) ও **(ii)** নং সমীকরণ যোগ করে পাই: $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 2 + 9$

$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 11$

$\Rightarrow r^2(1) = 11 \Rightarrow r = \pm\sqrt{11}$

$\therefore$ r-এর ধনাত্মক মান $\sqrt{11}$।

ব্যাখ্যা:

P-10_Q-19 ১০ নম্বর

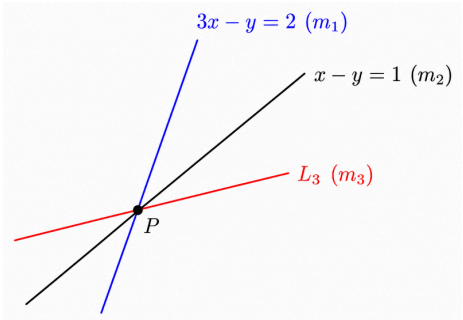
১৯. ধরি, আয়নারূপী রেখা $L_2 : x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$

$\therefore$ আয়নার ঢাল, $m_2 = 1$

প্রদত্ত বস্তুরেখা $L_1 : 3x - y = 2 \Rightarrow y = 3x - 2$

$\therefore$ বস্তুরেখার ঢাল, $m_1 = 3$

ধরি, আয়নার সাপেক্ষে L_1 রেখার প্রতিবিম্ব রেখাটি হলো L_3 এবং এর ঢাল m_3



প্রতিফলনের সূত্রানুসারে, বস্তুরেখা আয়নার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, প্রতিবিম্ব রেখাও আয়নার সাথে একই কোণ উৎপন্ন করবে। $\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} = \frac{m_2-m_3}{1+m_2m_3}$

মানগুলো বসিয়ে পাই: $\frac{3-1}{1+3(1)} = \frac{1-m_3}{1+1(m_3)}$

$\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1-m_3}{1+m_3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1-m_3}{1+m_3}$

$\Rightarrow 1 + m_3 = 2 - 2m_3$

$\Rightarrow 3m_3 = 1 \Rightarrow m_3 = \frac{1}{3}$

এখন রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু P নির্ণয় করি: $x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$

$3x - y = 2 \Rightarrow 3(y + 1) - y = 2 \Rightarrow 3y + 3 - y = 2 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$। ছেদবিন্দু P $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$।

প্রতিবিম্ব রেখাটি P বিন্দুগামী এবং এর ঢাল $m_3 = \frac{1}{3}$। সমীকরণ: $y - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{x}{3} - \frac{1}{6}$

$\Rightarrow 6y + 3 = 2x - 1$

$\Rightarrow 2x - 6y - 4 = 0 \Rightarrow x - 3y - 2 = 0$

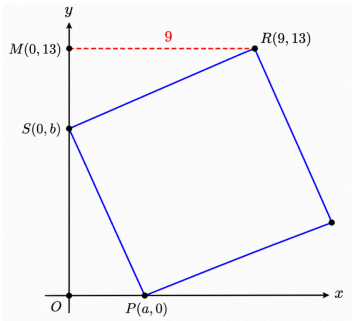
$\therefore$ প্রতিবিম্ব রেখার সমীকরণ: $x - 3y - 2 = 0$

P-10_Q-20 ১০ নম্বর

২০. ধরি, $P(a, 0)$ এবং $S(0, b)$। যেহেতু P ও S ধনাত্মক অক্ষে অবস্থিত, তাই $a > 0$ এবং $b > 0$।

$R(9, 13)$ হতে y-অক্ষের উপর RM লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে M বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে $(0, 13)$।

সুতরাং, $RM = 9$ এবং $OM = 13$



সমকোণী ত্রিভুজ ΔPOS এবং ΔSMR-এর মধ্যে:

১. $\angle POS = \angle SMR = 90°$

২. অতিভুজ PS = অতিভুজ SR (বর্গক্ষেত্রের বাহু)

৩. যেহেতু $\angle PSR = 90°$, সরলকোণের হিসাব অনুযায়ী, $\angle MSR = \angle SPO$

অতএব, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ($\Delta POS \cong \Delta SMR$)।

সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমান হওয়ায়: $OS = RM \Rightarrow b = 9$

এবং $SM = PO = a$

চিত্র হতে আমরা দেখতে পাই, $OM = OS + SM \Rightarrow 13 = b + a$

$\Rightarrow 13 = 9 + a \Rightarrow a = 4$

$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 0)$ এবং S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 9)$।

P-11_Q-21 ১ নম্বর

২১. এখানে, $\Delta[A] = 0.80 - 0.50 = 0.30\,M$ এবং $\Delta t = 30\,s$

A-এর **disappearance rate** $= \frac{\Delta[A]}{\Delta t} = \frac{0.30}{30} = 0.010\,molL^{-1}s^{-1}$

বিক্রিয়ার হার, $r = \frac{1}{2} \times 0.010 = 0.0050\,molL^{-1}s^{-1}$

B-এর **disappearance rate** $= 1 \times r = 0.0050\,molL^{-1}s^{-1}$

অতএব, C-এর **formation rate** $= 3 \times r = 3 \times 0.0050 = 0.015\,molL^{-1}s^{-1}$

P-11_Q-22 ১ নম্বর

২২. এখানে, $k_1 = 1.5 \times 10^{-3}\,s^{-1}$ (300 K), $k_2 = 7.5 \times 10^{-3}\,s^{-1}$ (320 K)

$\frac{k_2}{k_1} = 5.0 \implies \ln 5 = 1.6094$

আবার, $\frac{1}{300} - \frac{1}{320} = 2.0833 \times 10^{-4}\,K^{-1}$

সুতরাং, $E_a = \frac{8.314 \times 1.6094}{2.0833 \times 10^{-4}} = 64228\,Jmol^{-1}$

অতএব, $E_a \approx 64.2\,kJmol^{-1}$

P-12_Q-23 ১ নম্বর

২৩. এখানে, **slope** $= -\frac{E_a}{R} = -3600\,K$

সুতরাং, $E_a = 3600 \times 8.314 = 29930.4\,Jmol^{-1} \approx 29.9\,kJmol^{-1}$

আবার, $\frac{k_{310}}{k_{300}} = \exp\left[\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{310}\right)\right] = \exp(3600 \times 1.0753 \times 10^{-4}) = \exp(0.3871)$

