MCQ

৫০ নম্বর

১. ঘ. $(-\infty,-3)\cup(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})\cup(3,\infty)$
ব্যাখ্যা: ধরি, $t=x^2$। ভিত্তির শর্ত $t>1, t\neq 2$;
আর্গুমেন্ট ধনাত্মক হলে $t<4$ অথবা $t>9$
$1<t<2$ হলে ভিত্তি 0 ও 1-এর মধ্যে এবং $0<\frac{t-4}{t-9}<1$; তাই লগারিদম ধনাত্মক
$t>2$ হলে বর্গমূলের জন্য $\frac{t-4}{t-9}\geq 1$ চাই; কিন্তু $\frac{t-4}{t-9}-1=\frac{5}{t-9}$, তাই $t>9$
সুতরাং $1<x^2<2$ অথবা $x^2>9$; অর্থাৎ $1<|x|<\sqrt{2}$ অথবা $|x|>3$
উভয় ক্ষেত্রের সব প্রান্তবিন্দু বাদ যাবে (ভিত্তি 0 বা 1 হয়, অথবা হর শূন্য হয়)
অতএব, ডোমেন $=(-\infty,-3)\cup(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})\cup(3,\infty)$

২. খ. $(-\infty,-2]\cup(2,\infty)$
ব্যাখ্যা: ধরি, $t=\frac{x^2-1}{x^2+1}=1-\frac{2}{x^2+1}$; তখন $t\in[-1,0)\cup(0,1)$ এবং $f(x)=t+\frac{1}{t}$
$-1\leq t<0$-তে $t+\frac{1}{t}$-এর রেঞ্জ $(-\infty,-2]$; $t=-1$ অর্থাৎ $x=0$-তে -2 অর্জিত হয়
$0<t<1$-এ রেঞ্জ $(2,\infty)$; মান 2 পেতে $t=1$ লাগত, যা সম্ভব নয়
প্রতিটি শাখা অবিচ্ছিন্ন এবং উল্লিখিত সীমামানগুলোর দিকে যায়
অতএব, সম্পূর্ণ রেঞ্জ $=(-\infty,-2]\cup(2,\infty)$

৩. খ. $[2\sqrt{5},\infty)$
ব্যাখ্যা: প্রদত্ত রাশি $=\sqrt{(x-2)^2+1}+\sqrt{(-x-2)^2+1}$
ভেক্টরের ত্রিভুজ অসমতা থেকে এটি $\geq\sqrt{((x-2)+(-x-2))^2+(1+1)^2}=2\sqrt{5}$
সমতার জন্য $(x-2,1)$ ও $(-x-2,1)$ একই দিকে সমানুপাতিক; তাই $x=0$; এই মানে সত্যিই $f(0)=2\sqrt{5}$
f অবিচ্ছিন্ন এবং $x\to\infty$ হলে অসীমের দিকে যায়
অতএব, রেঞ্জ $=[2\sqrt{5},\infty)$

৪. ঘ. $-1<k\leq 0$
ব্যাখ্যা: ধরি, $t=\log_2 x\in[-2,3]$ এবং $u=|t|$; সমীকরণ $(u-2)^2=k+1$
$0<u\leq 2$ হলে প্রতিটি u থেকে দুটি t; $2<u\leq 3$ হলে একটি t; $u=0$ হলে একটি t পাওয়া যায়
$-1<k\leq 0$ হলে $u=2-\sqrt{k+1}\in[1,2)$ এবং $u=2+\sqrt{k+1}\in(2,3]$; তাই মোট $2+1=3$টি সমাধান
$k=-1$-এ দুটি; $0<k<3$-এ দুটি; $k=3$-এ একটি; অন্য মানে কোনো সমাধান নেই
অতএব, নির্ণেয় শর্ত $-1<k\leq 0$

৫. ক. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$
ব্যাখ্যা: $x=y=\frac{t}{2}$ বসিয়ে, $f(t)+1=2f\left(\frac{t}{2}\right)^2$; তাই সকল বাস্তব t-এর জন্য $f(t)\geq -1$
$t=1$ থেকে $f\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3+1}{2}=2$; ঋণাত্মক শাখা $-\sqrt{2}<-1$ হওয়ায় $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$
$t=\frac{1}{2}$ থেকে $f\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
ঋণাত্মক বর্গমূল -1-এর নিচে হবে, যা অসম্ভব
অতএব, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

৬. খ. $\frac{685}{6}$
ব্যাখ্যা: প্রথম মানগুলো $f(0)=2, f(1)=-\frac{1}{3}, f(2)=-\frac{3}{2}, f(3)=2$
একই পুনরাবৃত্তি থেকে এই তিন মান চক্রাকারে চলবে; কোনো হর শূন্য হয় না
প্রতি তিন পদের যোগফল $2-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$
মোট পদ $2027=3\times 675+2$; তাই 675টি পূর্ণ চক্রের পর থাকে $2,-\frac{1}{3}$
অতএব, সমষ্টি $=\frac{675}{6}+2-\frac{1}{3}=\frac{685}{6}$

