MCQ ৫০ নম্বর

১. খ. -3

ব্যাখ্যা: লম্ব হওয়ার শর্ত, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = 0$

এখানে, $(2)(m) + (m)(-4) + (-3)(2) = 0$

$\Rightarrow 2m - 4m - 6 = 0$

$\Rightarrow -2m = 6$

সুতরাং, $m = -3$

২. গ. 1

ব্যাখ্যা: লম্ব দূরত্বের সূত্র, $d = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

এখানে, $d = \frac{|1(2)-2(1)+2(-1)+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$

$= \frac{|2-2-2+5|}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3}$

সুতরাং, $d = 1$ একক

৩. খ. 3

ব্যাখ্যা: লম্ব অভিক্ষেপ, $\text{proj} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|B|}$

এখানে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3)(2) + (4)(2) + (-5)(1) = 6 + 8 - 5 = 9$

এবং, $|\vec{B}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

সুতরাং, $\text{proj} = \frac{9}{3} = 3$

৪. খ. $\frac{7}{2}$

ব্যাখ্যা: ধরি, $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3)$

এখানে, $\overrightarrow{AB} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{AC} = -\hat{i} + 3\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{36+9+4} = \frac{1}{2}\sqrt{49}$

সুতরাং, ক্ষেত্রফল $= \frac{7}{2}$ বর্গএকক

৫. ঘ. $\sin^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{15}\right)$

ব্যাখ্যা: রেখার দিক ভেক্টর, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং সমতলের অভিলম্ব, $\vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

সূত্রমতে, $\sin\theta = \frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}$

এখানে, $\vec{b} \cdot \vec{n} = 6 - 4 - 10 = -8$

$|\vec{b}| = 3$ এবং $|\vec{n}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

সুতরাং, $\sin\theta = \frac{8}{15\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{15}$

৬. ক. $2x - y + 3z = 16$

ব্যাখ্যা: সমান্তরাল সমতলের সমীকরণ, $2x - y + 3z = k$

এটি $(1, -2, 4)$ বিন্দুগামী, তাই $2(1) - (-2) + 3(4) = k$

$\Rightarrow k = 2 + 2 + 12 = 16$

সুতরাং, সমীকরণ $2x - y + 3z = 16$

৭. খ. 4

ব্যাখ্যা: সমতলীয় হওয়ার শর্তে স্কেলার ত্রিপল গুণফল শূন্য হয়

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x(3-6) + 2(9+2) + 1(-9-1) = 0$

$\Rightarrow -3x + 22 - 10 = 0$

সুতরাং, $x = 4$

৮. গ. $90°$

ব্যাখ্যা: এখানে, $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

উভয়পাশে ডট গুণন করে, $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{c}|^2$

$\Rightarrow 25 + 144 + 120\cos\theta = 169$

$\Rightarrow 120\cos\theta = 0$

সুতরাং, $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$

৯. খ. $8\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$

এখানে, $AB\sin 30° = 8 \Rightarrow AB = 16$

এখন, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta = 16\cos 30°$

সুতরাং, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

১০. গ. 2

ব্যাখ্যা: পরস্পর লম্ব হলে অভিলম্ব ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণফল শূন্য হয়

$(p)(3) + (2)(-p) + (-1)(2) = 0$

$\Rightarrow 3p - 2p - 2 = 0$

সুতরাং, $p = 2$

১১. খ. $\frac{4}{\sqrt{5}}$

ব্যাখ্যা: আপেক্ষিক অবস্থান, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (3-t)\hat{i} + (2t-2)\hat{j}$

এখানে, $D^2 = (3-t)^2 + (2t-2)^2 = 5t^2 - 14t + 13$

ন্যূনতম দূরত্বের জন্য, $\frac{d(D^2)}{dt} = 10t - 14 = 0 \Rightarrow t = 1.4$

$D^2 = 5(1.4)^2 - 14(1.4) + 13 = 3.2$

সুতরাং, $D_{min} = \sqrt{3.2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

১২. গ. $x + y - z = 1$

ব্যাখ্যা: সমতলের অভিলম্ব ভেক্টর, $\vec{n} = (\hat{i} - \hat{j}) \times (\hat{j} + \hat{k}) = -\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

সমীকরণ, $-1(x - 1) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$\Rightarrow -x - y + z + 1 = 0$

সুতরাং, $x + y - z = 1$

১৩. ঘ. $x + y + z = 2$

ব্যাখ্যা: ধরি বিন্দুগুলো A, B, C

এখানে, $\overrightarrow{AB} = \hat{i} - \hat{j}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \hat{i} - \hat{k}$

