MCQ

৫০ নম্বর

১. গ. 14

ব্যাখ্যা:

শর্তমতে, বিন্দুটি থেকে রেখাদ্বয়ের লম্ব দূরত্ব সমান।

$$\frac{|x+2y+7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2x-y+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$\Rightarrow (x+2y+7)^2 = (2x-y+8)^2$$

$$\Rightarrow x^2+4y^2+49+4xy+14x+28y = 4x^2+y^2+64-4xy+32x-16y$$

$$\Rightarrow 3x^2-3y^2-8xy+18x-44y+15=0$$

$$\Rightarrow x^2-y^2-\frac{8}{3}xy+6x-\frac{44}{3}y+5=0$$

প্রদত্ত সমীকরণের সাথে তুলনা করে, $2h = -\frac{8}{3}$

$$\Rightarrow h = -\frac{4}{3}$$

$$2g = 6 \Rightarrow g = 3$$

$$2f = -\frac{44}{3} \Rightarrow f = -\frac{22}{3}$$

$$c = 5$$

অতএব, $g+c+h-f = 3+5-\frac{4}{3}-\left(-\frac{22}{3}\right)$

$$= 8+\frac{18}{3} = 14$$

$$\therefore \boxed{g+c+h-f=14}$$

২. ক. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

ব্যাখ্যা: আপতিত রশ্মির সমীকরণ,

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$x+y=1$ রেখার সাথে ছেদবিন্দু P হলে,

$$x+\frac{x}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

এবং, $y = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$

অতএব, $P\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)$

$x+y=1$ রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দু $O(0,0)$-এর প্রতিবিম্ব O' হলে,

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = -2\frac{-1}{1^2+1^2} = 1$$

$$\Rightarrow O'(1,1)$$

প্রতিফলিত রশ্মিটি $O'(1,1)$ এবং P বিন্দুগামী হবে।

$O'P$ বা PQ রেখার ঢাল,

$$m = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}+1}}{1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}}{\frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$= \sqrt{3}$$

অতএব, প্রতিফলিত রশ্মির সমীকরণ, $y-1 = \sqrt{3}(x-1)$

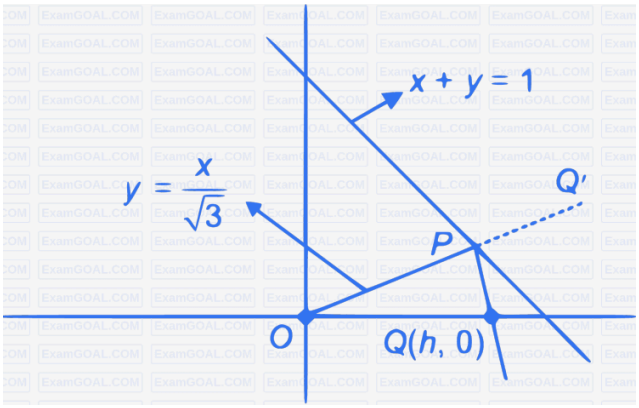
Q বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হওয়ায় $y=0$ বসিয়ে,

$$-1 = \sqrt{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow x = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \boxed{Q\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}, 0\right)}$



৩. গ. $\frac{4}{7}$

ব্যাখ্যা: পরিকেন্দ্র $P(1,1)$ হওয়ায়,

$PA^2 = PB^2 = PC^2$

$PA^2 = (a-1)^2 + 4$

$PC^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2$

$PA^2 = PC^2 \Rightarrow (b-1)^2 = 4$

$\Rightarrow b = 3$ অথবা $b = -1$

আবার, $PB^2 = (b-1)^2 + 16$

উভয় ক্ষেত্রেই, $PB^2 = 20$

অতএব, $(a-1)^2 + 4 = 20$

$\Rightarrow (a-1)^2 = 16 \Rightarrow a = 5$ অথবা $a = -3$

যেহেতু ab>0 এবং তিনটি বিন্দু দ্বারা ত্রিভুজ গঠিত হতে হবে, তাই, $a = -3, \quad b = -1$

অতএব, শীর্ষবিন্দুগুলো,
$A(-3,3), \quad B(-1,5), \quad C(-3,-1)$

AP রেখার সমীকরণ, $y - 1 = \frac{3-1}{-3-1}(x-1)$

$\Rightarrow x + 2y = 3$

BC রেখার সমীকরণ, $y - 5 = \frac{5-(-1)}{-1-(-3)}(x+1)$

$\Rightarrow 3x - y + 8 = 0 \Rightarrow y = 3x + 8$

ছেদবিন্দু $Q(k_1, k_2)$ হলে, $x + 2(3x+8) = 3$

$\Rightarrow 7x = -13 \Rightarrow k_1 = -\frac{13}{7}$

এবং, $k_2 = 3\left(-\frac{13}{7}\right) + 8$

$= \frac{17}{7}$

অতএব, $k_1 + k_2 = -\frac{13}{7} + \frac{17}{7}$

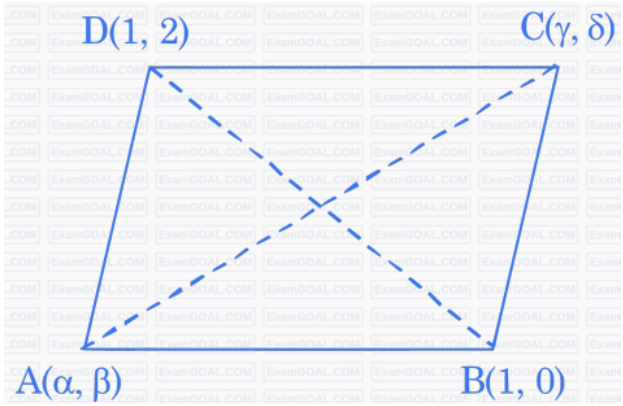
$= \frac{4}{7} \therefore \boxed{k_1 + k_2 = \frac{4}{7}}$