৭. ক. 4
ব্যাখ্যা: P অশূন্য; ধরি, $P(x)=x^mQ(x)$, যেখানে $Q(0)\neq 0$। তাহলে $Q(x^2)=Q(x)^2$, তাই $Q(0)=Q(0)^2\Rightarrow Q(0)=1$
Q ধ্রুবক না হলে তার সর্বনিম্ন ধনাত্মক ঘাতের পদ cx^r ধরি, $c\neq 0$
$Q(x)^2$-এ x^r-এর সহগ $2c$; কিন্তু $Q(x^2)$-এ সেই সহগ শূন্য, কারণ Q-তে r-এর নিচে কোনো ধনাত্মক ঘাত নেই; এটি অসম্ভব
তাই $Q=1$, অর্থাৎ $P(x)=x^m$
এখন $2^m=16\Rightarrow m=4$

৮. ঘ. $\frac{25}{4}$
ব্যাখ্যা: দ্বিতীয় সম্পর্ক থেকে f-এর বিজোড় অংশ x^3+2x; তাই $f(x)=x^3+ax^2+2x+b$
প্রথম সম্পর্কে বসিয়ে, $(2a+3)x^2-(2a+3)x+(3+a+2b)=2$
সহগ তুলনা করে $a=-\frac{3}{2}$ এবং $3-\frac{3}{2}+2b=2\Rightarrow b=\frac{1}{4}$

অতএব, $f(2) = 8 + 4a + 4 + b = 8 - 6 + 4 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

৯. ক. 0

ব্যাখ্যা: $f(a) = f(b)$ হলে আবার f প্রয়োগ করে $-a = -b \Rightarrow a = b$; তাই f এক-এক
বাস্তব সরলরেখায় অবিচ্ছিন্ন এক-এক ফাংশন অবশ্যই কঠোরভাবে বর্ধমান অথবা কঠোরভাবে হ্রাসমান
উভয় ক্ষেত্রেই $f \circ f$ কঠোরভাবে বর্ধমান
কিন্তু $x \mapsto -x$ কঠোরভাবে হ্রাসমান
অতএব, এমন কোনো অবিচ্ছিন্ন f নেই; সংখ্যা 0

১০. খ. $-\frac{1}{8}$

ব্যাখ্যা: ধরি, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(f(x))$-এ x^4 ও x^3-এর সহগ যথাক্রমে a^3 ও $2a^2b$
$a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$ এবং $2a^2b = -24 \Rightarrow b = -3$
x^2-এর সহগ $a(b^2 + 2ac) + ab = 12 + 8c = 20$, তাই $c = 1$; এই মানগুলো বসালে বাকি সহগও মেলে
সুতরাং $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$
অতএব, সর্বনিম্ন মান $-\frac{1}{8}$

১১. খ. -252

ব্যাখ্যা: $(1-x)^{10}(1+x)^{10}$-এ x^{10}-এর সহগ = $\sum_{r=0}^{10}(-1)^r\, {}^{10}C_r\, {}^{10}C_{10-r}$
যেহেতু ${}^{10}C_{10-r} = {}^{10}C_r$, এই সহগই নির্ণেয় সমষ্টি
আবার গুণফলটি $(1-x^2)^{10}$; এতে $x^{10} = (x^2)^5$-এর সহগ $(-1)^5\, {}^{10}C_5$
অতএব, নির্ণেয় মান $= -252$

১২. খ. $\frac{9}{4}$

ব্যাখ্যা: $f_a(x) = (x-a)^2 - a^2$
$-1 \le a \le 2$ হলে সর্বনিম্ন মান $-a^2$ এবং সর্বোচ্চ মান শীর্ষ থেকে দূরবর্তী প্রান্তে; তাই $L(a) = \max\{(a+1)^2, (a-2)^2\}$
এই দুই দূরত্বের সর্বোচ্চটি ক্ষুদ্রতম হয় ব্যবধির মধ্যবিন্দু $a = \frac{1}{2}$-এ; তখন $L = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
$a < -1$ হলে ফাংশন বর্ধমান, তাই $L = (4 - 4a) - (1 + 2a) = 3 - 6a > 9$
$a > 2$ হলে হ্রাসমান, তাই $L = (1 + 2a) - (4 - 4a) = 6a - 3 > 9$
অতএব, সামগ্রিক সর্বনিম্ন মান $\frac{9}{4}$

১৩. গ. 4

ব্যাখ্যা: $x \neq \pm 1$-এ $f(x) = \pm(x^2 - 1)$ এবং $f(x) \neq 0$
অবিচ্ছিন্নতার কারণে $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ — প্রতিটি ব্যবধিতে চিহ্নের পছন্দ স্থির থাকবে; নইলে মাঝখানে শূন্য হতে হতো
$f(0) = 1$ হওয়ায় মাঝের ব্যবধিতে অবশ্যই $f(x) = 1 - x^2$
বাইরের দুই ব্যবধিতে স্বাধীনভাবে দুটি করে পছন্দ থাকে
$x = \pm 1$-এ উভয় সূত্রই শূন্য, তাই সব পছন্দ অবিচ্ছিন্নভাবে যুক্ত হয়; মোট ফাংশন $2^2 = 4$টি

১৪. ঘ. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < a < 2$

ব্যাখ্যা: ঊর্ধ্বমুখী পরাবৃত্তের দুটি ভিন্ন মূল $(0, 3)$-এ পেতে চাই: নিরূপক ধনাত্মক, শীর্ষের x-স্থানাঙ্ক $(0, 3)$-এ এবং দুই প্রান্তে মান ধনাত্মক
নিরূপক $4(a^2 - a - 1) > 0$; $a > 0$-এর সঙ্গে মিলিয়ে $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$x = 0$-এ মান $a + 1 > 0$ স্বয়ংক্রিয়; $x = 3$-এ মান $10 - 5a > 0 \Rightarrow a < 2$
এই শর্তে শীর্ষের স্থানাঙ্ক $0 < a < 3$ পূরণ হয়
অতএব, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < a < 2$