অভিলম্ব ভেক্টর, $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

সমীকরণ, $1(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

সুতরাং, $x + y + z = 2$

১৪. খ. $\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

ব্যাখ্যা: ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য a ধরি

Body diagonal, $\vec{d}_1 = a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}$ এবং Face diagonal, $\vec{d}_2 = a\hat{i} + a\hat{j}$

এখানে, $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 2a^2$, $|\vec{d}_1| = \sqrt{3}a$, $|\vec{d}_2| = \sqrt{2}a$

সুতরাং, $\cos\theta = \frac{2a^2}{\sqrt{3}a \times \sqrt{2}a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

১৫. খ. $\hat{i} - 2\hat{j}$

ব্যাখ্যা: ধরি, $\vec{B} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

এখানে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 2x - y = 4$

এবং, $\vec{A} \times \vec{B} = -z\hat{i} - 2z\hat{j} + (x + 2y)\hat{k} = -3\hat{k}$

সহগ সমীকৃত করে, $z = 0$ এবং $x + 2y = -3$

দুটি সমীকরণ সমাধান করে, $x = 1, y = -2$

সুতরাং, $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j}$

১৬. খ. $\pm\frac{4\hat{j}+3\hat{k}}{5}$

ব্যাখ্যা: yz-সমতলে ভেক্টরটি $\vec{v} = y\hat{j} + z\hat{k}$ আকারের ধরি

প্রদত্ত ভেক্টরের সাথে লম্ব হওয়ায়, $-3y + 4z = 0 \Rightarrow \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

সুতরাং ভেক্টরটি $4\hat{j} + 3\hat{k}$ এর সমান্তরাল, এর একক ভেক্টর $\pm\frac{4\hat{j}+3\hat{k}}{5}$

১৭. ক. $\frac{7}{6}$

ব্যাখ্যা: দ্বিতীয় সমীকরণকে 2 দিয়ে ভাগ করে, $x - 2y + 2z = 7.5$

দূরত্ব, $d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|7.5-4|}{\sqrt{1+4+4}}$

সুতরাং, $d = \frac{3.5}{3} = \frac{7}{6}$ একক

১৮. ক. $\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$

ব্যাখ্যা: ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছাতে লব্ধি বেগ স্রোতের সাথে লম্ব বরাবর হতে হয়

$u + v\cos\theta = 0$

$\Rightarrow 6 + 10\cos\theta = 0$

সুতরাং, $\cos\theta = -\frac{3}{5} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$

১৯. গ. 1

ব্যাখ্যা: এখানে, $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 1 + 1 + 2\cos\theta = 3 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$

এখন, $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = 1 + 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

সুতরাং, $|\vec{u} - \vec{v}| = 1$

২০. গ. $\vec{0}$

ব্যাখ্যা: ভেক্টর ত্রিপল গুণনের সূত্র, $\vec{X} \times (\vec{Y} \times \vec{Z}) = (\vec{X} \cdot \vec{Z})\vec{Y} - (\vec{X} \cdot \vec{Y})\vec{Z}$

এই সূত্র প্রয়োগ করে প্রতিটি পদ বিস্তার করলে সবগুলো পদ পরস্পর বাতিল হয়ে যায়

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালার মান $\vec{0}$

২১. গ. 0

ব্যাখ্যা: লক্ষ করি, $(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{0}$

যেহেতু তিনটি ভেক্টরের যোগফল শূন্য, তাই তারা সমতলীয় (Coplanar)

এবং সমতলীয় ভেক্টরের স্কেলার ত্রিপল গুণফল (Box Product) সর্বদা শূন্য হয়

সুতরাং, প্রদত্ত রাশির মান 0

২২. ক. $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

ব্যাখ্যা: $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = 4|\vec{A} - \vec{B}|^2$

$\Rightarrow 2A^2(1 + \cos\theta) = 4 \times 2A^2(1 - \cos\theta)$

$\Rightarrow 1 + \cos\theta = 4 - 4\cos\theta$

সুতরাং, $\cos\theta = \frac{3}{5}$

২৩. গ. 180°

ব্যাখ্যা: বেগ, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -6\sin(2t)\hat{i} + 6\cos(2t)\hat{j}$

ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -12\cos(2t)\hat{i} - 12\sin(2t)\hat{j} = -4\vec{r}$

যেহেতু $\vec{a}$ এবং $\vec{r}$ বিপরীতমুখী

সুতরাং, তাদের মধ্যবর্তী কোণ 180°

২৪. গ. $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

ব্যাখ্যা: $|\vec{a} \times \vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = 45°$

এখন, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 1 + 1 + 2\cos 45° = 2 + \sqrt{2}$

সুতরাং, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

২৫. খ. $8\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: $\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i}(2-(-6)) - \hat{j}(1-9) + \hat{k}(-2-6) = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$

ক্ষেত্রফল $= |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{8^2 + 8^2 + (-8)^2} = \sqrt{3 \times 64}$

