MCQ

৫০ নম্বর

১. ক. $25\ \text{cm}^2$ ও 2 রেডিয়ান

ব্যাখ্যা: ধরি, ব্যাসার্ধ r cm এবং চাপের দৈর্ঘ্য l cm

প্রশ্নমতে, $2r + l = 20$, অর্থাৎ $l = 20 - 2r$

$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(20 - 2r) = 10r - r^2$

$S = 25 - (r - 5)^2 \le 25$; সমতা হবে যখন $r = 5$

তখন $l = 20 - 2 \times 5 = 10$ এবং $\theta = \frac{l}{r} = \frac{10}{5} = 2$ রেডিয়ান

অতএব, সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল $25\ \text{cm}^2$ এবং কেন্দ্রীয় কোণ 2 রেডিয়ান

২. ক. $\frac{\pi}{4}$

ব্যাখ্যা: $f^2(x) = \sin^2 2x + \cos^2 2x + 2|\sin 2x \cos 2x| = 1 + |\sin 4x|$

যেহেতু $f(x) > 0$, তাই $f(x) = \sqrt{1 + |\sin 4x|}$

$|\sin t|$ এর পর্যায় π, তাই $|\sin 4x|$ এর মৌলিক পর্যায় $\frac{\pi}{4}$

f ও f^2 এর পর্যায় একই

অতএব, মৌলিক পর্যায় $\frac{\pi}{4}$

৩. ক. $-\frac{336}{625}$

ব্যাখ্যা: $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$ থেকে $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{3}$

যোগ ও বিয়োগ করে, $\sec\theta = \frac{5}{3}$ এবং $\tan\theta = \frac{4}{3}$

সুতরাং, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ এবং $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\sin 2\theta = \frac{24}{25}$ এবং $\cos 2\theta = \frac{9-16}{25} = -\frac{7}{25}$

$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta \cos 2\theta = 2 \times \frac{24}{25} \times \left(-\frac{7}{25}\right)$

অতএব, মান $-\frac{336}{625}$

৪. খ. $[5 - 2\sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2}]$

ব্যাখ্যা: $f(x) = \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{7}{2}(1 + \cos 2x) + 2\sin 2x$

$f(x) = 5 + 2\cos 2x + 2\sin 2x = 5 + 2\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

যেহেতু $-1 \le \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$, তাই $5 - 2\sqrt{2} \le f(x) \le 5 + 2\sqrt{2}$

অতএব, রেঞ্জ $[5 - 2\sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2}]$

৫. খ. $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$

ব্যাখ্যা: ধরি, $y = \frac{2+\sin x}{3+\cos x}$ (যেহেতু $3 + \cos x \ge 2 > 0$)

$\sin x - y\cos x = 3y - 2$

বামপক্ষের রেঞ্জ $\left[-\sqrt{1+y^2}, \sqrt{1+y^2}\right]$, তাই $|3y - 2| \le \sqrt{1+y^2}$

$(3y-2)^2 \le 1 + y^2$

$8y^2 - 12y + 3 \le 0$

সুতরাং, $\frac{3-\sqrt{3}}{4} \le y \le \frac{3+\sqrt{3}}{4}$

অতএব, রেঞ্জ $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right]$

৬. ঘ. 49

ব্যাখ্যা: $E = 9\csc^2 x + 16\sec^2 x = 9(1 + \cot^2 x) + 16(1 + \tan^2 x)$

$E = 25 + 9\cot^2 x + 16\tan^2 x$

A.M. $\ge$ G.M. প্রয়োগ করে, $9\cot^2 x + 16\tan^2 x \ge 2\sqrt{144\cot^2 x \tan^2 x}$

$= 2 \times 12 = 24$

সুতরাং, $E \ge 25 + 24 = 49$

অতএব, সর্বনিম্ন মান 49

৭. গ. $\left[-1, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right]$

ব্যাখ্যা: ধরি, $t = \sin x + \cos x$; তাহলে $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ এবং $\sin x \cos x = \frac{t^2-1}{2}$