১৫. খ. $0 < k < 2$

ব্যাখ্যা: ধরি, $h(x) = x^3 - 3x$; $h'(x) = 3(x^2 - 1)$, তাই h যথাক্রমে $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ ও $(1, \infty)$-এ বর্ধমান, হ্রাসমান ও বর্ধমান
স্থানীয় সর্বোচ্চ $h(-1) = 2$ এবং স্থানীয় সর্বনিম্ন $h(1) = -2$; তাই $-2 < c < 2$ হলে $h(x) = c$-এর তিনটি ভিন্ন মূল
$0 < k < 2$ হলে $h(x) = k$ ও $h(x) = -k$-এর তিনটি করে মূল, এবং দুই দলের কোনো মূল এক নয়
$k = 0$-এ তিনটি, $k = 2$-এ চারটি, $k > 2$-এ দুটি এবং $k < 0$-এ কোনো মূল নেই
অতএব, নির্ণেয় শর্ত $0 < k < 2$

১৬. ক. $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

ব্যাখ্যা: $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$, কিন্তু মূল ডোমেনে $x \neq 2, 3$।
যৌগে আরও চাই $f(x) \neq 2, 3$
$f(x) = 2$ হলে $x = 5$ এবং $f(x) = 3$ হলে $x = 4$; তাই যৌগের ডোমেন $\mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4, 5\}$
সরল করে পাই, $f(f(x)) = \frac{1}{4-x}$; শুধু $x \neq 4$ ধরলে এর রেঞ্জ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
অতিরিক্ত বাদ পড়া $x = 2, 3, 5$ থেকে যথাক্রমে $\frac{1}{2}, 1, -1$ মানগুলোও বাদ যায়; $\frac{1}{4-x}$ এক-এক হওয়ায় অন্য কোনো ইনপুটে এগুলো ফিরে আসে না
অতএব, রেঞ্জ $= \mathbb{R} \setminus \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

১৭. খ. $e^{\frac{1}{e}}$

ব্যাখ্যা: সাধারণ বিন্দুতে $y = a^x$ এবং $x = a^y$; সূচকীয় ফাংশন বর্ধমান বলে $x > y$ বা $x < y$ কোনোটিই সম্ভব নয়; তাই $x = y$
সুতরাং $a^x = x \Rightarrow \ln a = \frac{\ln x}{x}$, যেখানে $x > 1$
$H(x) = \frac{\ln x}{x}$-এর জন্য $H'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; এটি $x = e$-এ একমাত্র সর্বোচ্চ $\frac{1}{e}$ গ্রহণ করে
অনুভূমিক রেখা $y = \ln a$-এর সঙ্গে ঠিক একটি ছেদ

পেতে $\ln a = \frac{1}{e}$ চাই
অতএব, $a = e^{\frac{1}{e}}$

১৮. খ. $\frac{40}{27}$
ব্যাখ্যা: ধরি, $u = f^{-1}(t)$, $v = f^{-1}(8-t)$; তাহলে
$u + v = 2$ এবং $u^3 + v^3 + u + v = 8$
$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 8 - 6uv$;
তাই $8 - 6uv + 2 = 8 \Rightarrow uv = \frac{1}{3}$
u, v হলো $z^2 - 2z + \frac{1}{3} = 0$-এর দুটি ভিন্ন বাস্তব মূল
f কঠোরভাবে বর্ধমান; তাই $t = f(u)$ ও $t = f(v)$ দুটি ভিন্ন সমাধান
নির্ণেয় গুণফল $= f(u)f(v) = uv(u^2+1)(v^2+1) = uv\left((uv)^2 + (u+v)^2 - 2uv + 1\right)$
$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + 4 - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{1}{3} \times \frac{40}{9} = \frac{40}{27}$

১৯. গ. $-\frac{45}{4}$
ব্যাখ্যা: $f(x)f(-x) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} = 1$ এবং উভয় মান ধনাত্মক
ধরি, $u = f(x)$; তাহলে $f(-x) = \frac{1}{u}$ এবং $u + \frac{1}{u} = 3 \Rightarrow u - \frac{1}{u} = \pm\sqrt{9-4} = \pm\sqrt{5}$
আবার $f(x)^2 - f(-x)^2 = 2x$
তাই $2x = \left(u - \frac{1}{u}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right) = \pm 3\sqrt{5}$
$x = \pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$; উভয় মানই গ্রহণযোগ্য
অতএব, গুণফল $= -\frac{45}{4}$

২০. গ. $\frac{1}{3}$
ব্যাখ্যা: $f(f(x)) = \sqrt{1-(1-x^2)} = |x|$
তাই পরপর যৌগে $f, |x|, f, |x|, \ldots$ পাওয়া যায়; 2026 জোড় হওয়ায় $f^{\circ 2026}(x) = |x|$
সমীকরণটি $|x| = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$
$x \geq 0$ হলে $x = \frac{1}{2}$; $x < 0$ হলে $-x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$
উভয় মান ডোমেনে রয়েছে
অতএব, যোগফল $= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