৪. খ. 22

ব্যাখ্যা: মূল ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র $G: x = \frac{1+3+2}{3} = 2, \quad y = \frac{3+1+4}{3} = \frac{8}{3}$
প্রতিবিম্ব ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র হবে মূল ভরকেন্দ্রের প্রতিবিম্ব।
$x + 2y = 2$ রেখার সাপেক্ষে $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ এর প্রতিবিম্ব (α, β) হলে:
$\frac{\alpha-2}{1} = \frac{\beta-\frac{8}{3}}{2} = -2\frac{2(1)+\frac{8}{3}(2)-2}{1^2+2^2} = -2\frac{\frac{16}{3}}{5} = -\frac{32}{15}$
$\alpha = 2 - \frac{32}{15} = -\frac{2}{15}$
$\beta = \frac{8}{3} - \frac{64}{15} = \frac{40-64}{15} = -\frac{24}{15}$
$\therefore 15(\alpha - \beta) = 15\left(-\frac{2}{15} - \left(-\frac{24}{15}\right)\right) = 15\left(\frac{22}{15}\right) = 22$

৫. খ. 8

ব্যাখ্যা: সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
তাই AC এর মধ্যবিন্দু = BD এর মধ্যবিন্দু।
x-স্থানাঙ্কের জন্য: $\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{1+1}{2} \Rightarrow \alpha + \gamma = 2$
y-স্থানাঙ্কের জন্য: $\frac{\beta+\delta}{2} = \frac{0+2}{2} \Rightarrow \beta + \delta = 2$
$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 + 2 = 4$
$\Rightarrow 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 2 \times 4 = 8$



৬. গ. 46.08

ব্যাখ্যা: সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজে, $OP = OQ = a$

ধরি।

মূলবিন্দু O থেকে অতিভুজ PQ-এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য,

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

এখানে, PQ রেখার সমীকরণ, $3x + 4y = 12$

তাই, মূলবিন্দু থেকে রেখাটির লম্ব দূরত্ব,

$$h = \frac{|3(0) + 4(0) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{12}{5}$$

অতএব, $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{12}{5}$

$$\Rightarrow a = \frac{12\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{288}{25}$$

আবার, সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজে,

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 = 2a^2$$

সুতরাং, $l = OP^2 + PQ^2 + QO^2$

$$= a^2 + 2a^2 + a^2 = 4a^2$$

$$= 4 \times \frac{288}{25}$$

$$= \frac{1152}{25} = 46.08$$

$$\therefore \boxed{l = \frac{1152}{25} = 46.08}$$

৭. খ. 91

ব্যাখ্যা: $(1, 2)$ এবং $\left(\frac{57}{13}, -\frac{40}{13}\right)$-এর মধ্যবিন্দু দর্পণ রেখা

$$2x - 3y + \lambda = 0$$

এর উপর অবস্থিত।

মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক,

$$x = \frac{1 + \frac{57}{13}}{2} = \frac{35}{13}$$

$$y = \frac{2 - \frac{40}{13}}{2} = -\frac{7}{13}$$

মানগুলো রেখার সমীকরণে বসিয়ে,

$$2\left(\frac{35}{13}\right) - 3\left(-\frac{7}{13}\right) + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \frac{70 + 21}{13} + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow 7 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -7$$

এখন, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রেখা, $8x - 11y - 33 = 0$

এবং, $2x - 3y - 7 = 0$

তৃতীয় সমীকরণকে 4 দ্বারা গুণ করে, $8x - 12y - 28 = 0$

দুটি সমীকরণ বিয়োগ করে, $y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$

অতএব, $2x - 3(5) - 7 = 0 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11$

সুতরাং, ছেদবিন্দু $(11, 5)$

বিন্দুটি প্রথম রেখায় বসিয়ে, $3(11) - 4(5) - \alpha = 0$

$$\Rightarrow 33 - 20 = \alpha \Rightarrow \alpha = 13$$

অতএব, $|\alpha\lambda| = |13 \times (-7)| = 91$

$$\therefore \boxed{|\alpha\lambda| = 91}$$

৮. গ. 23

ব্যাখ্যা: ধরি, A প্রান্ত $x - y + 2 = 0$ রেখায়, $A(a, a + 2)$ এবং B প্রান্ত $y + 2 = 0$ রেখায়, $B(b, -2)$।
রডের দৈর্ঘ্য $8 \Rightarrow AB^2 = (a - b)^2 + (a + 4)^2 = 64$
$P(x, y)$ বিন্দু AB কে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।
$x = \frac{2b + a}{3} \Rightarrow a + 2b = 3x$
$y = \frac{2(-2) + (a+2)}{3} = \frac{a-2}{3} \Rightarrow a = 3y + 2$
তাহলে, $2b = 3x - (3y + 2) \Rightarrow b = \frac{3x - 3y - 2}{2}$
মানগুলো সমীকরণে বসালে: $\left(3y + 2 - \frac{3x-3y-2}{2}\right)^2 + (3y + 6)^2 = 64$
$\Rightarrow \left(\frac{-3x + 9y + 6}{2}\right)^2 + 9(y + 2)^2 = 64$

