MCQ ৫০ নম্বর

১. খ. 7

ব্যাখ্যা: $|3\vec{a}-2\vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 - 12\,\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2$
এখানে, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$
এবং, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\times 1\times\cos 60° = \frac{1}{2}$
সুতরাং, $|3\vec{a}-2\vec{b}|^2 = 9 - 12\times\frac{1}{2} + 4$
অতএব, মান = 7

২. ক. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ব্যাখ্যা: ছেদরেখা উভয় সমতলের অভিলম্বের উপর লম্ব, তাই দিক ভেক্টর $\vec{v} = \vec{n}_1\times\vec{n}_2$
এখানে, $\vec{v} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\times(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = \hat{i}(1+1) - \hat{j}(1-1) + \hat{k}(-1-1) = 2\hat{i} - 2\hat{k}$
একক ভেক্টর, $\hat{u} = \frac{2\hat{i}-2\hat{k}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}-\hat{k})$
লম্ব অভিক্ষেপ = $\vec{a}\cdot\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2-1)$
অতএব, লম্ব অভিক্ষেপ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

৩. খ. $-11\hat{i}+13\hat{j}-10\hat{k}$

ব্যাখ্যা: সূত্র: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$
এখানে, $\vec{a}\cdot\vec{c} = 6-1-2 = 3$
এবং, $\vec{b}\cdot\vec{c} = 3+2+2 = 7$
সুতরাং, রাশি = $3(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}) - 7(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$
$= (3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}) - (14\hat{i}-7\hat{j}+7\hat{k})$
অতএব, রাশি = $-11\hat{i}+13\hat{j}-10\hat{k}$

৪. খ. $6\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: সূত্র: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$
এখানে, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + 6^2 = 3^2\times 4^2$
বা, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = 144 - 36 = 108$
অতএব, $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

৫. ক. $8\hat{i}+5\hat{j}-8\hat{k}$

ব্যাখ্যা: ধরি, পরিকেন্দ্র $\vec{p}$, ভরকেন্দ্র $\vec{g}$ এবং লম্বকেন্দ্র $\vec{h}$
অয়লার রেখার সূত্রমতে, ভরকেন্দ্র লম্বকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্রের সংযোগ রেখাংশকে (লম্বকেন্দ্র থেকে) 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে
সুতরাং, $\vec{g} = \frac{\vec{h}+2\vec{p}}{3}$
বা, $\vec{h} = 3\vec{g} - 2\vec{p}$
এখানে, $\vec{h} = 3(4\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}) - 2(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$
অতএব, $\vec{h} = 8\hat{i}+5\hat{j}-8\hat{k}$

৬. খ. $\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: y-অক্ষের দিক ভেক্টর $\vec{b}_1 = \hat{j}$ এবং মূলবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}_1 = \vec{0}$
রেখাটির দিক ভেক্টর $\vec{b}_2 = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}_2 = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$
এখানে, $\vec{b}_1\times\vec{b}_2 = \hat{i}(1-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(0-1) = \hat{i}-\hat{k}$
এবং, $|\vec{b}_1\times\vec{b}_2| = \sqrt{2}$
ন্যূনতম দূরত্ব = $\frac{|(\vec{a}_2-\vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)|}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|} = \frac{|1-3|}{\sqrt{2}}$
অতএব, দূরত্ব = $\sqrt{2}$

৭. খ. $\sqrt{21}$

ব্যাখ্যা: রেখার উপর যেকোনো বিন্দু (2t + 1, 3t + 2, 4t − 1)
এটি সমতলে অবস্থিত হলে, (2t + 1) + (3t + 2) + (4t − 1) = 11
বা, 9t + 2 = 11
বা, t = 1
সুতরাং, ছেদবিন্দু P (3, 5, 3)
দূরত্ব = $\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{4+16+1}$
অতএব, দূরত্ব = $\sqrt{21}$

৮. খ. $-\frac{1}{9}$

ব্যাখ্যা: সমতলীয় হওয়ার শর্ত, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$
সারণিক বিস্তার করে, $1(8-1) - \lambda(8+1) + 2(-2-2) = 0$
বা, $7 - 9\lambda - 8 = 0$
বা, $9\lambda = -1$
অতএব, $\lambda = -\frac{1}{9}$