অতএব, $E_a \approx 29.9\,kJmol^{-1}$; $\frac{k_{310}}{k_{300}} \approx 1.47$

P-12_Q-24 ১ নম্বর

২৪. এখানে, $\mu = 3$ প্রতি 10°C

$r_{25} = 2.0 \times 10^{-5}\,molL^{-1}s^{-1}$

25°C → 45°C = দুইটি 10°C ধাপ $\implies$ গুণক $= 3^2 = 9$

সুতরাং, $r_{45} = 2.0 \times 10^{-5} \times 9$

অতএব, $r_{45} = 1.8 \times 10^{-4}\,molL^{-1}s^{-1}$

P-13_Q-25 ১ নম্বর

২৫. এখানে, $\frac{k_2}{k_1} = 50$, $T = 300\,K$

$\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{E_{a1} - E_{a2}}{RT}$

সুতরাং, $E_{a1} - E_{a2} = RT \times \ln 50 = 8.314 \times 300 \times 3.912 = 9757\ \text{Jmol}^{-1}$
অতএব, E_a প্রায় $9.76\ \text{kJmol}^{-1}$ কমেছে

P-13_Q-26 ১ নম্বর

২৬. এখানে, প্রাথমিক $H_2 = Br_2 = 0.80\ \text{mol}$, $V = 4.0\ \text{L}$; সাম্যাবস্থায় $HBr = 1.00\ \text{mol}$
স্টয়কিওমিতি (1 : 1 : 2) অনুযায়ী, H_2 ও Br_2 বিক্রিয়া করেছে যথাক্রমে $\frac{1.00}{2} = 0.50\ \text{mol}$ করে
সুতরাং সাম্যাবস্থায়, $H_2 = Br_2 = 0.80 - 0.50 = 0.30\ \text{mol}$
ঘনমাত্রা ($\div 4.0\ \text{L}$): $[H_2] = [Br_2] = 0.075\ \text{M}$, $[HBr] = 0.25\ \text{M}$
অতএব, $K_c = \frac{[HBr]^2}{[H_2][Br_2]} = \frac{(0.25)^2}{0.075 \times 0.075} = \frac{0.0625}{0.005625} \approx 11.11$

P-14_Q-27 ১ নম্বর

২৭. এখানে, প্রাথমিক $N_2 = 1.0$, $H_2 = 3.0\ \text{mol}$; $V = 5.0\ \text{L}$; N_2 বিক্রিয়া করেছে $0.20\ \text{mol}$
H_2 বিক্রিয়া করেছে $= 3 \times 0.20 = 0.60\ \text{mol}$; NH_3 উৎপন্ন $= 2 \times 0.20 = 0.40\ \text{mol}$
সাম্যাবস্থায়, $N_2 = 1.0 - 0.20 = 0.80\ \text{mol}$, $H_2 = 3.0 - 0.60 = 2.40\ \text{mol}$, $NH_3 = 0.40\ \text{mol}$
ঘনমাত্রা ($\div 5.0\ \text{L}$): $[N_2] = 0.16$, $[H_2] = 0.48$, $[NH_3] = 0.08\ \text{M}$
সুতরাং, $K_c = \frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3} = \frac{(0.08)^2}{0.16 \times 0.48^3} = \frac{0.0064}{0.16 \times 0.1106}$
অতএব, $K_c \approx 0.362$

P-14_Q-28 ১ নম্বর

২৮. এখানে, প্রাথমিক $PCl_5 = 1.0\ \text{mol}$, $V = 2.0\ \text{L}$, 40% বিয়োজিত
বিয়োজিত $PCl_5 = 0.40 \times 1.0 = 0.40\ \text{mol}$; $PCl_3 = Cl_2 = 0.40\ \text{mol}$ উৎপন্ন
সাম্যাবস্থায়, $PCl_5 = 1.0 - 0.40 = 0.60\ \text{mol}$
ঘনমাত্রা ($\div 2.0\ \text{L}$): $[PCl_5] = 0.30$, $[PCl_3] = [Cl_2] = 0.20\ \text{M}$
সুতরাং, $K_c = \frac{[PCl_3][Cl_2]}{[PCl_5]} = \frac{0.20 \times 0.20}{0.30} = \frac{0.04}{0.30}$
অতএব, $K_c \approx 0.133$

P-15_Q-29 ১ নম্বর

২৯. এখানে, $K_c = 0.80$, $T = 450\ \text{K}$
$\Delta n = 2 - 4 = -2$
আবার, $RT = 0.0821 \times 450 = 36.945$; $(RT)^2 = 1364.9$
সুতরাং, $K_p = \frac{K_c}{(RT)^2} = \frac{0.80}{1364.9}$
অতএব, $K_p \approx 5.86 \times 10^{-4}$

P-15_Q-30 ১ নম্বর

৩০. এখানে, $K_p = 2.0, K_c = 0.10, T = 350\ \text{K}$
$\frac{K_p}{K_c} = (RT)^{\Delta n} = \frac{2.0}{0.10} = 20$
আবার, $RT = 0.0821 \times 350 = 28.735$
সুতরাং, $\Delta n = \frac{\ln 20}{\ln 28.735} = \frac{2.996}{3.359} \approx 0.89$
অতএব, $\Delta n \approx 1$ (নিকটতম পূর্ণসংখ্যা)

P-16_Q-31 ১ নম্বর

৩১. এখানে, $P(H_2) = 0.25, P(I_2) = 0.40, P(HI) = 1.00\ \text{atm}$
$K_p = \frac{P(HI)^2}{P(H_2)P(I_2)} = \frac{(1.00)^2}{0.25 \times 0.40} = \frac{1}{0.10} = 10.0$
অতএব, বিপরীত বিক্রিয়ার $K_p' = \frac{1}{K_p} = \frac{1}{10.0} = 0.10$

P-16_Q-32 ১ নম্বর

৩২. এখানে, $P(NO_2) = 0.80, P(N_2O_4) = 0.40\ \text{atm}$
$K_p = \frac{P(N_2O_4)}{P(NO_2)^2} = \frac{0.40}{(0.80)^2} = \frac{0.40}{0.64} = 0.625$

আয়তন অর্ধেক করলে চাপ দ্বিগুণ হয় ($\Delta n = 1 - 2 = -1$, কম মোলের দিকে) — তাই সাম্য **forward** (N_2O_4 গঠনের) দিকে সরে যাবে
অতএব, $K_p = 0.625$; আয়তন অর্ধেক করলে সাম্য N_2O_4 **(forward)** দিকে সরে যাবে

