MCQ

৫০ নম্বর

১. গ. $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$

ব্যাখ্যা: বাইরের লগারিদম সংজ্ঞায়িত হতে $\log_3(x^2 - 4) > 0$ হতে হবে

যেহেতু ভিত্তি $3 > 1$, তাই $x^2 - 4 > 1 \Rightarrow x^2 > 5$

এই শর্তে ভিতরের লগারিদমের আর্গুমেন্টও ধনাত্মক

অতএব, ডোমেন = $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$

২. ক. $(1, \infty)$

ব্যাখ্যা: লগারিদম ও বর্গমূলের শর্ত একত্রে $0 < \frac{x-1}{x+1} \leq 1$; কারণ $0 < \frac{1}{2} < 1$

অনুপাতটি ধনাত্মক হলে $x < -1$ অথবা $x > 1$

$\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$; $x < -1$ হলে এর মান 1-এর বেশি, তাই সেই অংশ বাদ যাবে

$x > 1$ হলে অনুপাতটি 0 ও 1-এর মাঝে থাকে

অতএব, ডোমেন = $(1, \infty)$

৩. গ. $\left[\frac{1}{2+\sqrt{2}}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}\right]$

ব্যাখ্যা: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, তাই

$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$

$2 - \sqrt{2} \leq 2 + \sin x + \cos x \leq 2 + \sqrt{2}$ এবং সম্পূর্ণ ব্যবধিটিই ধনাত্মক

বিপরীত রাশি নিলে, $\frac{1}{2+\sqrt{2}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2-\sqrt{2}}$

উভয় প্রান্তমান এবং তাদের মধ্যবর্তী সকল মান পাওয়া যায়; তাই এটিই রেঞ্জ

৪. গ. $\frac{1+x^2}{1-x^2}$

ব্যাখ্যা: ধরি, $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, যেখানে $0 \leq y < 1$

$y^2(x+1) = x - 1$

$\Rightarrow x(1 - y^2) = 1 + y^2$

$\Rightarrow x = \frac{1+y^2}{1-y^2}$; এই মান সর্বদা 1 বা তার বেশি এবং একটিই হয়

অতএব, $f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, $0 \leq x < 1$

৫. খ. e^2

ব্যাখ্যা: উভয় যৌগিক ফাংশন সংজ্ঞায়িত হতে $x > 0$

সমীকরণটি $x^2 = e^{(\ln x)^2}$

উভয়পক্ষে প্রাকৃতিক লগারিদম নিয়ে পাই, $2\ln x = (\ln x)^2$

ধরি, $t = \ln x$; তাহলে $t(t-2) = 0 \Rightarrow t = 0$ অথবা $t = 2$

তাই সমাধান $x = 1, e^2$

অতএব, নির্ণেয় গুণফল = e^2

৬. গ. $\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যা: ক্রমে $x = 2, -1, \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই:

$f(2) + 2f(-1) = 2$ ...(i)

$f(-1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ ...(ii)

$f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(2) = \frac{1}{2}$ ...(iii)

(ii) থেকে $f(-1) = -1 - 2f\left(\frac{1}{2}\right)$; এটি (i)-এ বসিয়ে,

$f(2) - 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

(iii) থেকে $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2f(2)$

$\therefore f(2) - 4\left(\frac{1}{2} - 2f(2)\right) = 4 \Rightarrow 9f(2) = 6$

অতএব, $f(2) = \frac{2}{3}$

৭. ঘ. 7

ব্যাখ্যা: প্রথম শাখা এক-একভাবে $(-\infty, 0]$ এবং দ্বিতীয় শাখা এক-একভাবে $(0, \infty)$-তে যায়; তাই বিপরীত ফাংশন আছে

$-8 \leq 0$ হওয়ায় $f^{-1}(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$

$3 > 0$ হওয়ায় $f^{-1}(3) = 3^2 = 9$

অতএব, নির্ণেয় মান = $-2 + 9 = 7$

৮. গ. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

ব্যাখ্যা: $x \geq 0$ শাখায় $x = ax + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-a}$; এই শাখায় মূল থাকে ঠিক যখন $a < 1$