$f = t + \frac{t^2-1}{2} = \frac{(t+1)^2}{2} - 1$

$t = -1$ প্রদত্ত ব্যবধিতে আছে, তাই সর্বনিম্ন মান -1

$t = \sqrt{2}$ হলে $f = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$ এবং $t = -\sqrt{2}$ হলে $f = \frac{1}{2} - \sqrt{2}$; তাই সর্বোচ্চ মান $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

অতএব, রেঞ্জ $\left[-1, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right]$

৮. খ. 2702

ব্যাখ্যা: $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{3}{2}$, তাই $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$\tan^2\theta + \cot^2\theta = \frac{\sin^4\theta + \cos^4\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{1 - 2\times\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}} = 14$

ধরি, $u = \tan^2\theta$, $v = \cot^2\theta$; তাহলে $u + v = 14$ এবং $uv = 1$

$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 14^3 - 3 \times 14$

অতএব, মান $2744 - 42 = 2702$

৯. ক. $-\frac{7}{8}$

ব্যাখ্যা: সমীকরণ দুটি বর্গ করে যোগ করে, $(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$

$2 + 2(\sin x \sin y + \cos x \cos y) = \frac{5}{2}$

সুতরাং, $\cos(x - y) = \frac{1}{4}$

$\cos 2(x - y) = 2\cos^2(x - y) - 1 = 2 \times \frac{1}{16} - 1$

অতএব, মান $-\frac{7}{8}$

১০. ক. $\frac{3}{16}$

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $\cos\theta\cos(60°-\theta)\cos(60°+\theta)=\frac{1}{4}\cos 3\theta$
$\theta=10°$ বসিয়ে, $\cos 10°\cos 50°\cos 70°=\frac{1}{4}\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{8}$
সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=\frac{\sqrt{3}}{8}\times\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
অতএব, মান $\frac{3}{16}$

১১. গ. $\frac{57}{64}$
ব্যাখ্যা: $\sin 50°=\sin 130°$, তাই $\theta=10°, 70°, 130°$ নেওয়া যায়
আমরা জানি, $\sin^6\theta=\frac{10-15\cos 2\theta+6\cos 4\theta-\cos 6\theta}{32}$
এখানে, $\cos 20°+\cos 140°+\cos 260°=0$ এবং $\cos 40°+\cos 280°+\cos 520°=0$
আবার, তিনটি কোণের প্রতিটির জন্য $\cos 6\theta=\cos 60°=\frac{1}{2}$
$\frac{30-3\times\frac{1}{2}}{32}=\frac{57}{64}$
অতএব, মান $\frac{57}{64}$

১২. খ. 9
ব্যাখ্যা: $\theta=10°, 70°, 130°$ এর জন্য $3\theta=30°, 210°, 390°$, তাই $\tan 3\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$t=\tan\theta$ ধরে, $\frac{3t-t^3}{1-3t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$t^3-\sqrt{3}t^2-3t+\frac{1}{\sqrt{3}}=0$
এর তিনটি পৃথক মূল $u=\tan 10°$, $v=\tan 70°$, $w=\tan 130°$
মূল ও সহগের সম্পর্ক থেকে $u+v+w=\sqrt{3}$ এবং $uv+vw+wu=-3$
$u^2+v^2+w^2=(u+v+w)^2-2(uv+vw+wu)=3+6$
অতএব, মান 9

১৩. ক. $\frac{5}{4}$
ব্যাখ্যা: ধরি, $\theta=\frac{\pi}{7}$ এবং $S=\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta$
$2\sin\theta\,S=(\sin 3\theta-\sin\theta)+(\sin 5\theta-\sin 3\theta)+(\sin 7\theta-\sin 5\theta)$
$=\sin 7\theta-\sin\theta=-\sin\theta$, তাই $S=-\frac{1}{2}$
সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}S$
$=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$
অতএব, মান $\frac{5}{4}$

১৪. ঘ. $\cot\frac{\pi}{96}-\frac{32}{\sqrt{3}}$
ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $\cot u-2\cot 2u=\tan u$
$2^k\tan\left(2^kx\right)=2^k\cot\left(2^kx\right)-2^{k+1}\cot\left(2^{k+1}x\right)$
$k=0$ থেকে 4 পর্যন্ত যোগ করলে মধ্যবর্তী পদগুলো কেটে যায়, তাই যোগফল $=\cot x-32\cot 32x$
$x=\frac{\pi}{96}$ হলে $32x=\frac{\pi}{3}$ এবং $\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
অতএব, মান $\cot\frac{\pi}{96}-\frac{32}{\sqrt{3}}$