P-17_Q-33 ১ নম্বর

৩৩. এখানে, $[CO] = 0.20, [H_2O] = 0.30, [CO_2] = 0.40, [H_2] = 0.50\,M$
$K_c = \frac{[CO_2][H_2]}{[CO][H_2O]} = \frac{0.40\times0.50}{0.20\times0.30} = \frac{0.20}{0.06}$
অতএব, $K_c \approx 3.33$

P-17_Q-34 ১ নম্বর

৩৪. এখানে, $\Delta n(\text{forward}) = -1, \Delta H < 0$
O_2 যোগ করলে সাম্য **forward** দিকে সরে যায় **(excess reactant** খরচ করতে) $\rightarrow SO_3$ বৃদ্ধি পায়
চাপ বাড়ালে সাম্য কম মোলসংখ্যার (SO_3, **forward)** দিকে সরে যায় $\rightarrow SO_3$ আরও বৃদ্ধি পায়
তাপমাত্রা কমালে **exothermic** বিক্রিয়ায় সাম্য **forward** দিকে সরে যায় $\rightarrow SO_3$ পুনরায় বৃদ্ধি পায়
অতএব, তিনটি পরিবর্তনই ক্রমান্বয়ে SO_3-এর উৎপাদন বৃদ্ধি করবে

P-18_Q-35 ১ নম্বর

৩৫. এখানে, $\Delta n(\text{forward}) = 2 - 1 = +1, \Delta H > 0$ **(endothermic)**
তাপমাত্রা বৃদ্ধি: **endothermic** বিক্রিয়ার সাম্য **forward** দিকে সরে যায় (তাপ শোষণের দিকে) $\rightarrow NO_2$ বৃদ্ধি পায়
আয়তন বৃদ্ধি (চাপ হ্রাস): $\Delta n > 0$ হওয়ায় সাম্য বেশি মোলসংখ্যার (NO_2, **forward)** দিকে সরে যায় $\rightarrow NO_2$ আরও বৃদ্ধি পায়
অতএব, উভয় পরিবর্তনেই NO_2-এর পরিমাণ বৃদ্ধি পাবে

P-18_Q-36 ১ নম্বর

৩৬. এখানে, $K_c = 2.0 \times 10^{-2}, \Delta n = -2, T = 298\,K$
$RT = 0.0821 \times 298 = 24.4658$; $(RT)^2 = 598.6$
সুতরাং, $K_p = \frac{K_c}{(RT)^2} = \frac{0.020}{598.6} = 3.34 \times 10^{-5}$
অতএব, বিপরীত বিক্রিয়ার $K_p' = \frac{1}{K_p} = \frac{1}{3.34\times10^{-5}} \approx 2.99 \times 10^4$

P-19_Q-37 ১ নম্বর

৩৭. এখানে, $K_p = 0.50, K_c = 0.020, \Delta n = 1$
$\Delta n = 1$ হওয়ায়, $K_p = K_c \times RT \implies RT = \frac{K_p}{K_c} = \frac{0.50}{0.020} = 25$
সুতরাং, $T = \frac{25}{R} = \frac{25}{0.0821}$
অতএব, $T \approx 304.5\,K$ ($\approx 31.5°C$)

P-19_Q-38 ১ নম্বর

৩৮. সাম্যাবস্থায় ঘনমাত্রা স্থির থাকার কারণ হলো **forward** ও **reverse** বিক্রিয়ার হার সমান — বিক্রিয়া বন্ধ হয়ে যাওয়া নয়। প্রতিটি মুহূর্তে অসংখ্য অণু **reactant** থেকে **product**-এ এবং সমপরিমাণ অণু **product** থেকে **reactant**-এ রূপান্তরিত হচ্ছে।
অতএব, নিট পরিবর্তন শূন্য হলেও আণবিক পর্যায়ে বিক্রিয়া অবিরাম চলতে থাকে — এজন্যই একে গতিশীল **(dynamic)** সাম্যাবস্থা বলা হয়, স্থিতিশীল **(static)** নয়।

P-20_Q-39 ১ নম্বর

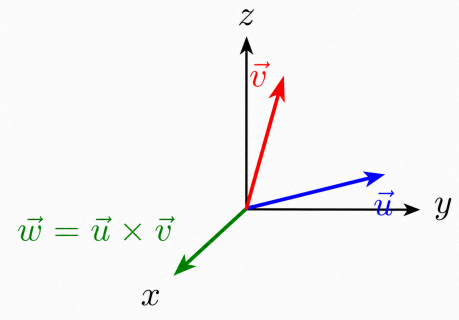
৩৯. খাঁটি কঠিন ও খাঁটি তরল পদার্থের ঘনমাত্রা **(mol/**আয়তন বা **density/molar mass)** তাদের পরিমাণের ওপর নির্ভর করে না — এটি সবসময় ধ্রুবক থাকে।
যেহেতু এই ধ্রুবক মান আগে থেকেই K_c/K_p-এর মধ্যে অন্তর্ভুক্ত (একীভূত) করা হয়, তাই আলাদাভাবে **expression**-এ লেখা হয় না।
উদাহরণ: $CaCO_3(s) \rightleftharpoons CaO(s) + CO_2(g)$ — এখানে $K_c = [CO_2]$ এবং $K_p = P(CO_2)$, $CaCO_3$ বা CaO-এর পরিমাণ **expression**-এ থাকে না।

P-20_Q-40 ১ নম্বর

৪০. **Concentration** পরিবর্তন: $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$-এ H_2 যোগ করলে সাম্য **forward** দিকে সরে যায়, কিন্তু K_c-এর মান অপরিবর্তিত থাকে — শুধু অবস্থান বদলে।
Pressure/আয়তন পরিবর্তন: শুধু $\Delta n \neq 0$ হলেই প্রভাব ফেলে — যেমন $PCl_5(g) \rightleftharpoons PCl_3(g) + Cl_2(g)$ ($\Delta n = 1$) চাপে প্রভাবিত হয়, কিন্তু $H_2(g) + I_2(g) \rightleftharpoons 2HI(g)$ ($\Delta n = 0$) চাপে অপ্রভাবিত থাকে।
Temperature পরিবর্তন: **exothermic** $2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$-এ তাপ বৃদ্ধি সাম্যকে **reactant** দিকে সরায় এবং K_c-এর মানও পরিবর্তিত হয় — এটি একমাত্র পরিবর্তন যা K-এর মান নিজেই বদলে দেয়।

P-21_Q-41 ১ নম্বর

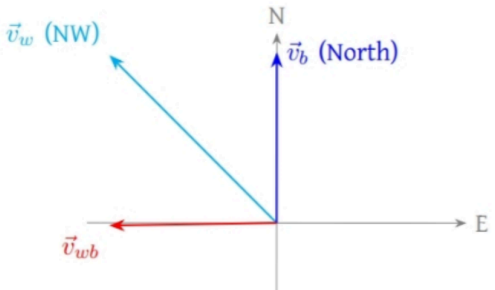
৪১.