$x < 0$ শাখায় $-x = ax + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{1+a}$; এই শাখায় মূল থাকে ঠিক যখন $a > -1$

$-1 < a < 1$ হলে উভয় শাখায় একটি করে মোট দুটি মূল থাকে

$a \leq -1$ অথবা $a \geq 1$ হলে কেবল একটি শাখায় মূল থাকে

অতএব, নির্ণেয় সেট $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

৯. গ. $\left[0, \frac{3}{2}\right]$

ব্যাখ্যা: ধরি, $t = 2x - 1$

প্রথম শাখায় $2t + 4 \geq 2$ থেকে $-1 \leq t \leq 0$

দ্বিতীয় শাখায় $4 - t \geq 2$ থেকে $0 < t \leq 2$

অতএব, $f(t) \geq 2$ ঠিক যখন $-1 \leq t \leq 2$

$-1 \leq 2x - 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{2}$

১০. ঘ. 7

ব্যাখ্যা: প্রথম সম্পর্ক থেকে $f(4 - t) = f(t)$ এবং দ্বিতীয় সম্পর্ক থেকে $f(10 - t) = f(t)$

সুতরাং $f(t + 6) = f(10 - (4 - t)) = f(4 - t) = f(t)$; অর্থাৎ 6 একটি পর্যায়

$2025 = 6 \times 337 + 3$ হওয়ায় $f(2025) = f(3)$

প্রথম প্রতিসাম্য ব্যবহার করে, $f(3) = f(1) = 7$

১১. ঘ. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$

ব্যাখ্যা: ইনপুটের শর্ত $-3 \le \frac{x-1}{x+1} \le 5$, যেখানে $x \neq -1$

$\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ বসালে $-4 \le -\frac{2}{x+1} \le 4$

অর্থাৎ $\left|\frac{2}{x+1}\right| \le 4 \Rightarrow |x+1| \ge \frac{1}{2}$

অতএব, $x \le -\frac{3}{2}$ অথবা $x \ge -\frac{1}{2}$; এই সেটে $x = -1$ এমনিতেই নেই

১২. খ. $(-1, 1)$

ব্যাখ্যা: বিজোড় ফাংশনের জন্য $f(0) = 0$; তাই $\frac{1+a}{1+b} = 0 \Rightarrow a = -1$

ধরি, $t = e^x > 0$; তখন $f(x) + f(-x) = \frac{t-1}{t+b} + \frac{1-t}{1+bt}$

সরল করলে যোগফল $= \frac{(b-1)(t-1)^2}{(t+b)(1+bt)}$

এটি সকল $t > 0$-এর জন্য শূন্য হতে $b = 1$

অতএব, $(a, b) = (-1, 1)$

১৩. ক. 3

ব্যাখ্যা: f কঠোরভাবে বর্ধমান ও সার্বিক, তাই h বিদ্যমান; আবার $f(-x) = -f(x)$ হওয়ায় $h(-y) = -h(y)$

সুতরাং $h(7) + h(-7) = 0$

$f(3) = 3^3 + 3 = 30 \Rightarrow h(30) = 3$

অতএব, নির্ণেয় মান $= 0 + 3 = 3$

১৪. ঘ. 2

ব্যাখ্যা: g হলো তিনটি এক-এক ও সার্বিক ফাংশনের যৌগ; তাই g^{-1} বিদ্যমান

$g(x) = 5 \Rightarrow f^{-1}(2f(x) + 1) = 5 \Rightarrow 2f(x) + 1 = f(5) = 7$

$\Rightarrow f(x) = 3 = f(2)$

f এক-এক হওয়ায় $x = 2$

অতএব, $g^{-1}(5) = 2$

১৫. ঘ. $x = 1$

ব্যাখ্যা: ধরি, $t = f(x) = x + \frac{1}{x} \ge 2$

$f(t) = \frac{5}{2} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow (2t-1)(t-2) = 0$