৯. ক. $\pm\frac{13\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}}{\sqrt{210}}$

ব্যাখ্যা: ভেক্টরটি $\vec{a}, \vec{b}$ এর সমতলে এবং $\vec{c}$ এর লম্ব, তাই এটি $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ এর সমান্তরাল
এখানে, $\vec{a}\times\vec{b} = \hat{i}(8-9) - \hat{j}(-4+6) + \hat{k}(3-4) = -\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$
আবার, $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \hat{i}(3+10) - \hat{j}(-1+5) + \hat{k}(-2-3) = 13\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}$
এবং, $|13\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}| = \sqrt{169+16+25} = \sqrt{210}$
অতএব, একক ভেক্টর = $\pm\frac{13\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}}{\sqrt{210}}$

১০. গ. 8

ব্যাখ্যা: ধরি, $\vec{v} = \lambda\{\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})\} = \lambda\{(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b}\}$ (কারণ $\vec{v}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর সমতলে এবং $\vec{a}$ এর লম্ব)

এখানে, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ এবং $|\vec{a}|^2 = 6$

সুতরাং, $\vec{v} = \lambda\{3(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) - 6(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})\} = -9\lambda(\hat{j} + \hat{k})$

ধরি, $\vec{v} = k(\hat{j} + \hat{k})$

প্রশ্নমতে, $\frac{\vec{v} \cdot \vec{c}}{|c|} = \frac{k(-1+2)}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

বা, $k = 2$

সুতরাং, $\vec{v} = 2\hat{j} + 2\hat{k}$

অতএব, $|\vec{v}|^2 = 4 + 4 = 8$

১১. গ. 27

ব্যাখ্যা: এখানে, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ হওয়ায় $\vec{c} \perp \vec{a}$

সুতরাং, $|\vec{a} \times \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{c}|^2$

আবার, $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta = 2\sqrt{3}\sin\theta$

সুতরাং, $|\vec{a} \times \vec{c}|^2 = 3 \times 12\sin^2\theta = 36\sin^2\theta$

এই ব্যবধিতে $\sin\theta$ সর্বোচ্চ হয় $\theta = \frac{\pi}{3}$ এ

অতএব, সর্বোচ্চ মান $= 36 \times \frac{3}{4} = 27$

১২. ক. $\frac{9}{2}$

ব্যাখ্যা: রেখাদ্বয় ছেদ করলে এরা সমতলীয় হবে

এখানে, $\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = (2, k+1, -1)$, $\vec{b}_1 = (2, 3, 4)$

এবং $\vec{b}_2 = (1, 2, 1)$

শর্ত, $(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$

বা, $2(3-8) - (k+1)(2-4) - 1(4-3) = 0$

বা, $-10 + 2(k+1) - 1 = 0$

বা, $2k = 9$

অতএব, $k = \frac{9}{2}$

১৩. খ. $\frac{22}{3}$

ব্যাখ্যা: প্রশ্নমতে, $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$

বা, $(\vec{r} - \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{0}$

সুতরাং, $\vec{r} = \vec{b} + \lambda\vec{a} = (1 + 2\lambda)\hat{i} + (\lambda - 1)\hat{j} + (2 - \lambda)\hat{k}$

আবার, $\vec{r} \cdot \vec{c} = 0$ থেকে, $(1 + 2\lambda) + 2(\lambda - 1) + (2 - \lambda) = 0$

বা, $3\lambda + 1 = 0$

বা, $\lambda = -\frac{1}{3}$

সুতরাং, $\vec{r} = \frac{1}{3}\hat{i} - \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{7}{3}\hat{k}$

অতএব, $|\vec{r}|^2 = \frac{1+16+49}{9} = \frac{22}{3}$

১৪. খ. $(0, -1, -3)$

ব্যাখ্যা: প্রতিবিম্বের সূত্র, $\frac{x'-x_1}{a} = \frac{y'-y_1}{b} = \frac{z'-z_1}{c} = -\frac{2(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$