২১. ক. $e^{\frac{9}{2}}$
ব্যাখ্যা: ধরি, $t = \ln x$ এবং $s = \ln\frac{e^3}{x} = 3 - t$;
সমীকরণ $\frac{t}{1+t^2} = \frac{s}{1+s^2}$
হর দুটি ধনাত্মক; আড়াআড়ি গুণ করে পাই $(t-s)(1-ts) = 0$
প্রথম ক্ষেত্রে $t = \frac{3}{2}$; দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $t(3-t) = 1 \Rightarrow t = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; তিনটি মান পরস্পর ভিন্ন
তাই মূল x-গুলোর গুণফল $= e^{\frac{3}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = e^{\frac{9}{2}}$

২২. ঘ. -1
ব্যাখ্যা: যেকোনো বাস্তব a-এর দিকে মূলদ ও অমূলদ উভয় ধরনের সংখ্যার ধারা নেওয়া যায়
অবিচ্ছিন্ন হতে তাই দুই শাখার সীমা সমান চাই: $a^2 = 2 - a \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0$
$a = -2, 1$-এ দুই শাখাই একই মানের দিকে যায় এবং $f(a)$-ও সেই মান; তাই এগুলোতে সত্যিই অবিচ্ছিন্ন
অতএব, নির্ণেয় যোগফল $= -2 + 1 = -1$

২৩. খ. 28800
ব্যাখ্যা: A, B-কে একটি গুচ্ছ ধরি; তাদের অভ্যন্তরীণ ক্রম 2টি। C, D, E বাদ দিলে এই গুচ্ছসহ মোট 6টি বস্তু থাকে
এই ছয় বস্তু বৃত্তাকারে বসানো যায় $5!$ উপায়ে; তাদের মাঝে বৃত্ত বরাবর 6টি ফাঁক আছে
C, D, E-কে আলাদা তিন ফাঁকে বসাতে হবে; ফাঁক নির্বাচন ও ব্যক্তি বসানোর উপায় ${}^6C_3 \times 3!$
অতএব, মোট বিন্যাস $= 2 \times 5! \times {}^6C_3 \times 3! = 28800$

২৪. ঘ. -2
ব্যাখ্যা: $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$; তাই 6 একটি পর্যায়
$f(1) = f(-2+3) = -f(-2)$ এবং f জোড় হওয়ায় $f(2) = f(-2) = -f(1) = -2$
ধরি, $f(0) = c$; তাহলে $f(3) = -c$, $f(4) = -f(1) = -2$, $f(5) = -f(2) = 2$
একটি ছয় পদের চক্র $c, 2, -2, -c, -2, 2$; চক্রের যোগফল শূন্য
মোট পদ $2027 = 6 \times 337 + 5$; পূর্ণ চক্রগুলোর পর থাকে $c, 2, -2, -c, -2$
অতএব, সমষ্টি $= -2$, যা অজানা c-এর উপর নির্ভর করে না

২৫. ক. 3
ব্যাখ্যা: $P(x) = c$ ধ্রুবক হলে শর্ত $c = c^2$, তাই $c = 0$ অথবা $c = 1$
P অধ্রুবক হলে তার রেঞ্জে অসীমসংখ্যক বাস্তব মান আছে; প্রত্যেক এমন $t = P(x)$-এর জন্য $P(t) - t^2 = 0$
একটি অশূন্য বহুপদীর অসীমসংখ্যক মূল থাকতে পারে না; তাই অবশ্যই $P(t) \equiv t^2$
$P = 0$, $P = 1$ ও $P(x) = x^2$ — তিনটিই শর্ত পূরণ করে
অতএব, সংখ্যা 3

২৬. গ. $\frac{5}{4} < a < 3$
ব্যাখ্যা: $x \leq 0$ হলে বামপক্ষ ধনাত্মক অথচ ডানপক্ষ অধনাত্মক; তাই $x > 0$
বামপক্ষকে x দিয়ে ভাগ করলে
$(0,1], (1,2], (2,4], (4,\infty)$-এ যথাক্রমে $\frac{7}{x} - 3$, $\frac{5}{x} - 1$, $1 + \frac{1}{x}$, $3 - \frac{7}{x}$ পাই

প্রথম তিন অংশ মিলে $(0, 4]$-এ মান কঠোরভাবে কমে অসীম থেকে $\frac{5}{4}$-এ আসে; শেষ অংশে $\frac{5}{4}$ থেকে বাড়ে, কিন্তু কখনো 3 হয় না
সুতরাং $\frac{5}{4} < a < 3$ হলে দুই শাখায় দুটি ভিন্ন মূল
$a = \frac{5}{4}$-এ একটি মূল, আর $a \geq 3$-এ কেবল প্রথম শাখায় একটি মূল