$\Rightarrow 9(-x+3y+2)^2+36(y+2)^2=256$
$\Rightarrow 9x^2+117y^2-54xy-36x+252y-76=0$
$\Rightarrow 9(x^2+13y^2-6xy-4x+28y)-76=0$
তুলনা করে: $\alpha=13,\beta=-6,\gamma=-4$
$\therefore \alpha-\beta-\gamma=13-(-6)-(-4)=23$

৯. খ. 30
ব্যাখ্যা: (x_1,y_1) বিন্দুগামী সরলরেখা দ্বারা ধনাত্মক অক্ষদ্বয়ের সাথে গঠিত ত্রিভুজের সর্বনিম্ন ক্ষেত্রফল $=2x_1y_1$
$\therefore$ Min Area $=2(3)(5)=30$ বর্গ একক।

১০. খ. 70
ব্যাখ্যা: x-অক্ষের সাপেক্ষে $P(1,2)$ এর প্রতিবিম্ব $P'(1,-2)$।
প্রতিফলিত রশ্মি $P'R$ রেখা বরাবর যাবে।
$P'R$ রেখার সমীকরণ: $y-3=\frac{3-(-2)}{4-1}(x-4)\Rightarrow 3y-9=5x-20\Rightarrow 5x-3y-11=0$
Q বিন্দুটি x-অক্ষের উপর, তাই $y=0\Rightarrow x=\frac{11}{5}\Rightarrow Q\left(\frac{11}{5},0\right)$
PQRS সামান্তরিক হওয়ায় এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু একই হবে।
$\therefore P+R=Q+S\Rightarrow S=P+R-Q=\left(1+4-\frac{11}{5},2+3-0\right)=\left(\frac{14}{5},5\right)$
$\therefore h=\frac{14}{5},k=5$
$hk^2=\frac{14}{5}\times 25=70$

১১. খ. 4
ব্যাখ্যা: ভেক্টর $\overrightarrow{OA}=(5,2)$ এবং $\overrightarrow{OB}=(2,a)$
এদের মধ্যবর্তী কোণ $\theta=\frac{\pi}{4}$
$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{10+2a}{\sqrt{29}\sqrt{4+a^2}}$
বর্গ করে, $\frac{1}{2}=\frac{4(5+a)^2}{29(4+a^2)}\Rightarrow 29(4+a^2)=8(25+10a+a^2)$
$\Rightarrow 116+29a^2=200+80a+8a^2\Rightarrow 21a^2-80a-84=0$
মূলদ্বয়ের গুণফল $=\frac{c}{a}=-\frac{84}{21}=-4$
গুণফলের পরম মান $=|-4|=4$

১২. ক. 0
ব্যাখ্যা: ১ম ও ২য় রেখার ছেদবিন্দু $A(3,4)$
লম্বকেন্দ্র $H(3,-1)$
A হতে বিপরীত বাহুর $(y=mx+c)$ উপর অঙ্কিত লম্ব রেখা AH।
$A(3,4)$ এবং $H(3,-1)$ এর সংযোগ রেখা $x=3$, যা y -অক্ষের সমান্তরাল।
সুতরাং, বিপরীত বাহুটি x-অক্ষের সমান্তরাল হতে হবে, অর্থাৎ ঢাল $m=0$।
ফলে, ৩য় রেখাটি হলো $y=c$
১ম ও ৩য় রেখার ছেদবিন্দু $B: c=x+1\Rightarrow x=c-1\therefore B(c-1,c)$
B হতে ২য় রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের ঢাল $-\frac{1}{4}$ এবং এটি $H(3,-1)$ গামী।
BH এর ঢাল $=\frac{c-(-1)}{c-1-3}=\frac{c+1}{c-4}$
$\therefore\frac{c+1}{c-4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 4c+4=-c+4\Rightarrow 5c=0\Rightarrow c=0$
$\therefore m-c=0-0=0$

১৩. খ. 6
ব্যাখ্যা: x-অক্ষে $y=0$: B বিন্দু $x=-2\Rightarrow B(-2,0)$; C বিন্দু $x=2\Rightarrow C(2,0)$
A বিন্দু: $3y-x=2, x+y=2$ সমাধান করে $x=1,y=1\Rightarrow A(1,1)$
A হতে BC (x-অক্ষ) এর উপর লম্ব $x=1$
B হতে AC এর উপর লম্ব: AC এর ঢাল -1, তাই লম্বের ঢাল 1।
সমীকরণ: $y-0=1(x+2)\Rightarrow y=x+2$
লম্বকেন্দ্র $P: x=1\Rightarrow y=1+2=3\Rightarrow P(1,3)$
$\triangle PBC$ এর ভূমি $BC=2-(-2)=4$ এবং উচ্চতা $=3$
ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$ বর্গ একক।

১৪. গ. $\sqrt{5}$
ব্যাখ্যা: ১ম ত্রিভুজের $4x-7y+10=0$ ও $7x+4y=15$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব $(a_1a_2+b_1b_2=0)$। সমকোণী ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র সমকোণিক শীর্ষবিন্দুতে থাকে।
ছেদবিন্দু $H_1: 4x-7y=-10$ এবং $7x+4y=15$ সমাধান করে পাই $x=1,y=2\Rightarrow H_1(1,2)$
২য় ত্রিভুজের $x=0$ ও $y=0$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব, যার ছেদবিন্দু মূলবিন্দু।
$\therefore$ এর লম্বকেন্দ্র $H_2(0,0)$
দূরত্ব $H_1H_2=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ একক।