$t \ge 2$ হওয়ায় কেবল $t = 2$ গ্রহণযোগ্য

$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$

অতএব, $x = 1$

১৬. খ. $\{0\} \cup [3, \infty)$

ব্যাখ্যা: $k < 0$ হলে সমাধান নেই; $k = 0$ হলে $2^x = 3$ থেকে একটি সমাধান হয়

$k > 0$ হলে $2^x = 3 + k$ অথবা $2^x = 3 - k$; প্রথম সমীকরণে সর্বদা একটি সমাধান আছে

দ্বিতীয় সমীকরণে সমাধান থাকে ঠিক যখন $k < 3$; $k = 3$-এ $2^x = 0$ অসম্ভব

অতএব, ঠিক একটি সমাধানের শর্ত $k = 0$ অথবা $k \ge 3$

১৭. ঘ. $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

ব্যাখ্যা: ভিতরের $f(x)$ সংজ্ঞায়িত হতে $x \neq \pm 1$

বাইরের f-এর জন্য আরও চাই $f(x) \neq \pm 1$

$f(x) = 1$ হলে $x^2 + 1 = x^2 - 1$, যা অসম্ভব

$f(x) = -1$ হলে $x^2 + 1 = -(x^2 - 1) \Rightarrow x = 0$; এই মানটি বাদ দিতে হবে

অতএব, ডোমেন $= \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

১৮. খ. $(1, 3)$

ব্যাখ্যা: ডোমেনে $x \neq 0, 1, 3$; প্রতিটি ভগ্নাংশের মান লবের ভিতরের রাশি ধনাত্মক হলে 1, ঋণাত্মক হলে -1

$x < 0$ হলে $f(x) = -3$ এবং $0 < x < 1$ হলে $f(x) = -1$

$1 < x < 3$ হলে $f(x) = 1 + 1 - 1 = 1$; $x > 3$ হলে $f(x) = 3$

অতএব, সমাধান সেট $(1, 3)$

১৯. ঘ. $\frac{11}{2}$

ব্যাখ্যা: $f(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$, তাই $f(x) + f(-x) = 1$

সমষ্টিতে $\pm1, \pm2, \ldots, \pm5$ মিলে পাঁচটি জোড়া; প্রতিটির যোগফল 1

আবার $f(0) = \frac{1}{2}$

অতএব, নির্ণেয় সমষ্টি $= 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

২০. ক. 3

ব্যাখ্যা: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$; ছেদবিন্দুতে $x^3 = \sqrt[3]{x}$

উভয়পক্ষে ঘন করে পাই, $x^9 = x \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0$

বাস্তব x-এর জন্য $x = 0, 1, -1$; তিনটি মানই মূল সমীকরণ পূরণ করে

ছেদবিন্দুগুলো $(-1, -1), (0, 0), (1, 1)$; অতএব, সংখ্যা 3

২১. খ. $0 < t \le 2$

ব্যাখ্যা: $x < 0$ শাখায় $x^2 = t$ থেকে কেবল $x = -\sqrt{t}$ গ্রহণযোগ্য; এটি থাকে ঠিক যখন $t > 0$

$x \ge 0$ শাখায় $2 - x = t \Rightarrow x = 2 - t$; এটি গ্রহণযোগ্য ঠিক যখন $t \le 2$

দুই শাখার ডোমেন আলাদা, তাই উভয় শাখায় মূল থাকলেই দুটি ভিন্ন মূল পাওয়া যায়

অতএব, প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত $0 < t \le 2$

২২. ক. 3999960

ব্যাখ্যা: যেকোনো একটি স্থানে একটি নির্দিষ্ট অঙ্ক $4! = 24$ বার আসে

অঙ্কগুলোর যোগফল $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$; তাই প্রতিটি স্থানে অঙ্কগুলোর মোট অবদান $24 \times 15 = 360$

স্থানীয় মানের যোগফল $= 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111$