২৭. ঘ. 486
ব্যাখ্যা: সব অঙ্কের যোগফল 12। বিজোড় অবস্থানের চার অঙ্কের যোগফল S হলে $2S - 12$ অবশ্যই 11 দ্বারা বিভাজ্য হবে
$2S - 12$ জোড় এবং $-12 \leq 2S - 12 \leq 8$, তাই $2S - 12 = 0 \Rightarrow S = 6$
বিজোড় অবস্থানের অঙ্কসমষ্টি কেবল $\{1, 1, 2, 2\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$ অথবা $\{0, 0, 3, 3\}$ হতে পারে
প্রথম ক্ষেত্রে বিজোড় ও জোড় অবস্থান সাজানোর উপায় $6 \times 6 = 36$
দ্বিতীয় ক্ষেত্রে প্রথম অঙ্ক শূন্য নয় এমন উপায় $(4! - 3!) \times 4! = 18 \times 24 = 432$; তৃতীয় ক্ষেত্রে $(6 - 3) \times 6 = 18$
অতএব, মোট সংখ্যা $= 36 + 432 + 18 = 486$

২৮. গ. 552
ব্যাখ্যা: 15 দ্বারা বিভাজ্য হতে শেষ অঙ্ক 0 বা 5 এবং অঙ্কসমষ্টি 3 দ্বারা বিভাজ্য চাই; সব সাত অঙ্কের যোগফল 21
তাই বাদ দেওয়া অঙ্ক হবে $0, 3$ অথবা 6
0 বাদ দিলে শেষ অঙ্ক 5, অবশিষ্ট পাঁচ অঙ্কের বিন্যাস $5! = 120$
3 অথবা 6 বাদ দিলে: শেষ অঙ্ক 0 হলে $5! = 120$টি সংখ্যা; শেষ অঙ্ক 5 হলে প্রথমে 4টি অশূন্য পছন্দ, পরে $4!$ উপায়, অর্থাৎ 96টি
অতএব, মোট সংখ্যা $= 120 + 2(120 + 96) = 552$

২৯. গ. 312
ব্যাখ্যা: প্রথমে পাঁচ পুরুষকে বসানো যায় $4!$ উপায়ে (ঘূর্ণন বাদ)। তাঁদের মাঝের পাঁচটি ফাঁকে স্ত্রীদের বসাতে হবে; প্রত্যেক স্ত্রীর জন্য স্বামীর দুই পাশের ফাঁক নিষিদ্ধ পাঁচ স্ত্রী ও পাঁচ ফাঁকের এই 10টি নিষিদ্ধ সম্পর্ক একটি 10-চক্র গঠন করে; kটি নিষিদ্ধ সম্পর্ক নির্বাচনের সংখ্যা $r_k = \frac{10}{10-k}\,{}^{10-k}C_k$
$k = 0, 1, \ldots, 5$-এ $r_k = 1, 10, 35, 50, 25, 2$
অন্তর্ভুক্তি–বর্জনে স্ত্রীদের বৈধ বিন্যাস $= 5! - 10 \cdot 4! + 35 \cdot 3! - 50 \cdot 2! + 25 \cdot 1! - 2 \cdot 0! = 13$
অতএব, মোট বিন্যাস $= 4! \times 13 = 312$

৩০. ঘ. $m = \pm 4$
ব্যাখ্যা: সাধারণ বিন্দুতে $2x^2 = mx - 2 \Rightarrow 2x^2 - mx + 2 = 0$
ঠিক একটি সাধারণ বিন্দুর জন্য দ্বিঘাতটির নিরূপক শূন্য হতে হবে
$m^2 - 4(2)(2) = 0 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$
উভয় ক্ষেত্রেই একটি করে স্পর্শবিন্দু পাওয়া যায়

৩১. খ. 24
ব্যাখ্যা: প্রথমে C, B, N সাজানো যায় $3! = 6$ উপায়ে
এই তিনটি অক্ষরের দুই প্রান্তসহ মোট 4টি ফাঁক থাকে
পাশাপাশি না রাখতে তিনটি অভিন্ন A-কে তিনটি ভিন্ন ফাঁকে বসাতে হবে; উপায় ${}^4C_3 = 4$
অতএব, মোট বিন্যাস $= 6 \times 4 = 24$

৩২. ঘ. 5040
ব্যাখ্যা: এখানে S আছে 4টি, E আছে 2টি এবং A, M, N, T প্রত্যেকটি আছে 1টি
তিনটি স্বরবর্ণ A, E, E-কে একটি গুচ্ছ ধরলে মোট বস্তু $= 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$টি (চারটি S, M, N, T ও গুচ্ছ)
গুচ্ছটির অভ্যন্তরীণ বিন্যাস $\frac{3!}{2!} = 3$টি
অতএব, মোট বিন্যাস $= \frac{8!}{4!} \times 3 = 5040$

৩৩. ক. 23520
ব্যাখ্যা: ব্যঞ্জনবর্ণ S, S, S, T, T, T, C সাজানো যায় $\frac{7!}{3!\,3!} = 140$ উপায়ে
এতে দুই প্রান্তসহ 8টি ফাঁক হয়; তিনটি স্বরবর্ণের জন্য ভিন্ন ফাঁক নির্বাচন ${}^8C_3 = 56$ উপায়ে
নির্বাচিত ফাঁকগুলোতে A, I, I বসানো যায় $\frac{3!}{2!} = 3$ উপায়ে
অতএব, মোট বিন্যাস $= 140 \times 56 \times 3 = 23520$