প্রথমে বামপক্ষ **(LHS)** বিস্তৃত করি:
$\text{LHS} = (1 + |\vec{u}|^2)(1 + |\vec{v}|^2) = 1 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ — (i)
এবার ডানপক্ষ **(RHS)** দুটি আলাদা অংশে বিস্তৃত করি:
১ম অংশ:
$\text{Part}_1 = (1 - \vec{u} \cdot \vec{v})^2 = 1 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$
২য় অংশ (ধরি $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$):
$\text{Part}_2 = |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$
$\Rightarrow \text{Part}_2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$
যেহেতু $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ ভেক্টরটি $\vec{u}$ এবং $\vec{v}$ উভয়টির উপর লম্ব, তাই তাদের ডট গুণফল শূন্য হবে:
$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ এবং $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
অতএব,
$\text{Part}_2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$
এখন ডানপক্ষের দুটি অংশ যোগ করি:
$\text{RHS} = \text{Part}_1 + \text{Part}_2$
$\Rightarrow \text{RHS} = [1 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2] + [|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})]$
$\Rightarrow \text{RHS} = 1 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + [(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2]$
ল্যাগ্রাঞ্জের অভেদ **(Lagrange's Identity)** $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ প্রয়োগ করে পাই:
$\text{RHS} = 1 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$
সমীকরণ **(i)** এবং এই প্রাপ্ত ফলাফল তুলনা করে দেখা যাচ্ছে:
LHS = RHS (প্রমাণিত)

P-21_Q-42 ১ নম্বর

৪২.



পূর্ব দিককে $+x$ এবং উত্তর দিককে $+y$ অক্ষ ধরি। স্থির নৌকায় পতাকাটি বাতাসের প্রকৃত বেগে উড়বে। উত্তর-পশ্চিম দিক বরাবর (অনুভূমিকের সাথে $135°$ কোণে) বাতাসের বেগ:
$\vec{v}_w = 71\cos 135°\hat{i} + 71\sin 135°\hat{j} \approx -50.2\hat{i} + 50.2\hat{j}$ km/h
চলমান নৌকার বেগ, $\vec{v}_b = 51\hat{j}$ km/h
নৌকার সাপেক্ষে বাতাসের আপেক্ষিক বেগ (পতাকা ওড়ার দিক), $\vec{v}_{wb}$:

$\vec{v}_{wb} = \vec{v}_w - \vec{v}_b = (-50.2\hat{i} + 50.2\hat{j}) - 51\hat{j} = -50.2\hat{i} - 0.8\hat{j}$ km/h

পতাকা ওড়ার বেগ:

$|\vec{v}_{wb}| = \sqrt{(-50.2)^2 + (-0.8)^2} \approx 50.21$ km/h

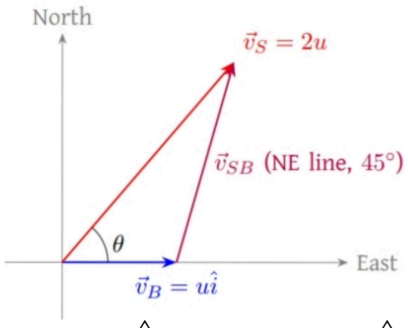
দিক (দক্ষিণ দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ θ):

$\tan\theta = \frac{|v_x|}{|v_y|} = \frac{50.2}{0.8} = 62.75 \Rightarrow \theta \approx 89.09°$ (পশ্চিম দিকে)

উত্তর: পতাকাটি 50.21 km/h বেগে দক্ষিণ দিক হতে 89.09° পশ্চিমে উড়বে।

P-22_Q-43 ১ নম্বর

৪৩.



পূর্ব দিককে $\hat{i}$ এবং উত্তর দিককে $\hat{j}$ ধরি।

নৌকার বেগ, $\vec{v}_B = u\hat{i}$

জাহাজের বেগ, $\vec{v}_S = 2u\cos\theta\hat{i} + 2u\sin\theta\hat{j}$

নৌকার সাপেক্ষে জাহাজের আপেক্ষিক বেগ ($\vec{v}_{SB}$):

$\vec{v}_{SB} = \vec{v}_S - \vec{v}_B = (2u\cos\theta - u)\hat{i} + 2u\sin\theta\hat{j}$

যেহেতু আপেক্ষিক গতিপথ সোজা উত্তর-পূর্ব (**North-East**) দিকে (অর্থাৎ 45° কোণে), তাই x-উপাংশ এবং y-উপাংশ সমান হতে হবে:

$2u\cos\theta - u = 2u\sin\theta$

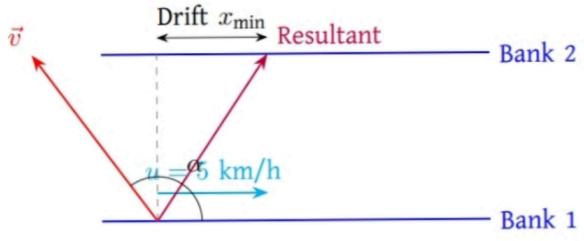
$u \neq 0$ হওয়ায় উভয় পক্ষকে u দ্বারা ভাগ করে পাই:

$2\cos\theta - 1 = 2\sin\theta \Rightarrow 2\cos\theta - 2\sin\theta = 1$

$\Rightarrow \cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{2}$ (প্রমাণিত)

P-22_Q-44 ১ নম্বর

৪৪.