১৫. খ. $\frac{\pi}{3}$
ব্যাখ্যা: $\sin^{-1}$ এর রেঞ্জ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$
যেহেতু $\frac{\pi}{3}$ রেঞ্জের মধ্যে আছে
অতএব, মুখ্য মান $\frac{\pi}{3}$

১৬. ঘ. $\frac{16}{65}$
ব্যাখ্যা: α দ্বিতীয় চতুর্ভাগে, তাই $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$
β চতুর্থ চতুর্ভাগে, তাই $\sin\beta=-\sqrt{1-\frac{144}{169}}=-\frac{5}{13}$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$=\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{36-20}{65}$
অতএব, মান $\frac{16}{65}$

১৭. গ. $\frac{1+\sqrt{10}}{3}$
ব্যাখ্যা: $\tan 2\alpha=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{7+\frac{1}{2}}{1-\frac{7}{2}}=-3$
$t=\tan\alpha$ নিলে $\frac{2t}{1-t^2}=-3$
$3t^2-2t-3=0$
সুতরাং, $t=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$
যেহেতু α সূক্ষ্মকোণ, তাই $t>0$
অতএব, $\tan\alpha=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$

১৮. ক. $60°$
ব্যাখ্যা: সাইন সূত্র থেকে $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$
শর্তে বসিয়ে $4R^2$ দ্বারা গুণ করে, $a^2+b^2-c^2=ab$
কোসাইন সূত্রানুসারে, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$
যেহেতু $0<C<\pi$, তাই $C=60°$
অতএব, $\angle C=60°$

১৯. খ. $-\frac{47}{49}$
ব্যাখ্যা: সাইন সূত্রানুসারে, $a:b:c=5:7:8$; ধরি, $a=5k$, $b=7k$, $c=8k$
$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{25+49-64}{2\times5\times7}=\frac{1}{7}$
$\cos 2C=2\cos^2 C-1=\frac{2}{49}-1=-\frac{47}{49}$
অতএব, $\cos 2C=-\frac{47}{49}$

২০. ঘ. 2
ব্যাখ্যা: $A+B=\pi-C$ হওয়ায় $\cot(A+B)=-\cot C$
$\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$
সুতরাং, $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C = (\cot A + \cot B + \cot C)^2 - 2(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) = 2^2 - 2 = 2$
অতএব, নির্ণেয় মান 2

২১. ঘ. $\frac{7}{8}$
ব্যাখ্যা: ত্রিভুজের পরিচিত সূত্র, $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$
এখানে $\frac{r}{R} = \frac{1}{4}$; তাই $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{5}{4}$
$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{3-(\cos A+\cos B+\cos C)}{2}$
$= \frac{3-\frac{5}{4}}{2} = \frac{7}{8}$
অতএব, নির্ণেয় মান $\frac{7}{8}$

২২. গ. $\frac{323}{325}$
ব্যাখ্যা: $\cos A = \frac{14^2+15^2-13^2}{2\times14\times15} = \frac{3}{5}$
$\cos B = \frac{13^2+15^2-14^2}{2\times13\times15} = \frac{33}{65}$
ত্রিভুজের কোণ হওয়ায় $\sin A = \frac{4}{5}$ এবং $\sin B = \sqrt{1-\frac{1089}{4225}} = \frac{56}{65}$
$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{3}{5} \times \frac{33}{65} + \frac{4}{5} \times \frac{56}{65} = \frac{99+224}{325} = \frac{323}{325}$
অতএব, $\cos(A-B) = \frac{323}{325}$

২৩. খ. $\frac{17}{108}$
ব্যাখ্যা: অর্ধকোণের সূত্র থেকে $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{s-c}{s} = \frac{1}{5}$
$5s - 5c = s \Rightarrow 4s = 5c \Rightarrow 2(a+b) = 3c$
$a = 2k$, $b = 3k$ নিলে $c = \frac{10k}{3}$
$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4+9-\frac{100}{9}}{12} = \frac{17}{108}$
অতএব, $\cos C = \frac{17}{108}$