অতএব, নির্ণেয় যোগফল $= 360 \times 11111 = 3999960$

২৩. গ. 168

ব্যাখ্যা: প্রথম অঙ্ক হতে পারে $3, 4, 5$; শেষ অঙ্ক হতে পারে $1, 3, 5$ এবং তা প্রথম অঙ্কের সমান হতে পারবে না
প্রথম অঙ্ক $3, 4, 5$ হলে শেষ অঙ্কের পছন্দ যথাক্রমে $2, 3, 2$টি; তাই প্রান্তের ক্রমযুক্ত জোড়া 7টি
প্রতিটি জোড়ার জন্য মাঝের চার স্থানে অবশিষ্ট চার অঙ্ক $4!$ উপায়ে বসে
অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা $= 7 \times 4! = 168$

২৪. গ. 6720

ব্যাখ্যা: A, B, C-এর তিনটি স্থান নির্বাচন করা যায় ${}^8C_3$ উপায়ে
নির্বাচিত স্থানগুলোতে বাম থেকে ডানে A, B, C বসানোর উপায় একটিই
অবশিষ্ট পাঁচজনকে বাকি পাঁচ স্থানে $5!$ উপায়ে বসানো যায়
অতএব, মোট বিন্যাস $= {}^8C_3 \times 5! = 56 \times 120 = 6720$

২৫. ক. 69120

ব্যাখ্যা: তিন বিষয়কে তিনটি গুচ্ছ ধরলে গণিতের গুচ্ছটি বাম বা ডান প্রান্তে থাকবে: 2টি পছন্দ
অন্য দুই গুচ্ছের ক্রম $2!$ উপায়ে নির্ধারিত হয়
গুচ্ছগুলোর ভিতরে বই সাজানোর উপায় যথাক্রমে $5!, 4!, 3!$
অতএব, মোট বিন্যাস $= 2 \times 2! \times 5! \times 4! \times 3! = 69120$

২৬. ঘ. 360

ব্যাখ্যা: ঘূর্ণন বাদ দিতে নির্দিষ্ট প্রথম পুঁতিটি স্থির করি; দ্বিতীয় পুঁতির বিপরীত স্থানটিও তখন নির্দিষ্ট
অবশিষ্ট ছয়টি পুঁতি বসানোর উপায় $6!$
মালা উল্টালে বিপরীত দিকের ক্রম একই মালা দেয়; সব পুঁতি ভিন্ন বলে কোনো বিন্যাস নিজের প্রতিবিম্বের সঙ্গে মেলে না; তাই 2 দিয়ে ভাগ করতে হবে
অতএব, মালার সংখ্যা $= \frac{6!}{2} = 360$

২৭. গ. 52

ব্যাখ্যা: নির্দিষ্ট দুজনই থাকলে অবশিষ্ট চারজন পুরুষ থেকে দুজন ও চারজন নারী থেকে দুজন নিতে হবে; উপায় ${}^4C_2 \times {}^4C_2 = 36$
দুজনের কেউ না থাকলে চারজন পুরুষ থেকে তিনজন ও চারজন নারী থেকে তিনজন নিতে হবে; উপায় ${}^4C_3 \times {}^4C_3 = 16$
দুই ক্ষেত্র পরস্পর পৃথক
অতএব, মোট কমিটি $= 36 + 16 = 52$

২৮. গ. 29

ব্যাখ্যা: মুদ্রাসংখ্যা x, y, z হলে $x + 2y + 5z = 20$, যেখানে $x, y, z \geq 0$ পূর্ণসংখ্যা
$z = 0, 1, 2, 3, 4$ হলে $x + 2y$ যথাক্রমে $20, 15, 10, 5, 0$
এই ক্ষেত্রগুলোতে y-এর সম্ভাব্য মানসংখ্যা যথাক্রমে $11, 8, 6, 3, 1$; প্রতিটি y-এর জন্য x নির্দিষ্ট
অতএব, মোট উপায় $= 11 + 8 + 6 + 3 + 1 = 29$

২৯. খ. 350

ব্যাখ্যা: দুই প্রান্তে A থাকলে মাঝের সাত স্থানে A, A, B, B, B, C, C বসে; উপায় $\frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210$
দুই প্রান্তে B থাকলে উপায় $\frac{7!}{4!\,1!\,2!} = 105$
দুই প্রান্তে C থাকলে উপায় $\frac{7!}{4!\,3!} = 35$
অতএব, মোট বিন্যাস $= 210 + 105 + 35 = 350$