৩৪. গ. 1320
ব্যাখ্যা: এককের অঙ্ক 0 অথবা 5 হতে হবে
এককে 0 থাকলে অবশিষ্ট ছয়টি অঙ্ক থেকে পাঁচটি সাজানোর উপায় ${}^6P_5 = 720$
এককে 5 থাকলে প্রথম অঙ্কের জন্য 5টি পছন্দ (শূন্য বাদে); মাঝের চার স্থানে অবশিষ্ট পাঁচটি অঙ্ক থেকে ${}^5P_4 = 120$ উপায়
অতএব, মোট সংখ্যা $= 720 + 5 \times 120 = 1320$

৩৫. ক. 12600
ব্যাখ্যা: ব্যঞ্জনবর্ণ N, N, N, G, G, R সাজানো যায় $\frac{6!}{3!\,2!} = 60$ উপায়ে
এতে দুই প্রান্তসহ 7টি ফাঁক হয়; পাঁচটি স্বরবর্ণের জন্য ভিন্ন ফাঁক নির্বাচন ${}^7C_5 = 21$ উপায়ে
নির্বাচিত ফাঁকগুলোতে E, E, E, I, I বসানো যায় $\frac{5!}{3!\,2!} = 10$ উপায়ে
অতএব, মোট বিন্যাস $= 60 \times 21 \times 10 = 12600$

৩৬. ক. 1260
ব্যাখ্যা: দুটি উল্লিখিত জোড়া হলো দুটি 2-চক্র। অবশিষ্ট চার উপাদানে স্থির উপাদান বা আরও 2-চক্র থাকতে পারবে না

তাই অবশিষ্ট চার উপাদান অবশ্যই একটি 4-চক্র গঠন করবে
দুটি নামবিহীন জোড়া বেছে নেওয়ার উপায় $\frac{{}^8C_2\,{}^6C_2}{2!} = \frac{28\times15}{2} = 210$; অবশিষ্ট চার উপাদানে 4-চক্রের সংখ্যা $(4-1)! = 6$
অতএব, মোট ফাংশন $= 210 \times 6 = 1260$

৩৭. ঘ. 6720
ব্যাখ্যা: প্রথমে শুধু A, B-কে একসঙ্গে রাখলে তাঁদের দল নির্বাচন 3 উপায়ে, সঙ্গী নির্বাচন ${}^{10}C_2$ উপায়ে এবং অবশিষ্ট দুই দলে বণ্টন ${}^8C_4$ উপায়ে; মোট 9450
এবার C, D-ও একই দলে থাকা অবৈধ ক্ষেত্র বাদ দিই
চারজন একই দলে থাকলে সংখ্যা $3 \times {}^8C_4 = 210$
দুটি জোড়া আলাদা দলে থাকলে দল নির্বাচন 3×2 উপায়ে; বাকি সদস্য নির্বাচন ${}^8C_2 \times {}^6C_2$ উপায়ে; সংখ্যা 2520
অতএব, বৈধ বিভাজন $= 9450 - 210 - 2520 = 6720$

৩৮. ঘ. 40
ব্যাখ্যা: প্রথম শিক্ষার্থীর প্রাপ্য 1, 3, 5 হলে অন্য তিনজনের প্রাপ্যের যোগফল যথাক্রমে 13, 11, 9
অন্য তিনজনের প্রত্যেকের জন্য $y_i = 5 - x_i$ নিলে $0 \le y_i \le 4$ এবং যোগফল যথাক্রমে 2, 4, 6
যোগফল 2 ও 4-এর জন্য উপায় ${}^4C_2 = 6$, ${}^6C_2 = 15$
যোগফল 6 হলে ঊর্ধ্বসীমা ছাড়া ${}^8C_2 = 28$; কোনো $y_i \ge 5$ হলে ${}^3C_2 = 3$টি করে বাদ যায়; তাই বৈধ উপায় $28 - 3 \times 3 = 19$
অতএব, মোট বণ্টন $= 6 + 15 + 19 = 40$

৩৯. ক. 61
ব্যাখ্যা: ধরি, $x = u + 1$, $y = u + v + 2$, $z = u + v + w + 3$, যেখানে $u, v, w \ge 0$ পূর্ণসংখ্যা
তাহলে $3u + 2v + w = 24$ এবং $0 \le u \le 8$
নির্দিষ্ট u-এর জন্য v-এর পছন্দ $\left\lfloor \frac{24-3u}{2} \right\rfloor + 1$টি; প্রতিটি পছন্দে w নির্দিষ্ট
অতএব, মোট সংখ্যা $= 13 + 11 + 10 + 8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 61$

৪০. গ. 153
ব্যাখ্যা: নির্বাচিত সংখ্যা $a_1 < \cdots < a_5$ থেকে $b_i = a_i - (i-1)$ নিলে $1 \le b_1 < \cdots < b_5 \le 11$; এই রূপান্তর এক-এক
$\sum a_i = \sum b_i + 10$; 3 দ্বারা বিভাজ্য হতে $\sum b_i$-কে 3 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ 2 হতে হবে
1 থেকে 11-তে ভাগশেষ 0, 1, 2 বিশিষ্ট সংখ্যা যথাক্রমে 3, 4, 4টি
ভাগশেষভিত্তিক সংখ্যাত্রয়ী (n_0, n_1, n_2) হতে পারে $(0,2,3), (1,0,4), (1,3,1), (2,1,2), (3,2,0)$
এগুলোর জন্য উপায় ${}^3C_{n_0}\,{}^4C_{n_1}\,{}^4C_{n_2}$; মান যথাক্রমে 24, 3, 48, 72, 6
অতএব, মোট নির্বাচন $= 24 + 3 + 48 + 72 + 6 = 153$