২৪. ঘ. $\frac{1}{4}$
ব্যাখ্যা: $A + B + C = \pi$ এবং $A = 2B$ থেকে $C = \pi - 3B$
$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin 3B}{\sin B} = 3 - 4\sin^2 B = \frac{3}{2}$
সুতরাং, $\sin^2 B = \frac{3}{8}$
$\cos A = \cos 2B = 1 - 2\sin^2 B = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
অতএব, $\cos A = \frac{1}{4}$

২৫. গ. $60°$
ব্যাখ্যা: ধরি, $u = \frac{A+B}{2}$; তাহলে $\frac{A-B}{2} = 30°$ এবং $0 < u < 90°$
$\sin A + \sin B = 2\sin u \cos 30° = \sqrt{3}\sin u$
$\sin C = \sin(A+B) = 2\sin u \cos u$
শর্তে বসিয়ে $\sqrt{3}\sin u = 2\sqrt{3}\sin u \cos u$
যেহেতু $\sin u > 0$, তাই $\cos u = \frac{1}{2}$, অর্থাৎ $u = 60°$
$C = 180° - 2u = 60°$
অতএব, $C = 60°$

২৬. ক. 3 : 5 : 7
ব্যাখ্যা: ধরি, $a = b - d$ এবং $c = b + d$। কোসাইন সূত্র থেকে $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° = a^2 + b^2 + ab$
$(b+d)^2 = (b-d)^2 + b^2 + b(b-d)$
$b^2 + 2bd + d^2 = 3b^2 - 3bd + d^2$
সুতরাং, $5bd = 2b^2$, অর্থাৎ $d = \frac{2b}{5}$ $(b > 0)$
$a : b : c = \frac{3b}{5} : b : \frac{7b}{5}$
অতএব, $a : b : c = 3 : 5 : 7$

২৭. ঘ. $\frac{49}{36}$
ব্যাখ্যা: ধরি, $u = \tan \frac{A}{2}$, $v = \tan \frac{B}{2}$, $w = \tan \frac{C}{2}$
$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$ হওয়ায় $uv + vw + wu = 1$
প্রমাণিত সূত্র: $u + v + w = \frac{4R+r}{s}$
$u + v + w = \frac{20+2}{12} = \frac{11}{6}$
$u^2 + v^2 + w^2 = (u+v+w)^2 - 2(uv + vw + wu) = \frac{121}{36} - 2$
অতএব, মান $\frac{49}{36}$

২৮. ক. $\frac{5\pi}{12}$
ব্যাখ্যা: $\sin^{-1}$ এর মুখ্য মানের ব্যবধি $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ এবং $\cos^{-1}$ এর জন্য $[0, \pi]$
$\sin \frac{17\pi}{12} = -\sin \frac{5\pi}{12}$, তাই $\sin^{-1}\left(\sin \frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{5\pi}{12}$
$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6}$, তাই $\cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$
$-\frac{5\pi}{12} + \frac{5\pi}{6}$
অতএব, মান $\frac{5\pi}{12}$

২৯. গ. $\pi + \tan^{-1}\frac{2}{3}$
ব্যাখ্যা: ধরি, $u = \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$; তাহলে $\tan u = \frac{2+3}{1-6} = -1$
দুটি কোণই $\frac{\pi}{4}$ এর বড় ও $\frac{\pi}{2}$ এর ছোট, তাই $\frac{\pi}{2} < u < \pi$, অর্থাৎ $u = \frac{3\pi}{4}$
ধরি, $S = \frac{3\pi}{4} + \tan^{-1}5$; তাহলে $\tan S = \frac{-1+5}{1+5} = \frac{2}{3}$
$\frac{3\pi}{4} < S < \frac{5\pi}{4}$ এবং $\tan S > 0$, তাই $\pi < S < \frac{5\pi}{4}$
অতএব, $S = \pi + \tan^{-1}\frac{2}{3}$

৩০. ঘ. $\pi - 2\tan^{-1}x$
ব্যাখ্যা: ধরি, $\theta = \tan^{-1}x$; যেহেতু $x > 1$, তাই $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\frac{2x}{1+x^2} = \sin 2\theta$ এবং $\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$
$\sin 2\theta = \sin(\pi - 2\theta)$, যেখানে $0 < \pi - 2\theta < \frac{\pi}{2}$
অতএব, $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi - 2\tan^{-1}x$