১৫. ঘ. 20
ব্যাখ্যা: প্রদত্ত সমীকরণ: $x(3\lambda+1)+y(7\lambda+2)=17\lambda+5$
$\Rightarrow (x+2y-5)+\lambda(3x+7y-17)=0$
এটি $L_1+\lambda L_2=0$ আকৃতির, যা $L_1=0$ ও $L_2=0$ এর ছেদবিন্দুগামী।
$x+2y-5=0$ এবং $3x+7y-17=0$ সমাধান করে ছেদবিন্দু পাই $P(1,2)$।
$P(1,2)$ বিন্দুগামী যেকোনো রেখার সমীকরণ: $y-2=m(x-1)\Rightarrow mx-y+2-m=0$
মূলবিন্দু থেকে এর দূরত্ব $D=\frac{|2-m|}{\sqrt{1+m^2}}$
এই দূরত্ব সর্বোচ্চ হবে যখন রেখাটি মূলবিন্দু এবং P বিন্দুর সংযোগকারী রেখা OP এর উপর লম্ব হবে।
OP এর ঢাল $=\frac{2-0}{1-0}=2$। সুতরাং লম্ব রেখা L এর ঢাল $m=-\frac{1}{2}$।
$\therefore$ L এর সমীকরণ: $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow 2y-$

$4 = -x + 1 \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$
এখন, $(3, 6)$ বিন্দু থেকে L রেখার দূরত্ব, $d = \frac{|3+2(6)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|3+12-5|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$
$\therefore d^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{100}{5} = 20$

১৬. গ. 3
ব্যাখ্যা: অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান কোণ উৎপন্নকারী রেখা $y = x$ অথবা $y = -x$
$y = x$ হলে, $A = L_1 \cap (y = x) \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow A(-2, -2)$
$B = L_2 \cap (y = x) \Rightarrow 6x = p \Rightarrow B\left(\frac{p}{6}, \frac{p}{6}\right)$
$AB = \sqrt{\left(\frac{p}{6} + 2\right)^2 + \left(\frac{p}{6} + 2\right)^2} = \sqrt{2}\left(\frac{p}{6} + 2\right) = \frac{9}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow \frac{p}{6} + 2 = 4.5 \Rightarrow \frac{p}{6} = 2.5 \Rightarrow p = 15 > 0$ (গ্রহণযোগ্য)।
AM হলো সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের লম্ব দূরত্ব: $4x + 2y + 12 = 0$ ও $4x + 2y - 15 = 0$
$AM = \frac{|12-(-15)|}{\sqrt{16+4}} = \frac{27}{\sqrt{20}}$
সমকোণী $\triangle AMB$ এ, $BM^2 = AB^2 - AM^2 = \frac{81}{2} - \frac{729}{20} = \frac{810-729}{20} = \frac{81}{20} \Rightarrow BM = \frac{9}{\sqrt{20}}$
$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{\frac{27}{\sqrt{20}}}{\frac{9}{\sqrt{20}}} = 3$

১৭. ঘ. $\frac{\pi}{2}$
ব্যাখ্যা: প্যারামেট্রিক সমীকরণ: $x = 2 + r\cos\theta, y = 3 + r\sin\theta$ যেখানে $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$
মানগুলো $x + y = 6$ রেখায় বসালে:
$(2 + r\cos\theta) + (3 + r\sin\theta) = 6 \Rightarrow r(\cos\theta + \sin\theta) = 1$
$\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\theta + \sin\theta) = 1 \Rightarrow \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$
বর্গ করে: $1 + \sin 2\theta = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2}$
$2\theta = 30^\circ, 150^\circ \Rightarrow \theta_1 = 15^\circ, \theta_2 = 75^\circ$
$\therefore \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

১৮. গ. 10
ব্যাখ্যা: ভেক্টর $\overrightarrow{BA} = (1 - 2, 0 - (-1)) = (-1, 1)$, দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}$
ভেক্টর $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{7}{3} - 2, \frac{4}{3} - (-1)\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$, দৈর্ঘ্য $= \frac{\sqrt{50}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$
একক ভেক্টর: $\hat{BA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1), \hat{BC} = \frac{3}{5\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(1, 7)$
অন্তর্দ্বিখণ্ডকের দিক $\hat{BA} + \hat{BC} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(-5 + 1, 5 + 7) = \frac{1}{5\sqrt{2}}(-4, 12)$ যা $(-1, 3)$ এর সমান্তরাল।
ঢাল $= \frac{3}{-1} = -3$
$B(2, -1)$ গামী রেখা: $y + 1 = -3(x - 2) \Rightarrow 3x + y = 5$

তুলনা করে $\alpha = 3, \beta = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 3^2 + 1^2 = 10$

১৯. খ. 4
ব্যাখ্যা: ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরানোয় নতুন কোণ $= \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$
$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 15^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$
নতুন রেখার সমীকরণ: $y - 0 = \tan 15^\circ(x - a) \Rightarrow (2 - \sqrt{3})x - y - a(2 - \sqrt{3}) = 0$
মূলবিন্দু হতে দূরত্ব $\frac{|-a(2-\sqrt{3})|}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$(2 - \sqrt{3})^2 + 1 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1 = 8 - 4\sqrt{3} = 2(\sqrt{3} - 1)^2$
$2 - \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}$
$\therefore \frac{a\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a\frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$
$\alpha = 30^\circ \Rightarrow \tan^2\alpha = \frac{1}{3}$
$3a^2\tan^2\alpha - 2\sqrt{3} = 3(\sqrt{3} + 1)^2\left(\frac{1}{3}\right) - 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4$