এখানে, সমতল $3x - y + 4z - 2 = 0$ এবং $(x_1, y_1, z_1) = (3, -2, 1)$

ডানপক্ষ $= -\frac{2(9+2+4-2)}{9+1+16} = -\frac{26}{26} = -1$

সুতরাং, $\frac{x'-3}{3} = -1$ বা $x' = 0$

এবং, $\frac{y'+2}{-1} = -1$ বা $y' = -1$

এবং, $\frac{z'-1}{4} = -1$ বা $z' = -3$

অতএব, প্রতিবিম্ব $(0, -1, -3)$

১৫. গ. $9\{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $(\vec{b} + 2\vec{c}) \times (\vec{c} + 2\vec{a}) = \vec{b} \times \vec{c} + 2(\vec{b} \times \vec{a}) + 4(\vec{c} \times \vec{a})$ [কারণ $\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$]

$(\vec{a} + 2\vec{b})$ এর সাথে ডট গুণ করলে, যে পদে কোনো ভেক্টর পুনরাবৃত্ত হয় স্কেলার ত্রিগুণনে তার মান শূন্য হয়

সুতরাং, রাশি $= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + 8\{\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})\}$

আবার, চক্রাকার নিয়মে $\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

অতএব, রাশি $= 9\{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\}$

১৬. খ. 7

ব্যাখ্যা: রেখার উপর যেকোনো বিন্দু $Q(2t + 1, 4t + 3, 3t + 2)$

এখানে, $\overrightarrow{PQ} = (2t - 2)\hat{i} + (4t - 5)\hat{j} + 3t\hat{k}$

$\overrightarrow{PQ}$ সমতলের সমান্তরাল হলে সমতলের অভিলম্ব $\vec{n} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এর উপর লম্ব হবে

সুতরাং, $3(2t - 2) + 2(4t - 5) - 2(3t) = 0$

বা, $8t - 16 = 0$

বা, $t = 2$

সুতরাং, $\overrightarrow{PQ} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$

অতএব, দূরত্ব $= \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

[সংশোধন: প্রদত্ত সমাধানে রেখার বিন্দু $(2t + 1, 4t + 3, 3t + 2)$ ধরা হয়েছে, যা $\frac{x-1}{2}$ এর সাথে মেলে; প্রশ্নে ছাপা $\frac{x-2}{1}$ ছিল ছাপার ত্রুটি, তাই রেখাটি $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ ধরা হয়েছে।]

১৭. গ. $\frac{\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: দিক-কোসাইনের সূত্র, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

এখানে, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ এবং $\gamma = \theta$

সুতরাং, $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2\theta = 1$

বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$

θ সূক্ষ্মকোণ হওয়ায়, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

অতএব, $\theta = \frac{\pi}{3}$

১৮. গ. 8

ব্যাখ্যা: আয়তন, $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$
সারণিক বিস্তার করে, $1(12 + n^2) - 1(6 + n) + n(2n - 4) = 3n^2 - 5n + 6$
প্রশ্নমতে, $3n^2 - 5n + 6 = 158$
বা, $3n^2 - 5n - 152 = 0$
বা, $n = \frac{5 \pm 43}{6}$
n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হওয়ায়, $n = 8$

১৯. খ. $-\frac{29}{2}$

ব্যাখ্যা: ধরি, $S = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$
এখানে, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$
বা, $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2S = 0$
বা, $4 + 9 + 16 + 2S = 0$
বা, $2S = -29$
অতএব, $S = -\frac{29}{2}$

২০. ক. $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right)$

ব্যাখ্যা: BC রেখার সমীকরণ, $\frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-1}{-2} = t$
ধরি, লম্বের পাদবিন্দু $F(t + 4, 2t + 7, -2t + 1)$
এখানে, $\overrightarrow{AF} = (t + 3)\hat{i} + (2t + 7)\hat{j} + (-2t - 2)\hat{k}$
এবং BC এর দিক ভেক্টর $\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$
$\overrightarrow{AF} \perp$ BC হওয়ায়, $(t + 3) + 2(2t + 7) - 2(-2t - 2) = 0$
বা, $9t + 21 = 0$
বা, $t = -\frac{7}{3}$
অতএব, $F = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right)$

২১. ক. -10 J

ব্যাখ্যা: সরণ, $\vec{s} = (3 - 1)\hat{i} + (1 + 2)\hat{j} + (-1 - 3)\hat{k} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$
কৃত কাজ, $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$
এখানে, $W = (4)(2) + (-2)(3) + (3)(-4) = 8 - 6 - 12$
অতএব, $W = -10$ J