৩১. খ. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
ব্যাখ্যা: বাস্তব মানের জন্য $-1 \le \frac{x^2-3}{x^2+1} \le 1$ হতে হবে; এখানে $x^2 + 1 > 0$
ডানদিকের অসমতা $x^2 - 3 \le x^2 + 1$ সর্বদা সত্য

বামদিকের অসমতা থেকে $-(x^2+1) \le x^2-3$, বা $2x^2 \ge 2$, অর্থাৎ $|x| \ge 1$
অতএব, ডোমেইন $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

৩২. খ. $\frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$
ব্যাখ্যা: ডোমেইন $|x| \le \frac{1}{2}$; যোগফল ধনাত্মক হওয়ায় $x > 0$
$\sin^{-1}(2x) = \frac{\pi}{6} - \sin^{-1} x$ থেকে $2x = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$
$(4+\sqrt{3})x = \sqrt{1-x^2}$
বর্গ করে, $(19+8\sqrt{3})x^2 = 1-x^2$
$x^2 = \frac{1}{20+8\sqrt{3}} = \frac{1}{4(5+2\sqrt{3})}$
অতএব, $x = \frac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$

৩৩. ক. 1
ব্যাখ্যা: উভয়পক্ষের ট্যানজেন্ট নিয়ে, $\frac{2x}{5-x^2} = \frac{1}{2}$
$x^2+4x-5=0$
$(x-1)(x+5)=0$
সুতরাং, $x=1$ অথবা $x=-5$
$x=-5$ হলে বামপক্ষ ঋণাত্মক, কিন্তু ডানপক্ষ ধনাত্মক; তাই গ্রহণযোগ্য নয়
$x=1$ হলে বামপক্ষ $= \tan^{-1} 3 - \frac{\pi}{4}$, যা $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ এ থাকে এবং এর ট্যানজেন্ট $\frac{1}{2}$
অতএব, একমাত্র সমাধান $x=1$

৩৪. খ. $\tan^{-1}\frac{6}{13}$
ব্যাখ্যা: $\frac{3}{9n^2+3n-1} = \frac{(3n+2)-(3n-1)}{1+(3n+2)(3n-1)}$
$n \ge 1$ হলে $0 < \tan^{-1}(3n+2) - \tan^{-1}(3n-1) < \frac{\pi}{2}$, তাই প্রতিটি পদ $= \tan^{-1}(3n+2) - \tan^{-1}(3n-1)$
যোগ করলে মধ্যবর্তী পদগুলো কেটে গিয়ে $S = \tan^{-1} 32 - \tan^{-1} 2$
$S = \tan^{-1}\frac{32-2}{1+32\times 2} = \tan^{-1}\frac{30}{65}$
অতএব, মান $\tan^{-1}\frac{6}{13}$

৩৫. খ. $\frac{\sqrt{14}}{4}$
ব্যাখ্যা: ধরি, $u = \tan^{-1} x$, $v = \tan^{-1}(2x)$, $w = \tan^{-1}(4x)$; তিনটিই $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ এ আছে
$u+v+w = \pi$ হলে $\tan u + \tan v + \tan w = \tan u \tan v \tan w$
$x + 2x + 4x = x \times 2x \times 4x$
$7x = 8x^3$
সুতরাং, $x^2 = \frac{7}{8}$ এবং $x > 0$ হওয়ায় $x = \frac{\sqrt{14}}{4}$
এই মানে $\sin(u+v+w) = 0$ এবং $0 < u+v+w < \frac{3\pi}{2}$, তাই যোগফল π
অতএব, $x = \frac{\sqrt{14}}{4}$

৩৬. গ. $2\tan^{-1} 2$
ব্যাখ্যা: এখানে, $x \times \frac{4}{x} = 4 > 1$, তাই যোগফল $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ এ থাকে
$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{4}{x} = \pi + \tan^{-1}\frac{x+\frac{4}{x}}{1-4} = \pi - \tan^{-1}\frac{x+\frac{4}{x}}{3}$
A.M. $\ge$ G.M. থেকে $x + \frac{4}{x} \ge 4$, সমতা হবে $x=2$ এ
সুতরাং, মান $\le \pi - \tan^{-1}\frac{4}{3}$, এবং $x=2$ এ মান $2\tan^{-1} 2$
আবার, $\tan\left(2\tan^{-1} 2\right) = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}$, তাই $2\tan^{-1} 2 = \pi - \tan^{-1}\frac{4}{3}$
অতএব, সর্বোচ্চ মান $2\tan^{-1} 2$