সুতরাং, ক্ষেত্রফল $= 8\sqrt{3}$ বর্গএকক

২৬. ঘ. 0

ব্যাখ্যা: $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$

$= 1 + 1 + 1 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 3 - 3$

সুতরাং, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0$

২৭. ক. 17010

ব্যাখ্যা: সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{10}{r}(3x^3)^{10-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = \binom{10}{r}3^{10-r}(-1)^r x^{30-5r}$

x বর্জিত পদের জন্য, $30 - 5r = 0 \Rightarrow r = 6$

সুতরাং, পদের মান $= \binom{10}{6}3^4(-1)^6 = 210 \times 81 = 17010$

২৮. ক. 924

ব্যাখ্যা: সূচক $n = 12$ জোড় হওয়ায় মধ্যপদ একটি, $\left(\frac{12}{2} + 1\right) = 7$তম পদ

$T_7 = \binom{12}{6}x^6\left(-\frac{1}{x}\right)^6 = \binom{12}{6} \times 1$

সুতরাং, $T_7 = 924$

২৯. ক. 672

ব্যাখ্যা: সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{9}{r}2^{9-r}(-x)^r$

x^6 এর জন্য $r = 6$ বসিয়ে

সহগ $= \binom{9}{6}2^3(-1)^6 = 84 \times 8$

সুতরাং, সহগ $= 672$

৩০. গ. 0

ব্যাখ্যা: সহগগুলোর সমষ্টি নির্ণয়ের জন্য প্রতিটি চলকের মান 1 বসাতে হয়

$x = y = z = 1$ বসিয়ে, $(2(1) - 3(1) + 1)^8 = (2 - 3 + 1)^8$

সুতরাং, সমষ্টি $= 0^8 = 0$

৩১. গ. 8

ব্যাখ্যা: এখানে, $\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20 \times \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow \frac{4n(2n-1)(n-1)}{6} = 10n(n-1)$

উভয়পক্ষ থেকে $n(n-1)$ বাদ দিয়ে $(n > 1)$,

$\frac{2(2n-1)}{3} = 10$

$\Rightarrow 2n - 1 = 15$

সুতরাং, $n = 8$

৩২. গ. 56

ব্যাখ্যা: চলকের সংখ্যা $k = 4$ এবং ঘাত $n = 5$

পদের সংখ্যা $= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{3}$

সুতরাং, পদের সংখ্যা $= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

৩৩. ক. 240

ব্যাখ্যা: $(1-(-2x))^{-3}$ আকারে লিখে, $(1-y)^{-n}$ এর সাধারণ পদে সহগ $\binom{n+r-1}{r}$

এখানে সহগ $= \binom{3+4-1}{4}(-2)^4 = \binom{6}{4} \times 16$

সুতরাং, সহগ $= 15 \times 16 = 240$

৩৪. ঘ. খ ও গ উভয়ই

ব্যাখ্যা: $n = 19$ (বিজোড়) হওয়ায় মধ্যপদ দুটি, $\frac{n+1}{2} = 10$তম এবং $\frac{n+3}{2} = 11$তম পদ

এদের সহগ যথাক্রমে $\binom{19}{9}$ এবং $\binom{19}{10}$

যেহেতু $\binom{19}{9} = \binom{19}{10}$

সুতরাং, উভয়ই বৃহত্তম সহগ

৩৫. খ. 2

ব্যাখ্যা: $T_3 = \binom{8}{2}x^6y^2 = 28x^6y^2$ এবং $T_4 = \binom{8}{3}x^5y^3 = 56x^5y^3$

শর্তমতে, $28x^6y^2 = 56x^5y^3$

সুতরাং, $\frac{x}{y} = 2$

৩৬. খ. 6

ব্যাখ্যা: 4র্থ পদ, $T_4 = \binom{n}{3}x^3$

শর্তমতে, $\binom{n}{3} = 20 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 120$

যেহেতু, $6 \times 5 \times 4 = 120$

সুতরাং, $n = 6$

৩৭. গ. 3

ব্যাখ্যা: x^3 এর সহগ $= \binom{7}{3}3^4k^3$ এবং x^4 এর সহগ $= \binom{7}{4}3^3k^4$

যেহেতু $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$, তাই $3^4k^3 = 3^3k^4$

$\Rightarrow 3k^3 = k^4 \Rightarrow k = 0$ অথবা $k = 3$

সুতরাং, $k = 3$

৩৮. খ. $3n\,4^{n-1}$

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$

উভয়পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে x দ্বারা গুণ করলে, $nx(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}x^r$

এখানে $x = 3$ বসিয়ে, $n(3)(1+3)^{n-1}$

সুতরাং, সমষ্টি $= 3n\,4^{n-1}$

৩৯. খ. $n + 1$

ব্যাখ্যা: $(1-x)^{-m}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $\binom{m+n-1}{n}$