২২. গ. 135°

ব্যাখ্যা: সূত্র, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$
প্রশ্নমতে, $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{a}||\vec{b}|\vec{c}$
$\vec{b}$ ও $\vec{c}$ সমান্তরাল নয়, তাই $\vec{c}$ এর সহগ সমীকৃত করে,
$-\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\vec{a}||\vec{b}|$
বা, $-\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
সুতরাং, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
অতএব, $\theta = 135°$

২৩. গ. 560

ব্যাখ্যা: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$
এখানে, $\vec{u} \times \vec{v} = (3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = -6(\vec{a} \times \vec{b}) + 2(\vec{b} \times \vec{a}) = -8(\vec{a} \times \vec{b})$
সুতরাং, $\Delta = 4|\vec{a} \times \vec{b}|$
আবার, $\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i}(2 - 1) - \hat{j}(-1 - 2) + \hat{k}(1 + 4) = \hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$
এবং, $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{35}$
সুতরাং, $\Delta = 4\sqrt{35}$
অতএব, $\Delta^2 = 16 \times 35 = 560$

২৪. গ. 60°

ব্যাখ্যা: অভিলম্ব ভেক্টর, $\vec{n}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{n}_2 = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$
সূত্র, $\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$
এখানে, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 - 1 + 2 = 3$ এবং $|\vec{n}_1||\vec{n}_2| = \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$
সুতরাং, $\cos\theta = \frac{1}{2}$
অতএব, $\theta = 60°$

২৫. গ. 9

ব্যাখ্যা: ৪র্থ পদের সহগ $= \binom{n}{3}$ এবং ৫ম পদের সহগ $= \binom{n}{4}$
প্রশ্নমতে, $\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}} = \frac{2}{3}$
বা, $\frac{4!\,(n-4)!}{3!\,(n-3)!} = \frac{2}{3}$
বা, $\frac{4}{n-3} = \frac{2}{3}$
বা, $2n - 6 = 12$
অতএব, $n = 9$

২৬. ক. 5376

ব্যাখ্যা: সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{9}{r}(x^2)^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r = \binom{9}{r}(-2)^r x^{18-3r}$
x বর্জিত পদের জন্য, $18 - 3r = 0$
বা, $r = 6$
সুতরাং, পদটি $= \binom{9}{6}(-2)^6 = 84 \times 64$
অতএব, মান = 5376

২৭. খ. 672

ব্যাখ্যা: $(1 - y)^{-n}$ এর বিস্তৃতিতে y^r এর সহগ $= \binom{n+r-1}{r}$
এখানে, $n = 3$, $y = 2x$ এবং $r = 5$
সুতরাং, x^5 এর সহগ $= \binom{7}{5} \times 2^5$
$= 21 \times 32$
অতএব, সহগ = 672

২৮. খ. $5x + 4y - z = 8$

ব্যাখ্যা: নির্ণেয় সমতলের সমীকরণ, $(2x + y - z - 3) + \lambda(x + 2y + z - 2) = 0$

এটি $(1, 1, 1)$ বিন্দুগামী, তাই $(2 + 1 - 1 - 3) + \lambda(1 + 2 + 1 - 2) = 0$

বা, $-1 + 2\lambda = 0$

বা, $\lambda = \frac{1}{2}$

সুতরাং, $2(2x + y - z - 3) + (x + 2y + z - 2) = 0$

বা, $4x + 2y - 2z - 6 + x + 2y + z - 2 = 0$

অতএব, $5x + 4y - z = 8$

২৯. ক. 512

ব্যাখ্যা: ধরি, $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^5 = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$

$x = 1$ বসিয়ে, $f(1) = 4^5 = 1024$

$x = -1$ বসিয়ে, $f(-1) = (1 - 1 + 1 - 1)^5 = 0$

যোগ করে, $f(1) + f(-1) = 2(c_0 + c_2 + c_4 + \dots)$

বা, $1024 = 2(c_0 + c_2 + c_4 + \dots)$

অতএব, জোড় ঘাতের সহগের সমষ্টি = 512

৩০. খ. 97

ব্যাখ্যা: সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{100}{r} 5^{\frac{100-r}{8}} 2^{\frac{r}{6}}$