৩৭. ক. $x^2+y^2+xy = \frac{3}{4}$
ব্যাখ্যা: ধরি, $u = \sin^{-1} x$; তাহলে $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - u\right)$
$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{2}$, কারণ $\cos u \ge 0$
$2y + x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$
বর্গ করে, $4y^2 + 4xy + x^2 = 3 - 3x^2$
অতএব, $x^2+y^2+xy = \frac{3}{4}$

৩৮. ঘ. 8
ব্যাখ্যা: ডোমেইনের শর্ত: $\cos 3x \not\equiv 0$ এবং $\cos 2x \not\equiv 0$
সমীকরণ থেকে $\sin 3x \sin 2x = \cos 3x \cos 2x$, অর্থাৎ $\cos 5x = 0$
সুতরাং, $x = \frac{(2k+1)\pi}{10}$; $[0, 2\pi)$ এ $k = 0, 1, \ldots, 9$ থেকে 10 টি সম্ভাব্য মান
এদের মধ্যে $x = \frac{\pi}{2}$ ও $x = \frac{3\pi}{2}$ এ $\cos 3x = 0$, তাই বাদ যাবে
অন্য কোনো মানে $\cos 3x$ বা $\cos 2x$ শূন্য হয় না
অতএব, সমাধান $10 - 2 = 8$ টি

৩৯. গ. $\left(1, \frac{5}{4}\right)$
ব্যাখ্যা: $t = \cos x \in [-1, 1]$ নিয়ে, $k = 1 - t - t^2 = \frac{5}{4} - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2$
$(-1, 1)$ এর প্রতিটি t এর জন্য 2 টি x পাওয়া যায়, কিন্তু $t = \pm 1$ এর জন্য 1 টি করে
তাই ঠিক 4 টি সমাধানের জন্য t এর দুটি পৃথক মানই $(-1, 1)$ এ থাকতে হবে
$t = -1$ এ $k = 1$ এবং পরাবৃত্তের সর্বোচ্চ মান $\frac{5}{4}$ (যা $t = -\frac{1}{2}$ এ)
$k = 1$ হলে $t = 0, -1$ থেকে 3 টি এবং $k = \frac{5}{4}$ হলে $t = -\frac{1}{2}$ থেকে 2 টি সমাধান হয়
অতএব, $1 < k < \frac{5}{4}$

৪০. ক. 6
ব্যাখ্যা: $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$ এবং $6 \sin x \cos x = 3 \sin 2x$
$t = \sin 2x$ নিয়ে, $1 - 2t^2 + 3t = 2$

$2t^2 - 3t + 1 = 0$
$(2t - 1)(t - 1) = 0$
সুতরাং, $t = \frac{1}{2}$ অথবা $t = 1$
$0 \le 2x < 4\pi$ এ $\sin 2x = \frac{1}{2}$ এর 4 টি এবং $\sin 2x = 1$ এর 2 টি সমাধান আছে; দুই সেট পৃথক
অতএব, মোট সমাধান $4 + 2 = 6$ টি

৪১. গ. 5
ব্যাখ্যা: $\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ থেকে দুটি সম্ভাবনা পাওয়া যায়
প্রথমত, $3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2n\pi$, অর্থাৎ $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}$; $n = 0, 1, 2, 3, 4$ থেকে 5 টি সমাধান
দ্বিতীয়ত, $3x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 2n\pi$, অর্থাৎ $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; ব্যবধিতে কেবল $x = \frac{\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{2}$ প্রথম তালিকায় $n = 1$ এর জন্য আগেই আছে
অতএব, পৃথক সমাধান 5 টি