এখানে $m = 2$, তাই সহগ $= \binom{n+1}{n}$

সুতরাং, সহগ $= n + 1$

৪০. ক. $|x| < \frac{4}{5}$

ব্যাখ্যা: $(4-5x)^{-\frac{1}{2}} = 4^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{5x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$
অভিসারী হওয়ার শর্ত, $\left|\frac{5x}{4}\right| < 1$
সুতরাং, $|x| < \frac{4}{5}$

৪১. খ. 210

ব্যাখ্যা: সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{10}{r} x^{\frac{10-r}{3}-\frac{r}{2}}$
x বর্জিত পদের জন্য, $\frac{10-r}{3} - \frac{r}{2} = 0 \Rightarrow 20 - 5r = 0 \Rightarrow r = 4$
পদের মান $= \binom{10}{4} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}$
সুতরাং, পদের মান = 210

৪২. খ. 4

ব্যাখ্যা: $(1-x^2)^4 = 1 - 4x^2 + 6x^4 - 4x^6 + x^8$
গুণফল $(1 - 4x^2 + 6x^4 - \cdots)(1-x)$ থেকে x^3 পদটি পাওয়া যায় শুধু $-4x^2$ এবং $-x$ এর গুণফল থেকে
$(-4x^2) \times (-x) = 4x^3$
সুতরাং, সহগ = 4

৪৩. খ. 2048

ব্যাখ্যা: দ্বিপদী বিস্তৃতিতে জোড় বা বিজোড় ঘাতের সহগগুলোর সমষ্টি 2^{n-1} হয়
এখানে n = 12
সুতরাং, সমষ্টি $= 2^{11} = 2048$

৪৪. ক. $-20412\,\frac{x^2}{y^5}$

ব্যাখ্যা: মোট পদসংখ্যা = 7 + 1 = 8টি
শেষ দিক হতে ৩য় পদ = প্রথম দিক হতে (8 − 3 + 1) = 6তম পদ
$T_6 = T_{5+1} = \binom{7}{5}(2x)^2\left(-\frac{3}{y}\right)^5 = 21 \times 4x^2 \times \left(-\frac{243}{y^5}\right)$
সুতরাং, $T_6 = -20412\,\frac{x^2}{y^5}$

৪৫. গ. 6

ব্যাখ্যা: $T_2 = nax = -12x \Rightarrow na = -12$
$T_3 = \binom{n}{2}a^2x^2 = 60x^2 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}a^2 = 60$
$na = -12$ থেকে $a = -\frac{12}{n}$ বসিয়ে, $\frac{144(n-1)}{n} = 120$
$\Rightarrow 144n - 144 = 120n \Rightarrow 24n = 144$
সুতরাং, n = 6

৪৬. গ. 6

ব্যাখ্যা: সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{20}{r}3^{\frac{20-r}{2}}5^{\frac{r}{4}}$
মূলদ হওয়ার জন্য r কে 4 এর গুণিতক এবং (20 − r) কে 2 এর গুণিতক হতে হবে
$r \in \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$
সুতরাং, মূলদ পদের সংখ্যা 6টি

৪৭. ক. $\binom{2n}{n}$

ব্যাখ্যা: $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n$
এবং $(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + \cdots + C_n$
উভয় সমীকরণ গুণ করলে x^n এর সহগ হয় $C_0^2 + C_1^2 + \cdots + C_n^2$
আবার $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ $\binom{2n}{n}$
সুতরাং, $C_0^2 + C_1^2 + \cdots + C_n^2 = \binom{2n}{n}$

৪৮. গ. 16

ব্যাখ্যা: $(1+x)(1-x)^{-3} = (1+x)(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots)$
গুণফল থেকে x^3 এর সহগ, $1 \times 10 + 1 \times 6$
সুতরাং, সহগ = 16

৪৯. খ. −2

ব্যাখ্যা: সাধারণ বিস্তৃতি, $(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!}y^2 + \cdots$
এখানে $n = \frac{1}{2}, y = 4x$
x^2 এর পদ $= \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(4x)^2 = -\frac{1}{8} \times 16x^2$
সুতরাং, সহগ = −2

৫০. ক. 7, 14

ব্যাখ্যা: সহগগুলো যথাক্রমে $\binom{n}{4}, \binom{n}{5}, \binom{n}{6}$
শর্তমতে, $2\binom{n}{5} = \binom{n}{4} + \binom{n}{6}$
এই সমীকরণ সরল করে পাওয়া যায়, $n^2 - 21n + 98 = 0$
$\Rightarrow (n-7)(n-14) = 0$
সুতরাং, n = 7 অথবা n = 14