মূলদ পদের জন্য r কে 6 এর গুণিতক এবং $(100 - r)$ কে 8 এর গুণিতক হতে হবে

অর্থাৎ, $r = 6k$ এবং $r \equiv 4 \pmod 8$

$0 \le r \le 100$ এ শর্ত পূরণকারী r = 12, 36, 60, 84, অর্থাৎ মূলদ পদ 4 টি

মোট পদসংখ্যা = 101

অতএব, অমূলদ পদের সংখ্যা = $101 - 4 = 97$

৩১. ঘ. খ ও গ উভয়ই

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত রাশি = $(1 + x)^n \cdot \frac{(x+1)^n}{x^n} = \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$

$\frac{1}{x}$ এর সহগ পেতে $(1 + x)^{2n}$ থেকে x^{n-1} এর সহগ নিতে হবে

সুতরাং, সহগ = $\binom{2n}{n-1}$

আবার, $\binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{2n-(n-1)} = \binom{2n}{n+1}$

অতএব, খ ও গ উভয়ই সঠিক

৩২. খ. 105

ব্যাখ্যা: $(1 + x)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^4, x^3, x^2 এর সহগ যথাক্রমে $\binom{10}{4}$, $\binom{10}{3}$, $\binom{10}{2}$

সুতরাং, গুণফলে x^4 এর সহগ = $1 \cdot \binom{10}{4} - 2\binom{10}{3} + 3\binom{10}{2}$

এখানে, $= 210 - 2(120) + 3(45)$

$= 210 - 240 + 135$

অতএব, সহগ = 105

৩৩. খ. $\binom{18}{8}$

ব্যাখ্যা: প্যাসকেলের সূত্র, $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

এখানে, $\binom{15}{5} + \binom{15}{6} = \binom{16}{6}$

আবার, $\binom{16}{6} + \binom{16}{7} = \binom{17}{7}$

আবার, $\binom{17}{7} + \binom{17}{8} = \binom{18}{8}$

অতএব, মান = $\binom{18}{8}$

৩৪. গ. 30

ব্যাখ্যা: এখানে, $(1 + x + x^2)^5 = \{1 + x(1 + x)\}^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k(1 + x)^k$

x^3 পাওয়া যায় $k = 2$ ও $k = 3$ থেকে (কারণ $k \le 1$ হলে সর্বোচ্চ ঘাত 2)

$k = 2$ এ, $10x^2(1 + x)^2$ থেকে x^3 এর পদ = $10 \times 2 = 20$

$k = 3$ এ, $10x^3(1 + x)^3$ থেকে x^3 এর পদ = $10 \times 1 = 10$

অতএব, সহগ = $20 + 10 = 30$

৩৫. খ. 10

ব্যাখ্যা: প্রথম দিক থেকে ৫ম পদ, $T_5 = \binom{n}{4} \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{n-4} \left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^4$

শেষ দিক থেকে ৫ম পদ, $T_5' = \binom{n}{4} \left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^{n-4} \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4$

সুতরাং, $\frac{T_5}{T_5'} = 2^{\frac{n-4}{4}-1} \cdot 3^{\frac{n-4}{4}-1} = 6^{\frac{n-8}{4}}$

প্রশ্নমতে, $6^{\frac{n-8}{4}} = 6^{\frac{1}{2}}$

বা, $\frac{n-8}{4} = \frac{1}{2}$

অতএব, $n = 10$

৩৬. খ. $\frac{3^{10}-1}{2}$

ব্যাখ্যা: ধরি, $f(x) = (1 + 2x)^{10} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$

$x = 1$ বসিয়ে, $f(1) = 3^{10}$

$x = -1$ বসিয়ে, $f(-1) = (-1)^{10} = 1$

বিয়োগ করে, $f(1) - f(-1) = 2(c_1 + c_3 + c_5 + \dots)$

বা, $3^{10} - 1 = 2(c_1 + c_3 + c_5 + \dots)$

অতএব, বিজোড় ঘাতের সহগের সমষ্টি = $\frac{3^{10}-1}{2}$

৩৭. খ. 18

ব্যাখ্যা: $(1 + x^2)^4 = 1 + 4x^2 + 6x^4 + 4x^6 + x^8$

এবং, $(1 + x^3)^3 = 1 + 3x^3 + 3x^6 + x^9$

x^{10} পেতে প্রথম রাশির x^a ও দ্বিতীয় রাশির x^b এমন হতে হবে যেন $a + b = 10$

এখানে $a \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ এবং $b \in \{0, 3, 6, 9\}$