৩০. ঘ. 216

ব্যাখ্যা: প্রথম অঙ্ক 3 হলে বাকি চার স্থানে আরেকটি 3 বসে 4 উপায়ে; অবশিষ্ট তিন স্থানে $0, 1, 2$ থেকে পছন্দ 3^3 উপায়ে
এই ক্ষেত্রে সংখ্যা $= 4 \times 3^3 = 108$
প্রথম অঙ্ক 3 না হলে প্রথমে 1 বা 2: 2টি পছন্দ; শেষ চার স্থানে দুইটি 3-এর স্থান ${}^4C_2$ উপায়ে; অন্য দুই স্থানে পছন্দ 3^2
অতএব, মোট সংখ্যা $= 108 + 2 \times {}^4C_2 \times 3^2 = 216$

৩১. খ. 32

ব্যাখ্যা: 1 অবশ্যই থাকবে এবং 2 থাকবে না; তাই অবশিষ্ট ছয়টি উপাদান $3, 4, \ldots, 8$ থেকে বিজোড়সংখ্যক নিতে হবে
নির্বাচনসংখ্যা $= {}^6C_1 + {}^6C_3 + {}^6C_5$
অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা $= 6 + 20 + 6 = 32$

৩২. খ. 126

ব্যাখ্যা: চারটি শীর্ষ নির্বাচন করলে তাদের গঠিত উত্তল চতুর্ভুজের দুই কর্ণ একটি অভ্যন্তরীণ ছেদবিন্দু দেয়
বিপরীতভাবে, দুটি কর্ণের প্রতিটি অভ্যন্তরীণ ছেদের সঙ্গে চারটি ভিন্ন শীর্ষ যুক্ত থাকে
কোনো তিনটি কর্ণ একবিন্দুগামী নয় বলে ভিন্ন চার-শীর্ষ নির্বাচন একই ছেদবিন্দু দেয় না
অতএব, ছেদবিন্দুর সংখ্যা ${}^9C_4 = 126$

৩৩. ক. 6

ব্যাখ্যা: একই বৃত্তে অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্রের প্রতিটি কর্ণ বৃত্তটির ব্যাস
সুষম অষ্টভুজের বিপরীত শীর্ষগুলো যোগ করলে 4টি ভিন্ন ব্যাস পাওয়া যায়
যেকোনো দুই ব্যাসের চার প্রান্তবিন্দু একটি আয়তক্ষেত্র গঠন করে
অতএব, আয়তক্ষেত্রের সংখ্যা ${}^4C_2 = 6$

৩৪. ক. 1800

ব্যাখ্যা: নৌকাবিশিষ্ট চারটি সারি নির্বাচন ${}^5C_4$ উপায়ে এবং চারটি কলাম নির্বাচন ${}^6C_4$ উপায়ে
নির্বাচিত চার সারির সঙ্গে চার কলামের এক-এক মিল

স্থাপন করা যায় 4! উপায়ে
প্রতিটি মিল চারটি ঘর নির্দিষ্ট করে; অভিন্ন নৌকার জন্য আর কোনো অতিরিক্ত গুণক নেই
অতএব, মোট বিন্যাস = $^5C_4 \times {}^6C_4 \times 4! = 5 \times 15 \times 24 = 1800$

৩৫. ঘ. 42
ব্যাখ্যা: অঙ্কগুলো ছোট থেকে বড় ক্রমে নিলে অনুমোদিত ত্রয়ীগুলো: $(1,2,9), (1,3,8), (1,4,7), (1,5,6)$
বাকি ত্রয়ী $(2,3,7), (2,4,6), (3,4,5)$; মোট 7টি
সব অঙ্ক অশূন্য ও ভিন্ন, তাই প্রতিটি ত্রয়ী থেকে $3! = 6$ টি সংখ্যা হয়
অতএব, মোট সংখ্যা = $7 \times 6 = 42$