স্রোতের বেগ $u = 5$ km/h, সাঁতারুর বেগ $v = 3$ km/h, এবং নদীর প্রস্থ $d = 1$ km।

যেহেতু $u > v$, সেহেতু সোজা নদী পার হওয়া অসম্ভব, কারণ $\cos\alpha = -\frac{u}{v} = -\frac{5}{3} < -1$, যা বাস্তবসম্মত নয়।

সর্বনিম্ন বিচ্যুতির (**drift**) শর্ত: নদীর পাড় বরাবর বিচ্যুতি x:

$x = (u + v\cos\alpha)t = (u + v\cos\alpha)\frac{d}{v\sin\alpha}$

বিচ্যুতি x কে সর্বনিম্ন করতে $\frac{dx}{d\alpha} = 0$ হতে হবে, যা থেকে পাওয়া যায়:

$\cos\alpha = -\frac{v}{u} = -\frac{3}{5} = -0.6 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0.6) \approx 126.87°$

সর্বনিম্ন বিচ্যুতির মান: যেহেতু $\cos\alpha = -0.6$, সেহেতু $\sin\alpha = \sqrt{1-(-0.6)^2} = 0.8$।

$x_{min} = \frac{d}{v}\left(\frac{u+v\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5+3(-0.6)}{0.8}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3.2}{0.8}\right) = \frac{4}{3}$ km ≈ 1.33 km

উত্তর: নদীটি সোজা পার হওয়া সম্ভব নয়। 126.87° কোণে সাঁতার কাটলে বিচ্যুতি সর্বনিম্ন 1.33 km হবে।

P-23_Q-45 ১ নম্বর

৪৫.



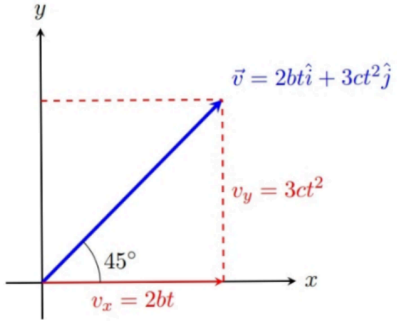
এককসমূহকে m/s-এ রূপান্তর করি:
মোটরসাইকেলের (পুলিশের) বেগ, $v_p = 30\,\text{km/h} = 30 \times \frac{5}{18} = \frac{25}{3}\,\text{m/s}$
চোরের গাড়ির বেগ, $v_t = 192\,\text{km/h} = 192 \times \frac{5}{18} = \frac{160}{3}\,\text{m/s}$
পিস্তলের সাপেক্ষে বুলেটের আপেক্ষিক বেগ, $v_{bp} = 150\,\text{m/s}$
মাটির সাপেক্ষে বুলেটের প্রকৃত বেগ (v_b):
$v_b = v_{bp} + v_p = 150 + \frac{25}{3} = \frac{475}{3}\,\text{m/s}$
চোরের গাড়ির সাপেক্ষে বুলেটের আপেক্ষিক বেগ (যে বেগে আঘাত করবে):
$v_{bt} = v_b - v_t = \frac{475}{3} - \frac{160}{3} = \frac{315}{3} = 105\,\text{m/s}$

P-23_Q-46 ১ নম্বর

৪৬. ধরি, উত্তর দিক বরাবর অনুভূমিক একক ভেক্টর $\hat{i}$ এবং খাড়া উপরের দিক বরাবর উল্লম্ব একক ভেক্টর $\hat{j}$।
মাটির সাপেক্ষে বিমানের বেগ, $\vec{v}_p = 500\hat{i}\,\text{km/h}$
বিমানের সাপেক্ষে গুলির আপেক্ষিক বেগ, $\vec{v}_{g/p} = 1000\hat{j}\,\text{km/h}$
ভেক্টর যোগের আপেক্ষিক সূত্রানুসারে, মাটির সাপেক্ষে গুলির প্রকৃত বেগ ($\vec{v}_g$):
$\vec{v}_g = \vec{v}_p + \vec{v}_{g/p} = (500\hat{i} + 1000\hat{j})\,\text{km/h}$
গুলির লব্ধি বেগের মান:
$|\vec{v}_g| = \sqrt{500^2 + 1000^2} = \sqrt{250000 + 1000000} = \sqrt{1250000} \approx 1118.03\,\text{km/h}$
উল্লম্বের সাথে উৎপন্ন কোণ (θ): গুলির বেগ ভেক্টরটি উল্লম্ব অক্ষ ($\hat{j}$) এর সাথে θ কোণ তৈরি করলে:
$\tan\theta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{500}{1000} = 0.5 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0.5) \approx 26.565°$
উত্তর: লব্ধি বেগ 1118.03 km/h এবং উল্লম্বের সাথে কোণ 26.565°।

P-24_Q-47 ১ নম্বর

৪৭. অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ কে সময়ের সাপেক্ষে অন্তরীকরণ **(differentiation)** করলে বেগ ভেক্টর পাওয়া যায়:
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(bt^2\hat{i} + ct^3\hat{j})$
$\vec{v} = 2bt\hat{i} + 3ct^2\hat{j}$
এখানে বেগের **x**-অংশ $v_x = 2bt$ এবং **y**-অংশ $v_y = 3ct^2$ ।
শর্তানুসারে, বেগ ভেক্টরটি **x** ও **y** অক্ষের সাথে 45° কোণে থাকবে। অতএব:
$\tan 45° = \frac{v_y}{v_x}$
$\Rightarrow 1 = \frac{3ct^2}{2bt}$
যেহেতু $t > 0$ (সময় ধনাত্মক), উভয় পক্ষকে t দ্বারা ভাগ করে পাই:
$\Rightarrow 3ct = 2b$
$\Rightarrow t = \frac{2b}{3c}$
উত্তর: $t = \frac{2b}{3c}$ সময়ে বেগ ভেক্টরটি **x** ও **y** অক্ষের সাথে 45° কোণে অবস্থান করবে।



P-24_Q-48 ১ নম্বর

৪৮. প্রথমে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটি নির্ণয় করি:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$\overrightarrow{AB} = (3-1)\hat{i} + (-4-2)\hat{j} + (5-(-3))\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$

এবার $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরটি নির্ণয় করি:

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (5\hat{i} - 10\hat{j} + 13\hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k})$

$\overrightarrow{BC} = (5-3)\hat{i} + (-10-(-4))\hat{j} + (13-5)\hat{k}$

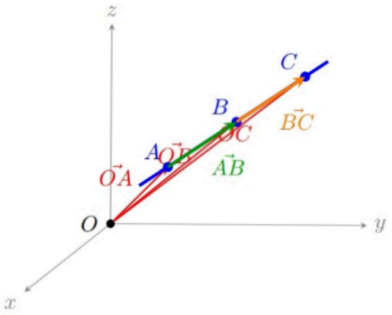
$\overrightarrow{BC} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$

এখানে দেখা যাচ্ছে যে:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

যেহেতু $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টর দুটি সমান এবং তাদের একটি সাধারণ বিন্দু **B** রয়েছে, সেহেতু ভেক্টরদ্বয় একই সরলরেখা বরাবর অবস্থিত।