৪১. ক. 28
ব্যাখ্যা: দুটি অভ্যন্তরীণ প্রত্যাবর্তন পথকে তিনটি খণ্ডে ভাগ করে; প্রতিটি খণ্ড তার দুই প্রান্ত ছাড়া কর্ণকে স্পর্শ করে না
এক খণ্ডে mটি ডান ও mটি উপর ধাপ থাকলে প্রথম ডান ও শেষ উপর ধাপ বাদ দিয়ে কর্ণের নিচে একটি পথ পাওয়া যায়; তাই খণ্ডসংখ্যা $C_{m-1} = \frac{1}{m}\,{}^{2m-2}C_{m-1}$
তিন খণ্ডের আকার ধনাত্মক এবং যোগফল 6; সম্ভাব্য আকারের ধরন $(1,1,4), (1,2,3), (2,2,2)$
এখানে $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$
তাই সংশ্লিষ্ট সংখ্যা $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 15$, $6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ এবং 1
অতএব, মোট পথ $= 15 + 12 + 1 = 28$

৪২. গ. 8
ব্যাখ্যা: ছয়টি 1 তিনটি গুচ্ছে অন্তত দুটি করে থাকলে প্রতিটি গুচ্ছ ঠিক দুটি 1 নিয়ে গঠিত
তাই ছয়টি 0 রাখতে হবে দুই প্রান্তের ফাঁকে 0 থেকে 2 টি এবং ভেতরের দুই ফাঁকে 1 থেকে 2টি করে (পরপর তিনটি 0 চলবে না)
ভেতরের ফাঁক $(1,1)$ হলে প্রান্তে $(2,2)$: 1 উপায়
ভেতরে $(1,2)$ বা $(2,1)$ হলে প্রান্তে $(1,2)$ বা $(2,1)$: 2 উপায় করে, মোট 4
ভেতরে $(2,2)$ হলে প্রান্তে $(0,2), (1,1), (2,0)$: 3 উপায়
অতএব, মোট অনুক্রম $= 1 + 4 + 3 = 8$

৪৩. গ. 8
ব্যাখ্যা: একটি সমমিতি-দলের অধীনে ভিন্ন বিন্যাসসংখ্যা হলো সব সমমিতির স্থির রাখা বিন্যাসসংখ্যার গড়;
এখানে 8টি ঘূর্ণন ও 8টি প্রতিবিম্ব, মোট 16টি সমমিতি
ঘূর্ণনের অবদান: শূন্য ঘূর্ণনে ${}^8C_4 = 70$; 2 ও 6 ঘর ঘূর্ণনে 2টি করে; 4 ঘর ঘূর্ণনে 6টি; বিজোড় ঘর ঘূর্ণনে শূন্য; মোট $70 + 2 + 2 + 6 = 80$
বিপরীত দুই পুঁতির ভেতর দিয়ে অক্ষ যাওয়া 4টি প্রতিবিম্বে 6টি করে (দুটি স্থির স্থান ও তিন জোড়া)
ফাঁকের ভেতর দিয়ে অক্ষ যাওয়া অন্য 4টি প্রতিবিম্বে চার জোড়া; উপায় ${}^4C_2 = 6$টি করে
অতএব, মালার সংখ্যা $= \frac{80+4\times6+4\times6}{16} = 8$

৪৪. ক. 40
ব্যাখ্যা: বৃত্ত বরাবর পরপর তিন নির্বাচিত শীর্ষের মাঝের বাহু-সংখ্যা a, b, c ধরি; তাহলে $a, b, c \ge 1$ এবং $a + b + c = 12$
ত্রিভুজের সংশ্লিষ্ট কোণগুলো $\frac{a\pi}{12}$, $\frac{b\pi}{12}$, $\frac{c\pi}{12}$; সূক্ষ্মকোণী

হতে $a, b, c \le 5$ চাই
$u = 5 - a$, $v = 5 - b$, $w = 5 - c$ নিলে $u + v + w = 3$; অঋণাত্মক সমাধান ${}^5C_2 = 10$টি; এগুলোতে $a, b, c \ge 1$ স্বয়ংক্রিয়
প্রথম শীর্ষ নির্বাচন 12 উপায়ে, কিন্তু প্রতিটি ত্রিভুজ তিনটি শীর্ষ থেকে শুরু করে গণিত হয়
অতএব, মোট ত্রিভুজ $= \frac{12\times10}{3} = 40$

৪৫. ঘ. 3360
ব্যাখ্যা: $f^{\circ 3}$ অভেদ হওয়ায় f একটি বিন্যাস; প্রতিটি চক্রের দৈর্ঘ্য 3-এর ভাজক, অর্থাৎ 1 বা 3
স্থির তিনটি উপাদান নির্বাচন ${}^9C_3 = 84$ উপায়ে; অবশিষ্ট ছয়টি দুটি 3-চক্রে থাকবে
দুটি নামবিহীন তিন-উপাদানের দল তৈরির উপায় $\frac{6!}{(3!)^2\,2!} = 10$; প্রতিটি দলের 3-চক্র $(3-1)! = 2$টি
অতএব, মোট ফাংশন $= 84 \times 10 \times 2^2 = 3360$