৩৬. খ. 36
ব্যাখ্যা: চারটি বলের মধ্যে তিন রঙই থাকলে রঙভিত্তিক সংখ্যা হবে $(2,1,1)$-এর কোনো একটি ক্রম
কোন রঙটি দুইবার থাকবে তা 3 উপায়ে বেছে নেওয়া যায়; প্রতিটি রঙের অন্তত দুটি বল উপলব্ধ আছে
নির্দিষ্ট রঙটি দুইবার থাকলে চারটি বলের রঙের অনুক্রম $\frac{4!}{2!} = 12$টি
অতএব, মোট অনুক্রম = $3 \times 12 = 36$

৩৭. ক. 4608
ব্যাখ্যা: $r^2 = r(r-1) + r$, তাই সমষ্টিকে দুই ভাগে ভাঙি
$r(r-1)\,{}^8C_r = 8 \cdot 7\,{}^6C_{r-2}$ এবং $r\,{}^8C_r = 8\,{}^7C_{r-1}$
প্রথম অংশে $r \geq 2$ ও দ্বিতীয় অংশে $r \geq 1$ ধরে যোগ করলে পাই $8 \cdot 7 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2^7$
অতএব, নির্ণেয় মান = $3584 + 1024 = 4608$

৩৮. ঘ. $[1,4]$
ব্যাখ্যা: বিপরীত সাইন ফাংশন সংজ্ঞায়িত হতে এর আর্গুমেন্ট -1 থেকে 1-এর মধ্যে থাকতে হবে
$-1 \leq \log_2 \frac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow 2^{-1} \leq \frac{x}{2} \leq 2^1$
$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$
অতএব, ডোমেন = $[1,4]$

৩৯. ক. 2880
ব্যাখ্যা: শব্দটিতে 5টি স্বরবর্ণ (E, U, A, I, O) এবং 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ (Q, T, N) আছে; কোনো অক্ষরের পুনরাবৃত্তি নেই
5টি স্বরবর্ণকে একটি ব্লক ধরলে মোট উপাদান $3 + 1 =$ 4টি, যাদের সাজানোর উপায় $4! = 24$
আবার, ব্লকের ভেতরের 5টি স্বরবর্ণ নিজেদের মধ্যে $5! = 120$ উপায়ে সাজতে পারে
অতএব, মোট বিন্যাস = $24 \times 120 = 2880$

৪০. ক. $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$
ব্যাখ্যা: ধরি, $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$
আড়াআড়ি গুণ করে একপাশে আনলে পাই, $(y-1)x^2 + (y+1)x + (y-1) = 0$
x বাস্তব হওয়ায় নিরূপক $\Delta \geq 0$ হতে হবে
$(y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow (3-y)(3y-1) \geq 0$
$\Rightarrow (y-3)(3y-1) \leq 0$
অতএব, $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$

৪১. খ. 639
ব্যাখ্যা: 3টি অভিন্ন সাদা বল থেকে যেকোনো সংখ্যক বাছাইয়ের উপায় $3 + 1 = 4$
4টি অভিন্ন কালো বল থেকে বাছাইয়ের উপায় $4 + 1 = 5$
5টি ভিন্ন ভিন্ন রঙের বল থেকে বাছাইয়ের উপায় $2^5 = 32$
মোট বাছাইয়ের উপায় = $4 \times 5 \times 32 = 640$; এর মধ্যে একটি উপায়ে কোনো বলই বাছাই করা হয়নি
অতএব, অন্তত একটি বল বাছাইয়ের উপায় = $640 - 1 = 639$

৪২. খ. $f(x) = x \cdot \frac{a^x-1}{a^x+1}$
ব্যাখ্যা: $f(x) = x \cdot \frac{a^x-1}{a^x+1}$-এর ক্ষেত্রে, $f(-x) = -x \cdot \frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1} = -x \cdot \frac{1-a^x}{1+a^x} = x \cdot \frac{a^x-1}{a^x+1} = f(x)$
যেহেতু $f(-x) = f(x)$, তাই এটি একটি যুগ্ম ফাংশন