২০. ক. $x^2 - 13x + 42 = 0$
ব্যাখ্যা: শীর্ষবিন্দুগুলো ছেদবিন্দু থেকে নির্ণয় করি:
$15x - y = 82$ ও $6x - 5y = -4 \Rightarrow x = 6, y = 8 \Rightarrow V_1(6, 8)$
$6x - 5y = -4$ ও $9x + 4y = 17 \Rightarrow x = 1, y = 2 \Rightarrow V_2(1, 2)$
$15x - y = 82$ ও $9x + 4y = 17 \Rightarrow x = 5, y = -7 \Rightarrow V_3(5, -7)$
ভরকেন্দ্র $(\alpha, \beta) = \left(\frac{6+1+5}{3}, \frac{8+2-7}{3}\right) = (4, 1)$
মূলদ্বয়: $r_1 = 2\alpha - \beta = 8 - 1 = 7, r_2 = \alpha + 2\beta = 4 + 2 = 6$
সমীকরণ: $x^2 - (7 + 6)x + 7 \times 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 13x + 42 = 0$

২১. গ. 6
ব্যাখ্যা: A এর স্থানাঙ্ক: $y = 5x - 6 \Rightarrow 3x + 10x - 12 = 14 \Rightarrow 13x = 26 \Rightarrow x = 2, y = 4 \Rightarrow A(2, 4)$
B এর স্থানাঙ্ক: $y = 5 - 6x \Rightarrow 4x + 15 - 18x = 8 \Rightarrow 14x = 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = 2 \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$
AB এর সমীকরণ: $y - 4 = \frac{4-2}{2-\frac{1}{2}}(x - 2) \Rightarrow y - 4 = \frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow 4x - 3y + 4 = 0$
$P(5, -2)$ থেকে দূরত্ব $d = \frac{|4(5)-3(-2)+4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{20+6+4}{5} = \frac{30}{5} = 6$

২২. গ. 25
ব্যাখ্যা: BC এর ঢাল $= \frac{5-2}{4-(-1)} = \frac{3}{5}$, A থেকে লম্বের সমীকরণ: $y + 7 = -\frac{5}{3}(x - 3) \Rightarrow 5x + 3y = -6$
AC এর ঢাল $= \frac{5-(-7)}{4-3} = 12$, B থেকে লম্বের সমীকরণ: $y - 2 = -\frac{1}{12}(x + 1) \Rightarrow x + 12y = 23$

$5x+3y=-6$ কে 4 দিয়ে গুণ করলে $20x+12y=-24$
বিয়োগ করলে $19x=-47\Rightarrow\alpha=-\frac{47}{19}$
$x+12y=23\Rightarrow 12y=23+\frac{47}{19}=\frac{484}{19}\Rightarrow\beta=\frac{121}{57}$
$9\alpha-6\beta+60=9\left(-\frac{47}{19}\right)-6\left(\frac{121}{57}\right)+60=$
$-\frac{423}{19}-\frac{242}{19}+60=-\frac{665}{19}+60=-35+60=25$

২৩. ক. $4+6\sqrt{3}$
ব্যাখ্যা: প্রদত্ত দিক $\sqrt{3}x-y+1=0\Rightarrow$ ঢাল $\tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=60^\circ$
প্যারামেট্রিক সমীকরণ: $x=2+r\cos 60^\circ=2+\frac{r}{2}, y=3+r\sin 60^\circ=3+\frac{r\sqrt{3}}{2}$
মানগুলো $2x-3y+28=0$ তে বসালে:
$2\left(2+\frac{r}{2}\right)-3\left(3+\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)+28=0$
$\Rightarrow 4+r-9-\frac{3\sqrt{3}}{2}r+28=0\Rightarrow r\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=-23$
$\Rightarrow r=\frac{-46}{2-3\sqrt{3}}=\frac{46}{3\sqrt{3}-2}=\frac{46(3\sqrt{3}+2)}{27-4}=\frac{46(3\sqrt{3}+2)}{23}=2(3\sqrt{3}+2)=4+6\sqrt{3}$

২৪. খ. 17
ব্যাখ্যা: প্রথম দুটি রেখা $L_1: 4x+3y=69$ এবং $L_2: 4y-3x=17$ পরস্পর লম্ব $(m_1\times m_2=-\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}=-1)$।
সুতরাং ত্রিভুজটি সমকোণী, যার অতিভুজ হলো তৃতীয় রেখা $L_3: x+7y=61$
সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হলো অতিভুজের মধ্যবিন্দু।
L_1 ও L_3 এর ছেদবিন্দু $B(12,7)$
L_2 ও L_3 এর ছেদবিন্দু $A(5,8)$
অতিভুজ AB এর মধ্যবিন্দু বা পরিকেন্দ্র $C(\alpha,\beta)=\left(\frac{12+5}{2},\frac{7+8}{2}\right)=\left(\frac{17}{2},\frac{15}{2}\right)$
$\therefore(\alpha-\beta)^2+\alpha+\beta=\left(\frac{17}{2}-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{17}{2}+\frac{15}{2}=1^2+\frac{32}{2}=1+16=17$