একমাত্র সম্ভব জোড়া $a = 4$, $b = 6$

সুতরাং, সহগ = 6×3

অতএব, সহগ = 18

৩৮. গ. 9

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $3^3 = 27 = 2 \times 13 + 1$
এখানে, $3^{2024} = 3^2 \cdot (3^3)^{674} = 9(26+1)^{674}$
দ্বিপদী বিস্তৃতি থেকে, $(26+1)^{674} = 13k + 1$ (k পূর্ণসংখ্যা)
সুতরাং, $3^{2024} = 9(13k+1) = 13(9k) + 9$
অতএব, ভাগশেষ = 9

৩৯. ঘ. $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $\frac{1}{r+1}\binom{n}{r} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{r+1}$
সুতরাং, $\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r+1}\binom{n}{r} = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n+1}{r+1}$
এখানে, $\sum_{r=0}^{n}\binom{n+1}{r+1} = 2^{n+1} - \binom{n+1}{0} = 2^{n+1} - 1$
অতএব, মান = $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

৪০. খ. 5

ব্যাখ্যা: x^r এর সহগ = $\binom{14}{r}3^{14-r}2^r$ এবং x^{r+1} এর সহগ = $\binom{14}{r+1}3^{13-r}2^{r+1}$
প্রশ্নমতে, $\binom{14}{r}3^{14-r}2^r = \binom{14}{r+1}3^{13-r}2^{r+1}$
বা, $\frac{3}{14-r} = \frac{2}{r+1}$
বা, $3r + 3 = 28 - 2r$
বা, $5r = 25$
অতএব, $r = 5$

৪১. খ. 11

ব্যাখ্যা: সাধারণ পদ, $T_{r+1} = \binom{120}{r}5^{\frac{120-r}{3}}3^{\frac{r}{4}}$
পূর্ণসংখ্যা হতে হলে $\frac{120-r}{3}$ ও $\frac{r}{4}$ উভয়ই পূর্ণসংখ্যা হতে হবে
অর্থাৎ, r কে 3 ও 4 উভয়ের গুণিতক, তাই 12 এর গুণিতক হতে হবে
$0 \le r \le 120$ এ $r = 0, 12, 24, \ldots, 120$
অতএব, পদসংখ্যা = $\frac{120}{12} + 1 = 11$

৪২. খ. $-\frac{1920}{x}$

ব্যাখ্যা: মোট পদসংখ্যা = 10 + 1 = 11
শেষ দিক থেকে ৪র্থ পদ = শুরু থেকে (11 − 4 + 1) = 8 তম পদ
সুতরাং, $T_8 = \binom{10}{7}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3\left(-\frac{2}{x}\right)^7$
$= 120 \times \frac{x^6}{8} \times \left(-\frac{128}{x^7}\right)$
অতএব, $T_8 = -\frac{1920}{x}$

৪৩. গ. $(n+1)2^n$

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত ধারা = $\sum_{r=0}^{n}(2r+1)C_r = 2\sum_{r=0}^{n} rC_r + \sum_{r=0}^{n} C_r$
আমরা জানি, $\sum rC_r = n2^{n-1}$ এবং $\sum C_r = 2^n$
সুতরাং, ধারা = $2 \cdot n2^{n-1} + 2^n = n2^n + 2^n$
অতএব, ধারা = $(n+1)2^n$

৪৪. গ. $2^{19} + \frac{1}{2}\binom{20}{10}$

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, $\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k} = 2^{20}$
প্রতিসমতার কারণে, $\sum_{k=0}^{9}\binom{20}{k} = \sum_{k=11}^{20}\binom{20}{k} = S$ (ধরি)
সুতরাং, $2S + \binom{20}{10} = 2^{20}$
বা, $S = 2^{19} - \frac{1}{2}\binom{20}{10}$
এখানে, $\sum_{k=0}^{10}\binom{20}{k} = S + \binom{20}{10}$
অতএব, মান = $2^{19} + \frac{1}{2}\binom{20}{10}$