অতএব, **A, B** ও **C** বিন্দু তিনটি সমরেখিক **(collinear)**। **(প্রমাণিত)**



P-25_Q-49 ১ নম্বর

৪৯. ধরি, **xy**-তলে অবস্থিত যেকোনো ভেক্টর $\vec{b} = x\hat{i} + y\hat{j}$ **(যেহেতু এটি xy-তলে অবস্থিত, তাই z-উপাংশ শূন্য)**।

যেহেতু $\vec{b}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ এর উপর লম্ব, তাই এদের ডট গুণফল শূন্য হবে:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\Rightarrow (2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j}) = 0$

$\Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$

অতএব, ভেক্টরটি দাঁড়ায়:

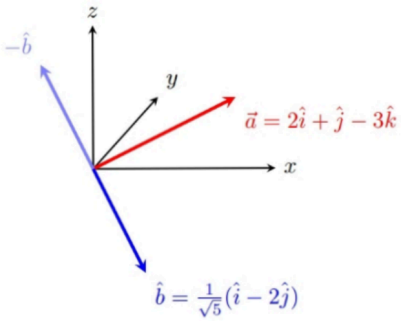
$\vec{b} = x\hat{i} - 2x\hat{j}$

এখন এই ভেক্টরের অভিমুখে একক ভেক্টর $\hat{b}$ নির্ণয় করি:

$\hat{b} = \pm\frac{\vec{b}}{|b|} = \pm\frac{x\hat{i}-2x\hat{j}}{\sqrt{x^2+(-2x)^2}}$

$\hat{b} = \pm\frac{x(\hat{i}-2\hat{j})}{\sqrt{5x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j})$

$\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j})$



P-25_Q-50 ১ নম্বর

৫০. ধরি, ধ্রুব কৌণিক বেগ ভেক্টর $\vec{\omega} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$ এবং অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$।

প্রথমে $\vec{v}$ নির্ণয় করি:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = \hat{i}(\omega_y z - \omega_z y) - \hat{j}(\omega_x z - \omega_z x) + \hat{k}(\omega_x y - \omega_y x)$$

এখন, $\vec{v}$ এর কার্ল $(\vec{\nabla} \times \vec{v})$ নির্ণয় করি:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix}$$

$\hat{i}$-উপাংশ:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z) = \omega_x - (-\omega_x) = 2\omega_x$$

$\hat{j}$-উপাংশ:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_y z - \omega_z y)\right] = -(-\omega_y - \omega_y) = 2\omega_y$$

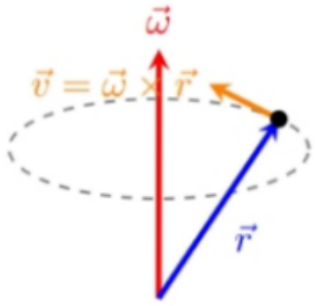
$\hat{k}$-উপাংশ:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\omega_z x - \omega_x z) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega_y z - \omega_z y) = \omega_z - (-\omega_z) = 2\omega_z$$

অতএব,

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\omega_x \hat{i} + 2\omega_y \hat{j} + 2\omega_z \hat{k} = 2\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \text{ (প্রমাণিত)}$$



P-26_Q-51 ১ নম্বর

৫১. আমরা জানি ভেক্টর অভেদ:

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{F}) = \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{F} \cdot (\vec{\nabla}\phi)$$

এখানে, $\phi = r^3$ এবং $\vec{F} = \vec{r}$।

১. আমরা জানি:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

২. r^3 এর গ্রেডিয়েন্ট $(\vec{\nabla} r^3)$ নির্ণয় করি:

$$\vec{\nabla}(r^3) = 3r^2 \vec{\nabla}(r)$$

যেহেতু $\vec{\nabla}(r) = \frac{\vec{r}}{r}$ (অবস্থান ভেক্টরের মান r এর গ্রেডিয়েন্ট), সেহেতু:

$$\vec{\nabla}(r^3) = 3r^2 \frac{\vec{r}}{r} = 3r\vec{r}$$

এখন মূল সূত্রে মানগুলো বসিয়ে পাই:

$$\vec{\nabla} \cdot (r^3 \vec{r}) = r^3(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) + \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} r^3)$$

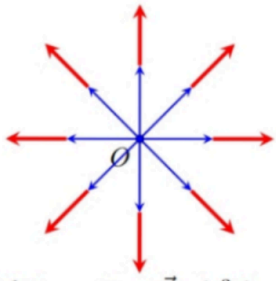
$$= r^3(3) + \vec{r} \cdot (3r\vec{r})$$

$$= 3r^3 + 3r(\vec{r} \cdot \vec{r})$$

যেহেতু $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$:

$$= 3r^3 + 3r(r^2) = 3r^3 + 3r^3 = 6r^3$$

উত্তর: $6r^3$



Radial Expansion: $\vec{\nabla} \cdot (r^3\vec{r}) = 6r^3$

P-26_Q-52 ১ নম্বর

৫২. প্রথমে ভেক্টর ক্ষেত্রটিকে কার্তেসীয় উপাংশে রূপান্তর করি:

$\vec{E} = \frac{\hat{x}\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{x^2+y^2+z^2} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$

এখানে:

$E_x = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $E_y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}$, $E_z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$

অঘূর্ণনশীল প্রমাণ করতে আমাদের দেখাতে হবে যে $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ ।

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x^2+y^2+z^2} & \frac{y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{vmatrix}$$

$\hat{i}$-উপাংশটি হিসাব করি:

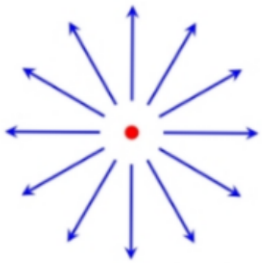
$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)$

$= \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \left(\frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = 0$

একইভাবে প্রতিসাম্যতার **(symmetry)** কারণে $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ উপাংশদ্বয়ও শূন্য হবে।

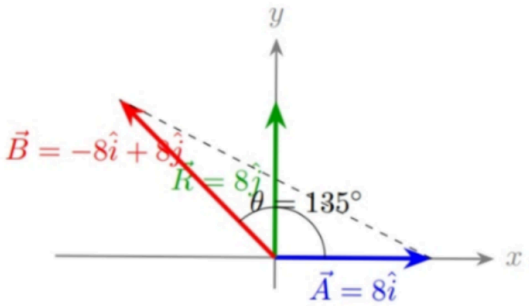
$\text{Curl}\ \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$

যেহেতু কার্লের মান একটি শূন্য ভেক্টর, তাই $\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^2}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল **(irrotational)**। (দেখানো হলো)


Radial Irrotational Field ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$)

P-27_Q-53 ১ নম্বর

৫৩.