২৫. গ. $\frac{8}{\sqrt{3}}$
ব্যাখ্যা: B ও C মূলবিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম হওয়ায় BC এর মধ্যবিন্দু মূলবিন্দু $(0,0)$।
সমবাহু ত্রিভুজে মধ্যমা এবং লম্ব একই রেখা নির্দেশ করে।
সুতরাং, A বিন্দু থেকে BC এর উপর অঙ্কিত লম্বটি মূলবিন্দুগামী হবে এবং $y+x=0$ এর উপর লম্ব হবে।
লম্ব রেখার সমীকরণ: $y=x$। A বিন্দুটি $y=x$ এবং $y-2x=2$ এর ছেদবিন্দু।
$x-2x=2\Rightarrow x=-2, y=-2\therefore A(-2,-2)$
ত্রিভুজের উচ্চতা $h=OA=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
সমবাহু ত্রিভুজে উচ্চতা $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a\Rightarrow a=\frac{2h}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
$\therefore$ Area $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{32}{3}=\frac{8}{\sqrt{3}}$ বর্গ একক

২৬. গ. $\frac{1}{2}$
ব্যাখ্যা: যেহেতু $\triangle APB$ এবং $\triangle ABC$ এর উচ্চতা একই, তাই $BP:BC=4:7\Rightarrow BP:PC=4:3$
P এর স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{4(-2)+3(-4)}{7},\frac{4(-5)+3(3)}{7}\right)=\left(-\frac{20}{7},-\frac{11}{7}\right)$
AP রেখার ঢাল $=\frac{1-\left(-\frac{11}{7}\right)}{1-\left(-\frac{20}{7}\right)}=\frac{\frac{18}{7}}{\frac{27}{7}}=\frac{2}{3}$। সমীকরণ: $y-1=\frac{2}{3}(x-1)\Rightarrow 2x-3y+1=0$
AC রেখার ঢাল $=\frac{1-(-5)}{1-(-2)}=\frac{6}{3}=2$। সমীকরণ: $y-1=2(x-1)\Rightarrow 2x-y-1=0$
x-অক্ষ $(y=0)$ এর সাথে ছেদবিন্দুসমূহ: AP এর ক্ষেত্রে $x=-\frac{1}{2}$, AC এর ক্ষেত্রে $x=\frac{1}{2}$
ভূমি $=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ একক। ত্রিভুজের শীর্ষ $A(1,1)$ হওয়ায় উচ্চতা $=1$
$\therefore$ Area $=\frac{1}{2}\times$ base $\times$ height $=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$ বর্গ একক

২৭. ঘ. $(2,2)$
ব্যাখ্যা: রেখাটি অক্ষদ্বয়কে $A(8,0)$ এবং $B(0,6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার বাহুগুলো $a=6, b=8$ এবং অতিভুজ $c=\sqrt{6^2+8^2}=10$
অন্তঃব্যাসার্ধ $r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{6+8-10}{2}=2$
মূলবিন্দুতে সমকোণ হওয়ায় অন্তঃকেন্দ্র হবে $(r,r)=(2,2)$।

২৮. খ. 8
ব্যাখ্যা: B এর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{3}{\sqrt{a}},\sqrt{a}\right)$ এবং C এর স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{3}{\sqrt{a}},-\sqrt{a}\right)$
$A\left(\frac{3}{\sqrt{a}},\sqrt{a}\right)$ ও $C\left(-\frac{3}{\sqrt{a}},-\sqrt{a}\right)$ বিন্দুগামী রেখা মূলবিন্দুগামী।
AC এর সমীকরণ: $y=\frac{\sqrt{a}}{\frac{3}{\sqrt{a}}}x\Rightarrow y=\frac{a}{3}x\Rightarrow ax-3y=0$
AC এর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{a}}\right)^2+(2\sqrt{a})^2}=\frac{2\sqrt{a^2+9}}{\sqrt{a}}$
D থেকে AC এর লম্ব দূরত্ব $h=\frac{|a(3\cos\theta)-3(a\sin\theta)|}{\sqrt{a^2+(-3)^2}}=\frac{3a|\cos\theta-\sin\theta|}{\sqrt{a^2+9}}$
$\triangle ACD$ এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times AC\times h=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{a^2+9}}{\sqrt{a}}\times\frac{3a|\cos\theta-\sin\theta|}{\sqrt{a^2+9}}=3\sqrt{a}|\cos\theta-\sin\theta|$
এর সর্বোচ্চ মান হবে যখন $|\cos\theta-\sin\theta|$ সর্বোচ্চ হয় (যা $\sqrt{2}$)
সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল $=3\sqrt{2a}=12\Rightarrow\sqrt{2a}=4\Rightarrow 2a=16\Rightarrow a=8$

২৯. গ. $2\sqrt{2}$
ব্যাখ্যা: বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু A: $2(2y-1)-y-1=0\Rightarrow 3y=3\Rightarrow y=1, x=1\Rightarrow A(1,1)$
লম্বকেন্দ্র H $\left(\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right)$। B ও C যথাক্রমে ১ম ও ২য় রেখার

উপর অবস্থিত।
BH রেখাটি ২য় বাহু $(2x - y - 1 = 0$, ঢাল $= 2)$ এর উপর লম্ব, তাই BH এর ঢাল $= -\frac{1}{2}$
BH এর সমীকরণ: $y - \frac{7}{3} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{7}{3}\right) \Rightarrow x + 2y = 7$
B বিন্দু (১ম বাহু ও BH এর ছেদবিন্দু): $x - 2y = -1, x + 2y = 7 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3, y = 2 \Rightarrow B(3, 2)$
CH রেখাটি ১ম বাহু $(x - 2y + 1 = 0$, ঢাল $= \frac{1}{2})$ এর উপর লম্ব, তাই CH এর ঢাল $= -2$
CH এর সমীকরণ: $y - \frac{7}{3} = -2\left(x - \frac{7}{3}\right) \Rightarrow 2x + y = 7$
C বিন্দু (২য় বাহু ও CH এর ছেদবিন্দু): $2x - y = 1, 2x + y = 7 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2, y = 3 \Rightarrow C(2, 3)$
ভরকেন্দ্র $G = \left(\frac{1+3+2}{3}, \frac{1+2+3}{3}\right) = (2, 2)$। মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব $= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