৪৩. ঘ. 60
ব্যাখ্যা: $(0,0)$ থেকে $(2,3)$-এ যাওয়ার পথসংখ্যা = $^5C_2 = 10$
$(2,3)$ থেকে $(4,5)$-এ যেতে ডানে $4 - 2 = 2$ ধাপ এবং উপরে $5 - 3 = 2$ ধাপ যেতে হবে
এই অংশের পথসংখ্যা = $^4C_2 = 6$
অতএব, $(2,3)$ বিন্দুগামী মোট ক্ষুদ্রতম পথ = $10 \times 6 = 60$

৪৪. গ. $-\frac{29}{20}$
ব্যাখ্যা: প্রদত্ত সমীকরণে ক্রমান্বয়ে $x = 2$ ও $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই:
$2f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ ...(i)
$2f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4}$ ...(ii)
(i)-কে 2 দ্বারা এবং (ii)-কে 3 দ্বারা গুণ করে: $4f(2) + 6f\left(\frac{1}{2}\right) = 8$ এবং $9f(2) + 6f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$
বিয়োগ করে, $5f(2) = \frac{3}{4} - 8 = -\frac{29}{4}$
অতএব, $f(2) = -\frac{29}{20}$

৪৫. ক. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
ব্যাখ্যা: যৌগিক ফাংশনটি হলো $(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = \sqrt{(x^2+1)-2} = \sqrt{x^2-1}$
ফাংশনটি বাস্তব ও সংজ্ঞায়িত হতে রুটের ভেতরের অংশ অঋণাত্মক হতে হবে
$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$

এর সমাধান $x \leq -1$ অথবা $x \geq 1$; অর্থাৎ ডোমেন $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

৪৬. খ. 5775

ব্যাখ্যা: 12 জনকে 4 জন করে 3টি দলে ভাগ করতে হবে
দলগুলোর নাম ভিন্ন হলে উপায় হতো $\frac{12!}{(4!)^3} = 34650$
যেহেতু দলগুলোর কোনো নির্দিষ্ট নাম বা পরিচয় নেই (দলগুলো অভিন্ন), তাই 3! দিয়ে ভাগ করতে হবে
অতএব, মোট উপায় $= \frac{34650}{3!} = \frac{34650}{6} = 5775$

৪৭. গ. $\log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

ব্যাখ্যা: ধরি, $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = 2^x - \frac{1}{2^x} \Rightarrow (2^x)^2 - 2y(2^x) - 1 = 0$
দ্বিঘাত সমীকরণের সূত্র অনুযায়ী, $2^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$
যেহেতু $2^x > 0$ এবং $y - \sqrt{y^2+1} < 0$, তাই শুধুমাত্র ধনাত্মক মানটি গ্রহণযোগ্য
$2^x = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = \log_2\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$
অতএব, $f^{-1}(x) = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

৪৮. ক. 28

ব্যাখ্যা: ধরি, $x = a + 2$, $y = b + 3$ এবং $z = c + 4$, যেখানে $a, b, c \geq 0$
প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই: $(a + 2) + (b + 3) + (c + 4) = 15 \Rightarrow a + b + c = 6$
nটি চলক ও যোগফল r-এর অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক সমাধানের সংখ্যা ${}^{n+r-1}C_r$
এখানে $n = 3$, $r = 6$; অতএব, সমাধান সংখ্যা $= {}^8C_6 = {}^8C_2 = 28$

৪৯. ক. $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2$
$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x)$
$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$
$\cos x$-এর মৌলিক পর্যায় 2π; তাই $\cos 4x$-এর মৌলিক পর্যায় $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
অতএব, $f(x)$-এর মৌলিক পর্যায় $\frac{\pi}{2}$

৫০. ঘ. 5

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $a\cos x + b\sin x$ এর সর্বোচ্চ মান $\sqrt{a^2+b^2}$
এখানে, $a = 3$ এবং $b = 4$
সুতরাং, সর্বোচ্চ মান $= \sqrt{3^2+4^2}$
$= \sqrt{25}$
অতএব, সর্বোচ্চ মান = 5