প্রশ্নমতে, $\vec{A}$ ভেক্টরটি **x**-অক্ষ বরাবর এবং এর মান **8:**

$\vec{A} = 8\hat{i}$

লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ শুধুমাত্র **y**-অক্ষ বরাবর এবং এর মান **8:**

$\vec{R} = 8\hat{j}$

লব্ধি ভেক্টরের সমীকরণ হতে:

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \vec{R} - \vec{A}$
$\vec{B} = 8\hat{j} - 8\hat{i} = -8\hat{i} + 8\hat{j}$
$\vec{B}$ ভেক্টরের মান:
$|\vec{B}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ unit ≈ 11.31 unit
x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ (θ)**:**
এখানে $B_x < 0$ এবং $B_y > 0$, ফলে ভেক্টরটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে **(second quadrant)** অবস্থিত:
$\theta = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{|B_y|}{|B_x|}\right) = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right)$
$\theta = 180° - 45° = 135°$
উত্তর: মান $8\sqrt{2}$ unit এবং কোণ $135°$

P-27_Q-54 ১ নম্বর

৫৪. কণাটির অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$:
$\vec{r} = 2t^2\hat{i} + (t^2 - 4t)\hat{j} + (3t - 5)\hat{k}$
তাৎক্ষণিক বেগ, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$:
$\vec{v} = 4t\hat{i} + (2t - 4)\hat{j} + 3\hat{k}$
তাৎক্ষণিক ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$:
$\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$
যেহেতু ত্বরণটি সময়-স্বাধীন **(constant acceleration),** তাই $t = 1$ s সময়েও $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$।
এখন, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিমুখে ত্বরণের উপাংশ (a_b)**:**
$a_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|b|} = \frac{(4\hat{i}+2\hat{j})\cdot(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}$
$a_b = \frac{4(1)+2(-3)+0(2)}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{4-6}{\sqrt{14}} = -\frac{2}{\sqrt{14}}$ unit
উপাংশের পরম মান **(magnitude):**
$|a_b| = \frac{2}{\sqrt{14}}$ unit ≈ 0.535 unit
উত্তর: $\frac{2}{\sqrt{14}}$ (বা 0.535)

P-28_Q-55 ১ নম্বর

৫৫. প্রদত্ত সেটে মোট ৮টি ভেক্টর রয়েছে, যা একটি ঘনকের ৮টি শীর্ষবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করে: $v_1 = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $v_2 = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $v_3 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $v_4 = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ এবং তাদের ঋণাত্মক ভেক্টরসমূহ যথাক্রমে $v_5 = -v_4$, $v_6 = -v_3$, $v_7 = -v_2$, $v_8 = -v_1$।
এখানে পরস্পরের সমান্তরাল বা বিপরীতমুখী **(collinear)** ৪টি যুগল রয়েছে: (v_1, v_8), (v_2, v_7), (v_3, v_6), (v_4, v_5)।
৮টি ভেক্টর থেকে যেকোনো ৩টি ভেক্টর মোট নির্বাচনের উপায়:
$\binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$
এখন, ৩টি ভেক্টর সমতলীয় **(coplanar)** হওয়ার শর্তাবলী:
১. তাদের মধ্যে যেকোনো দুটি ভেক্টর সমরেখিক **(collinear/opposite)** হলে: ৪টি জোড়ার যেকোনো ১টি জোড়া নির্বাচন করার পর বাকি ৬টি ভেক্টর থেকে যেকোনো ১টি ভেক্টরকে তৃতীয় ভেক্টর হিসেবে নিলে তারা সমতলীয় হয়। এর উপায়:
$\binom{4}{1} \times 6 = 4 \times 6 = 24$ টি
২. কোনো ভেক্টর সমরেখিক নয় কিন্তু তারা একই তলে অবস্থিত। যেহেতু ঘনকের যেকোনো ৩টি বিপরীতমুখী না হওয়া কর্ণ ভেক্টরের নির্ণায়ক সর্বদা অশুন্য ($\det \not\equiv 0$), তাই সমরেখিক যুগল বাদে অন্য কোনো সমতলীয় ত্রয়ী ভেক্টর গঠন করা সম্ভব নয়।
অতএব, অসমতলীয় **(non-coplanar)** ভেক্টর নির্বাচনের নিট উপায়:
$2^p = 56 - 24 = 32$
$\Rightarrow 2^p = 2^5 \Rightarrow p = 5$
উত্তর: $p = 5$

P-28_Q-56 ১ নম্বর

৫৬.

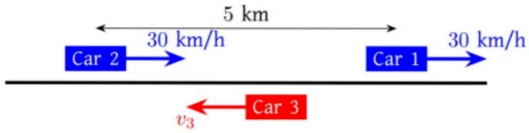


Figure 7: গাড়ি তিনটির গতির চিত্র (Relative motion of the three cars)

ধরি প্রথম দুটি গাড়ির বেগ $v_1 = v_2 = 30$ km/h এবং ৩য় গাড়ির প্রকৃত বেগ v_3।
বিপরীত অভিমুখে গতিশীল হওয়ায় ১মে ও ২য় গাড়ির সাপেক্ষে ৩য় গাড়ির আপেক্ষিক বেগ:

$v_{rel} = v_3 + 30$ km/h

দেওয়া আছে, $d = 5$ km এবং সময় $t = 4$ min $= \frac{4}{60}$ h $= \frac{1}{15}$ h।
আপেক্ষিক গতিবেগের সূত্রানুসারে:

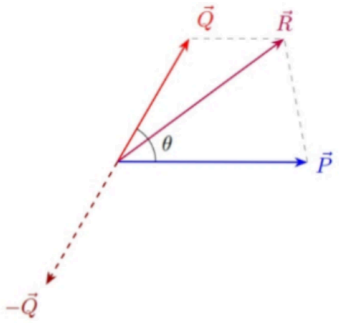
$d = v_{rel} \times t \Rightarrow 5 = (v_3 + 30) \times \frac{1}{15}$

$\Rightarrow v_3 + 30 = 75 \Rightarrow v_3 = 45$ km/h

উত্তর: 45 km/h

P-29_Q-57 ১ নম্বর

৫৭.