৪২. ঘ. 8
ব্যাখ্যা: উভয়পক্ষ অঋণাত্মক; তাই বর্গ করলে সমতুল্য সমীকরণ পাওয়া যায়
$1 + 2|\sin x \cos x| = \frac{3}{2}$
$|\sin 2x| = \frac{1}{2}$
সুতরাং, $\sin 2x = \frac{1}{2}$ অথবা $\sin 2x = -\frac{1}{2}$
$0 \le 2x < 4\pi$ এ প্রতিটি সমীকরণের 4 টি করে সমাধান আছে
অতএব, মোট সমাধান $4 + 4 = 8$ টি

৪৩. খ. 8
ব্যাখ্যা: ধরি, $u = 4^{\sin^2 x}$; তাহলে $1 \le u \le 4$ এবং $4^{\cos^2 x} = \frac{4}{u}$
প্রশ্নমতে, $u + \frac{4}{u} = \frac{9}{2}$
$2u^2 - 9u + 8 = 0$
সুতরাং, $u = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{4}$; উভয় মূলই $(1, 4)$ এর মধ্যে এবং পরস্পর পৃথক
তাই $\sin^2 x$ এর দুটি পৃথক মান পাওয়া যায়, প্রত্যেকটি $(0, 1)$ এর মধ্যে
প্রতিটি মানের জন্য $[0, 2\pi)$ এ 4 টি করে সমাধান আছে
অতএব, মোট সমাধান $2 \times 4 = 8$ টি

৪৪. খ. 6
ব্যাখ্যা: $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$ ব্যবহার করে, $\sin 2x(1 + 2\cos x) = 0$
$\sin 2x = 0$ থেকে $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$
$1 + 2\cos x = 0$ থেকে $\cos x = -\frac{1}{2}$, অর্থাৎ $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
দুটি তালিকায় কোনো সাধারণ মান নেই
অতএব, পৃথক সমাধান $4 + 2 = 6$ টি

৪৫. গ. $\frac{3\pi}{2}$
ব্যাখ্যা: $2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x = 3$
$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$
$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$
$\sin x = \frac{1}{2}$ থেকে $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ এবং $\sin x = 1$ থেকে $x = \frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$
অতএব, যোগফল $\frac{3\pi}{2}$

৪৬. গ. $0, \frac{\pi}{2}$
ব্যাখ্যা: উভয়পক্ষকে $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করে, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$
$\theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
$0 \le \theta \le \pi$ এ $n = 0$ নিয়ে, $\theta = \frac{\pi}{2}$ অথবা $\theta = 0$
অতএব, সমাধান $0, \frac{\pi}{2}$

৪৭. ঘ. $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
ব্যাখ্যা: $3\tan^2\theta = 1$
$\tan^2\theta = \frac{1}{3} = \tan^2\frac{\pi}{6}$
$\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ হলে সাধারণ সমাধান $\theta = n\pi \pm \alpha$
অতএব, $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

৪৮. ক. $\frac{1621}{4096}$
ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{1}{4}$
বা, $1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$
সুতরাং, $\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$
আবার, $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = \frac{1}{4} - 4 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4}$
বা, $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$
যোগ ও বিয়োগ করে, $\sin\theta = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$ এবং $\cos\theta = \frac{1-\sqrt{7}}{4}$
ক্যালকুলেটরে বসিয়ে, $\sin^{10}\theta + \cos^{10}\theta \approx 0.3957 = \frac{1621}{4096}$
অতএব, মান $\frac{1621}{4096}$

৪৯. খ. $\frac{k-1}{k+1}\sin(\alpha + \beta)$
ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $\tan\alpha = k\tan\beta$
বা, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = k \times \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$
বা, $\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} = \frac{k}{1}$
যোজন-বিয়োজন করে, $\frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \frac{k-1}{k+1}$
বা, $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{k-1}{k+1}$
অতএব, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{k-1}{k+1}\sin(\alpha + \beta)$

৫০. গ. $\sqrt{2} - 1$
ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$
সুতরাং, $2\tan^{-1}x + 2\left(\tan^{-1}x + \cot^{-1}x\right) = \frac{5\pi}{4}$

বা, $2\tan^{-1} x + \pi = \frac{5\pi}{4}$
বা, $2\tan^{-1} x = \frac{\pi}{4}$
বা, $\tan^{-1} x = \frac{\pi}{8}$
অতএব, $x = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$