৪৫. ক. −144

ব্যাখ্যা: এখানে, $1 - x - x^2 + x^3 = (1-x) - x^2(1-x) = (1-x)(1-x^2)$
সুতরাং, রাশি = $(1-x)^6(1-x^2)^6$
আবার, $(1-x)^6 = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$
এবং, $(1-x^2)^6 = 1 - 6x^2 + 15x^4 - 20x^6 + \ldots$
x^7 পাওয়া যায়, $(-6x)(-20x^6) + (-20x^3)(15x^4) + (-6x^5)(-6x^2)$ থেকে
$= 120 - 300 + 36$
অতএব, সহগ = −144

৪৬. গ. T_7

ব্যাখ্যা: এখানে, $(2+3x)^9 = 2^9\left(1 + \frac{3x}{2}\right)^9$ এবং $x = \frac{3}{2}$ হলে $\frac{3x}{2} = \frac{9}{4}$
$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{9}{4} = \frac{10-r}{r} \cdot \frac{9}{4}$
$T_{r+1} \ge T_r$ হলে, $9(10-r) \ge 4r$
বা, $13r \le 90$
বা, $r \le 6.92$
সুতরাং, $r = 6$ পর্যন্ত পদগুলো বাড়ে এবং T_7 এর পর কমে
অতএব, বৃহত্তম পদ T_7

৪৭. ঘ. সবগুলো

ব্যাখ্যা: $9^n - 8n - 1 = (1+8)^n - 8n - 1$
দ্বিপদী বিস্তৃতি, $(1+8)^n = 1 + 8n + \binom{n}{2}8^2 + \binom{n}{3}8^3 + \ldots$
সুতরাং, রাশি = $64\{\binom{n}{2} + 8\binom{n}{3} + \ldots\}$
রাশিটি 64 এর গুণিতক
অতএব, এটি 16, 32 ও 64 সবগুলো দ্বারাই বিভাজ্য

৪৮. ঘ. $\frac{8}{15}$

ব্যাখ্যা: $2^{403} = 2^3 \cdot (2^4)^{100} = 8(15+1)^{100}$
দ্বিপদী বিস্তৃতি থেকে, $(15+1)^{100} = 15k + 1$ (k পূর্ণসংখ্যা)
সুতরাং, $2^{403} = 8(15k+1) = 15(8k) + 8$
এখানে, $\frac{2^{403}}{15} = 8k + \frac{8}{15}$
অতএব, ভগ্নাংশ অংশ = $\frac{8}{15}$

৪৯. ক. $\frac{231}{16}$

ব্যাখ্যা: এখানে, $n = 12$ জোড়, তাই মধ্যপদ

$\left(\frac{12}{2}+1\right) = 7$ তম পদ

সুতরাং, $T_7 = \binom{12}{6} x^6 \left(-\frac{1}{2x}\right)^6$

$= 924 \times x^6 \times \frac{1}{64x^6}$

অতএব, মধ্যপদ $= \frac{231}{16}$

৫০. গ. $ab = 1$

ব্যাখ্যা: ১ম রাশির সাধারণ পদ,

$\binom{11}{r}(ax^2)^{11-r}\left(\frac{1}{bx}\right)^r = \binom{11}{r}a^{11-r}b^{-r}x^{22-3r}$

x^7 এর জন্য, $22 - 3r = 7$ বা $r = 5$

সুতরাং, সহগ $= \binom{11}{5}a^6b^{-5}$

২য় রাশির সাধারণ পদ, $\binom{11}{k}(ax)^{11-k}\left(-\frac{1}{bx^2}\right)^k =$

$\binom{11}{k}a^{11-k}(-1)^k b^{-k}x^{11-3k}$

x^{-7} এর জন্য, $11 - 3k = -7$ বা $k = 6$

সুতরাং, সহগ $= \binom{11}{6}a^5b^{-6}$

প্রশ্নমতে, $\binom{11}{5}a^6b^{-5} = \binom{11}{6}a^5b^{-6}$

যেহেতু $\binom{11}{5} = \binom{11}{6}$, তাই $a^6b^{-5} = a^5b^{-6}$

অতএব, $ab = 1$