৪৬. গ. 1176
ব্যাখ্যা: উপহার পাবে এমন দুই শিশু নির্বাচন ${}^4C_2 = 6$ উপায়ে; তাঁদের মধ্যে A, B ভিন্নভাবে দেওয়ার উপায় 2 টি
C, D একসঙ্গে যে শিশুর কাছে যাবে তার পছন্দ 2টি; ফলে প্রথম চার উপহারে দুই শিশুর প্রাপ্য 3 ও 1
অবশিষ্ট ছয়টি ভিন্ন উপহারের বণ্টন $2^6 = 64$ উপায়ে; ইতিমধ্যেই উভয় শিশু অন্তত একটি পেয়েছে
সমান ভাগে 5টি করে পেতে 3টি পাওয়া শিশুকে আরও 2টি দিতে হবে; এমন বণ্টন ${}^6C_2 = 15$টি বাদ যায়
অতএব, মোট বৈধ বণ্টন $= 6 \times 2 \times 2 \times (64 - 15) = 1176$

৪৭. খ. 156
ব্যাখ্যা: প্রতিটি সারিতে $3! = 6$টি পছন্দ; বিনা শর্তে মোট $6^3 = 216$টি
নির্দিষ্ট একটি কলাম এক অক্ষরের হলে অক্ষর নির্বাচন 3 উপায়ে এবং প্রতিটি সারির বাকি দুটি স্থান 2 উপায়ে পূরণ হয়; তাই সংখ্যা $3 \cdot 2^3 = 24$
নির্দিষ্ট দুটি কলাম এক অক্ষরের হলে তাদের অক্ষর আলাদা হতে হবে; পছন্দ $3 \cdot 2 = 6$; তখন তৃতীয় কলামও এক অক্ষরের হয়
অতএব, অন্তর্ভুক্তি–বর্জনে বৈধ সংখ্যা $= 216 - 3 \cdot 24 + 3 \cdot 6 - 6 = 156$

৪৮. গ. 22
ব্যাখ্যা: সংখ্যাটি abccba আকারের, যেখানে $a \in \{1, \dots, 9\}$ এবং $b, c \in \{0, \dots, 9\}$
4 দ্বারা বিভাজ্য হতে $10b + a$ বিভাজ্য চাই; তাই $a = 2, 4, 6, 8$; $a = 2, 6$-এ b বিজোড় এবং $a = 4, 8$-এ b জোড়; মোট (a, b) জোড়া 20টি
9 দ্বারা বিভাজ্য হতে অঙ্কসমষ্টি $2(a + b + c)$ কে 9 দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে, অর্থাৎ $a + b + c$ কে 9 দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে
প্রতিটি জোড়ায় একটি c পাওয়া যায়; $a + b$ কে 9 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 0 হলে $c = 0, 9$ দুটিই চলে
অনুমোদিত জোড়ার মধ্যে $a + b = 9$ কেবল $(2, 7), (6, 3)$-এ
অতএব, মোট সংখ্যা $= 20 + 2 = 22$

৪৯. ক. 122
ব্যাখ্যা: C, D দুই-সদস্যের দল হলে বাকি ছয়জনকে $1, 2, 3$ আকারে ভাগ করার উপায় $\frac{6!}{1!\,2!\,3!} = 60$
এ ক্ষেত্রে A, B একসঙ্গে অবৈধ: দুই-সদস্যের দলে থাকলে 4টি, তিন-সদস্যের দলে থাকলে $4 \times 3 = 12$টি; বৈধ সংখ্যা $60 - 4 - 12 = 44$
C, D তিন-সদস্যের দলে থাকলে তৃতীয় সদস্য A বা B হওয়ার 2টি পছন্দ; বাকি পাঁচজনের $1, 2, 2$ বিভাজন $\frac{5!}{1!\,(2!)^2\,2!} = 15$টি; অর্থাৎ 30টি বৈধ
তৃতীয় সদস্য অন্য চারজনের একজন হলে প্রতিবার 15 টির মধ্যে A, B-কে জোড়া করা 3টি বাদ যায়; বৈধ সংখ্যা $4(15 - 3) = 48$
অতএব, মোট বিভাজন $= 44 + 30 + 48 = 122$

৫০. খ. 1920
ব্যাখ্যা: 1, 2 যে একই মানে যাবে তা 4 উপায়ে বেছে নেওয়া যায়; তার বিপরীত প্রতিবিম্বের আকার বিজোড় এবং অন্তত 2; অন্য তিন মানও ব্যবহৃত হবে বলে এই আকার কেবল 3 বা 5
আকার 5 হলে অবশিষ্ট ছয় উপাদান থেকে আরও তিনটি নির্বাচন ${}^6C_3$ উপায়ে; বাকি তিনটি অন্য তিন মানে এক-একভাবে যাবে; সংখ্যা $4 \cdot {}^6C_3 \cdot 3! = 480$
আকার 3 হলে অতিরিক্ত উপাদান নির্বাচন 6 উপায়ে; বাকি পাঁচটির তিনটি ভাগ হবে $3, 1, 1$
তিনটির ভাগ কোন মানে যাবে তা 3 উপায়ে; সেই তিনটি নির্বাচন ${}^5C_3 = 10$ উপায়ে; বাকি দুইটির বণ্টন 2! উপায়ে; সংখ্যা $4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 2 = 1440$
অতএব, মোট ফাংশন $= 480 + 1440 = 1920$