ধরি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha$
১ম ক্ষেত্রে:

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha \quad -(i)$

২য় ক্ষেত্রে (Q এর মান দ্বিগুণ করা হলে লব্ধি 2R হয়):

$(2R)^2 = P^2 + (2Q)^2 + 2P(2Q)\cos\alpha$

$\Rightarrow 4R^2 = P^2 + 4Q^2 + 4PQ\cos\alpha \quad -(ii)$

৩য় ক্ষেত্রে (Q কে বিপরীতমুখী করলে লব্ধি 2R হয়):

$(2R)^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(180° - \alpha)$

$\Rightarrow 4R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha \quad -(iii)$

সমীকরণ **(i)** এবং **(iii)** যোগ করে পাই:

$R^2 + 4R^2 = (P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha) + (P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha)$

$\Rightarrow 5R^2 = 2P^2 + 2Q^2$

$\Rightarrow 2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0 \quad -(iv)$

সমীকরণ **(ii)** থেকে $2\times$ সমীকরণ **(i)** বিয়োগ করে পাই:

$4R^2 - 2R^2 = (P^2 + 4Q^2 + 4PQ\cos\alpha) - 2(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha)$

$\Rightarrow 2R^2 = -P^2 + 2Q^2$

$\Rightarrow P^2 - 2Q^2 + 2R^2 = 0 \quad -(v)$

সমীকরণ **(iv)** ও **(v)** হতে বজ্রগুণন **(Cross-multiplication)** করে পাই:

$\frac{P^2}{(2)(2)-(-5)(-2)} = \frac{Q^2}{(-5)(1)-(2)(2)} = \frac{R^2}{(2)(-2)-(2)(1)}$

$\Rightarrow \frac{P^2}{4-10} = \frac{Q^2}{-5-4} = \frac{R^2}{-4-2}$

$\Rightarrow \frac{P^2}{-6} = \frac{Q^2}{-9} = \frac{R^2}{-6}$

$\Rightarrow \frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$

উভয় পক্ষে বর্গমূল করে পাই:

$P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$

উত্তর: $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$

P-29_Q-58 ১ নম্বর

৫৮.

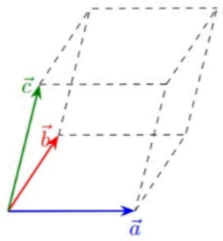


Figure 9: সামান্তরিকীয় ঘনক (Parallelepiped formed by vectors)

প্রথম ঘনকের আয়তন $V_1 = |[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]|$ এবং দ্বিতীয় ঘনকের আয়তন $V_2 = |[\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}]|$।
ভেক্টরগুলোর সহগ দিয়ে গঠিত ম্যাট্রিক্স M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

স্কেলার ত্রয়ী গুণফলের বৈশিষ্ট্যানুসারে $[\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}] = \det(M) \cdot [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$।
$\det(M)$ এর মান নির্ণয় করি:
$\det(M) = 1[(-2)(2) - (1)(-4)] - 1[(3)(2) - (1)(1)] - 2[(3)(-4) - (-2)(1)]$
$\Rightarrow \det(M) = 1(0) - 1(5) - 2(-10) = -5 + 20 = 15$
অতএব, $V_2 = 15V_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 15$
উত্তর: 15

P-30_Q-59 ১ নম্বর

৫৯. ভেক্টরদ্বয়ের মান ও ডট গুণফল:
$|\vec{a}| = \frac{\sqrt{1^2+(-2)^2}}{\sqrt{5}} = 1$, $x|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}{\sqrt{14}} = 1$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1(2)+(-2)(1)+0(3)}{\sqrt{70}} = 0$
অর্থাৎ, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি লম্ব একক ভেক্টর।

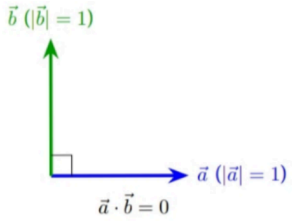


Figure 5: পরস্পর লম্ব একক ভেক্টরদ্বয় (Orthogonal unit vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$)

ভেক্টর ত্রয়ী গুণফলের সূত্র $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$ প্রয়োগ করে পাই:
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = [\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})]\vec{b} - [\vec{b} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})]\vec{a}$
$= [\vec{a} \cdot \vec{a} - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})]\vec{b} - [\vec{b} \cdot \vec{a} - 2(\vec{b} \cdot \vec{b})]\vec{a}$
$= (1 - 0)\vec{b} - (0 - 2)\vec{a} = 2\vec{a} + \vec{b}$

মূল রাশিতে এটি বসিয়ে পাই:
$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 4(1) + 1 + 0 = 5$

উত্তর: 5

P-30_Q-60 ১ নম্বর

৬০.

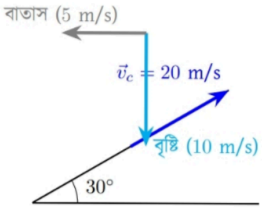


Figure 3: গাড়ি, বৃষ্টি ও বাতাসের বেগের দিক (Velocity vectors of car, rain, and wind)

পূর্ব দিককে $+x$ অক্ষ $(\hat{i})$ এবং খাড়া উপরের দিককে $+y$ অক্ষ $(\hat{j})$ ধরি।

গাড়ির বেগ ভেক্টর $(\vec{v}_c)$:

$$\vec{v}_c = 20\cos 30^\circ \hat{i} + 20\sin 30^\circ \hat{j} = 10\sqrt{3}\hat{i} + 10\hat{j} \text{ m/s}$$

বৃষ্টির প্রকৃত বেগ ভেক্টর $(\vec{v}_{rain})$:

$$\vec{v}_{rain} = -5\hat{i} - 10\hat{j} \text{ m/s}$$

গাড়িচালকের সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ $(\vec{v}_{rel})$:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{rain} - \vec{v}_c = (-5\hat{i} - 10\hat{j}) - (10\sqrt{3}\hat{i} + 10\hat{j})$$

$$\vec{v}_{rel} = -(5 + 10\sqrt{3})\hat{i} - 20\hat{j} \text{ m/s} \approx -22.32\hat{i} - 20\hat{j} \text{ m/s}$$

উত্তর: $-(5 + 10\sqrt{3})\hat{i} - 20\hat{j}$ m/s **(**বা $-22.32\hat{i} - 20\hat{j}$ m/s**)**