৩০. গ. $\frac{-2b^2}{b+1}$
ব্যাখ্যা: ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = 1$
$\Rightarrow \frac{1}{2}|a(2b + 1 - b) + b(b - 0) + 0| = 1$
$\Rightarrow |a(b + 1) + b^2| = 2 \Rightarrow a(b + 1) + b^2 = \pm 2$
$a_1 = \frac{2-b^2}{b+1}$ এবং $a_2 = \frac{-2-b^2}{b+1}$
মানগুলোর যোগফল $= \frac{2-b^2}{b+1} + \frac{-2-b^2}{b+1} = \frac{-2b^2}{b+1}$

৩১. গ. 6
ব্যাখ্যা: মধ্যবিন্দুসমূহ রেখা তিনটির ছেদবিন্দু:
$L_1 : x - y + 1 = 0, L_2 : x - 2y + 3 = 0, L_3 : 2x - 5y + 11 = 0$
$M_1 = L_1 \cap L_2 \Rightarrow M_1(1, 2)$
$M_2 = L_1 \cap L_3 \Rightarrow M_2(2, 3)$
$M_3 = L_2 \cap L_3 \Rightarrow M_3(7, 5)$
মধ্যবিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|1(3 - 5) + 2(5 - 2) + 7(2 - 3)| = \frac{3}{2}$
মূল ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল মধ্যবিন্দু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের 4 গুণ।
$\therefore$ Area $= 4 \times \frac{3}{2} = 6$ বর্গ একক

৩২. ক. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
ব্যাখ্যা: $L \equiv x + y - 1 = 0$। $(1, 2)$ বিন্দুটি বসালে $1 + 2 - 1 = 2 > 0$
একই পাশে থাকায় $(\sin\theta, \cos\theta)$ এর জন্যও মান > 0 হবে।
$\sin\theta + \cos\theta - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > 1 \Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

৩৩. গ. 9
ব্যাখ্যা: রেখা L পরিকেন্দ্র দিয়ে যায় এবং BC কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, এর মানে হলো L রেখাটি BC এর লম্বদ্বিখণ্ডক।
BC এর মধ্যবিন্দু $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{9+8}{2}\right) = \left(2, \frac{17}{2}\right)$
BC এর ঢাল $= \frac{8-9}{3-1} = -\frac{1}{2}$। সুতরাং L এর ঢাল $m = 2$
L এর সমীকরণ: $y - \frac{17}{2} = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4 + \frac{17}{2} = 2x + \frac{9}{2}$
রেখাটি y-অক্ষকে $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রশ্নমতে এটি $\left(0, \frac{\alpha}{2}\right) \therefore \alpha = 9$

৩৪. খ. 9
ব্যাখ্যা: বিপরীত দিক থেকে প্রক্রিয়াটি অনুসরণ করি:
ঘড়ির কাঁটার দিকে $\frac{\pi}{4}$ কোণে ঘূর্ণন: $x' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{7}{\sqrt{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3$
$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{7}{\sqrt{2}}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$। বিন্দুটি $(3, 4)$
x-অক্ষের বিপরীত দিকে 2 একক সরণ: $x = 3 - 2 = 1, y = 4$। বিন্দুটি $(1, 4)$
$y = x$ এর সাপেক্ষে প্রতিফলন: স্থানাঙ্ক বিনিময় হবে। বিন্দুটি $(4, 1)$
সুতরাং, $P(a, b) = (4, 1) \Rightarrow a = 4, b = 1$
$\therefore 2a + b = 2(4) + 1 = 9$

৩৫. খ. $(-2, -2)$
ব্যাখ্যা: পরিকেন্দ্র হলো বাহুগুলোর লম্বদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু।
PR এর লম্বদ্বিখণ্ডক: $2x - y + 2 = 0$
PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক নির্ণয় করি:
PQ এর মধ্যবিন্দু $M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (1, 1)$
PQ এর ঢাল $= \frac{-2-4}{4-(-2)} = -1$। লম্বদ্বিখণ্ডকের ঢাল $= 1$।
PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ: $y - 1 = 1(x - 1) \Rightarrow x - y = 0$
ছেদবিন্দু (পরিকেন্দ্র): $(-2, -2)$।

৩৬. ক. $-\frac{71}{256}$
ব্যাখ্যা: ভরকেন্দ্র: $\frac{a+2+a}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$
$\frac{c+b+b}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow 2b + c = 7$
সমান্তর প্রগমনে থাকায় $2b = a + c \Rightarrow 2b = 4 + c$
$(4 + c) + c = 7 \Rightarrow 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$। $\therefore 2b = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow b = \frac{11}{4}$
সমীকরণ: $4x^2 + \frac{11}{4}x + 1 = 0 \Rightarrow 16x^2 + 11x + 4 = 0$
$\alpha + \beta = -\frac{11}{16}, \alpha\beta = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta = \left(-\frac{11}{16}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{121}{256} - \frac{3}{4} = \frac{121-192}{256} = -\frac{71}{256}$

৩৭. গ. $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

ব্যাখ্যা: ধরি শীর্ষ $A(1,2)$। AB এর মধ্যবিন্দু $(-1,1)$ হলে $B(2(-1)-1, 2(1)-2) = (-3,0)$
AC এর মধ্যবিন্দু $(2,3)$ হলে $C(2(2)-1, 2(3)-2) = (3,4)$
ভরকেন্দ্র $G = \left(\frac{1-3+3}{3}, \frac{2+0+4}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, 2\right)$

৩৮. খ. ২য় **(2nd)**
ব্যাখ্যা: শীর্ষ $A(0,2), B(4,3)$ এবং লম্বকেন্দ্র $H(0,0)$। ৩য় শীর্ষ $C(x,y)$।
AH (y-অক্ষ) BC এর উপর লম্ব, তাই BC রেখাটি x -অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ অনুভূমিক।
সুতরাং C এর কোটি B এর কোটির সমান, $y = 3$
BH এর ঢাল $= \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$। AC রেখা BH এর লম্ব, তাই AC এর ঢাল $= -\frac{4}{3}$
AC এর সমীকরণ: $y - 2 = -\frac{4}{3}(x-0) \Rightarrow 4x + 3y = 6$
$y = 3$ বসালে, $4x + 9 = 6 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$। $\therefore$ $C\left(-\frac{3}{4}, 3\right)$
বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

৩৯. ক. $(3,6)$
ব্যাখ্যা: প্রদত্ত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু $A: x + y = 3$ এবং $x - y = -3$ যোগ করলে $2x = 0 \Rightarrow x = 0, y = 3$।
$\therefore A(0,3)$।
কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু $M(2,4)$
A এর বিপরীত শীর্ষ $C = (2(2)-0, 2(4)-3) = (4,5)$
বাকি দুই বাহু $C(4,5)$ বিন্দুগামী এবং প্রদত্ত বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।
বাহু দুটি হলো $x + y = 4 + 5 = 9$ এবং $x - y = 4 - 5 = -1$
অন্য শীর্ষগুলো হলো: $x - y = -3$ ও $x + y = 9$ এর ছেদবিন্দু $(3,6)$
এবং $x + y = 3$ ও $x - y = -1$ এর ছেদবিন্দু $(1,2)$।

৪০. খ. $\frac{c}{\sqrt{3}}$
ব্যাখ্যা: ধরি বাহুদ্বয় a ও b। $a + b = x$ এবং $ab = y$
$x^2 - c^2 = y \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = ab \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -ab$
$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle C = 120^\circ$
পরিব্যাসার্ধ $R = \frac{c}{2\sin C} = \frac{c}{2\sin 120^\circ} = \frac{c}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{c}{\sqrt{3}}$

৪১. গ. 36
ব্যাখ্যা: $A(-1,0)$ ও B ধনাত্মক x-অক্ষে, তাই AB রেখাটি x-অক্ষ। $AB = AC = a$ ধরি।
কোসাইন সূত্র হতে $BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120^\circ = 3a^2$।
$(4\sqrt{3})^2 = 3a^2 \Rightarrow 48 = 3a^2 \Rightarrow a = 4$।
B এর স্থানাঙ্ক $(-1+4, 0) = (3,0)$। C এর স্থানাঙ্ক $(-1 + 4\cos 120^\circ, 4\sin 120^\circ) = (-3, 2\sqrt{3})$।
BC এর সমীকরণ: $y - 0 = \frac{2\sqrt{3}}{-6}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3) \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 3$।
$y = x + 3$ এর সাথে ছেদবিন্দু: $x + \sqrt{3}(x+3) = 3 \Rightarrow x(1+\sqrt{3}) = 3 - 3\sqrt{3} \Rightarrow x = -6 + 3\sqrt{3} = \alpha$।
$\beta = \alpha + 3 = 3\sqrt{3} - 3$।
$\alpha^2 = 9(2-\sqrt{3})^2 = 9(7 - 4\sqrt{3})$।
$\beta^4 = 81(\sqrt{3}-1)^4 = 81(4-2\sqrt{3})^2 = 324(7 - 4\sqrt{3})$।
$\frac{\beta^4}{\alpha^2} = \frac{324}{9} = 36$।

৪২. খ. 25
ব্যাখ্যা: রেখার সমীকরণ: $y + 9 = m(x-4)$।
x-অক্ষের ছেদাংশ A: $y = 0 \Rightarrow x = 4 + \frac{9}{m}$ ।$m > 0$ হওয়ায় $x > 0$, দূরত্ব $a = 4 + \frac{9}{m}$।
y-অক্ষের ছেদাংশ B: $x = 0 \Rightarrow y = -9 - 4m$ ।$m > 0$ হওয়ায় $y < 0$, দূরত্ব $b = |-9-4m| = 9 + 4m$।
দূরত্বের যোগফল $S = a + b = 13 + \frac{9}{m} + 4m$।
AM-GM অসমতা হতে, $\frac{9}{m} + 4m \geq 2\sqrt{\frac{9}{m} \times 4m} = 2(6) = 12$।
$\therefore S_{min} = 13 + 12 = 25$।

৪৩. ক. $\frac{y}{\sqrt{3}-2} + x = 9$
ব্যাখ্যা: নতুন কোণ $\theta = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$।
ঢাল $m = \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$।
রেখার সমীকরণ: $y - 0 = (2-\sqrt{3})(x-9) \Rightarrow \frac{y}{2-\sqrt{3}} = x - 9$
আমরা জানি, $\frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}-2}$।
সুতরাং, $-\frac{y}{\sqrt{3}-2} = x - 9 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{3}-2} + x = 9$।

৪৪. ক. $\frac{392}{3}$
ব্যাখ্যা: লম্বটি ধনাত্মক y-অক্ষের সাথে $\frac{\pi}{6}$ কোণ করলে x -অক্ষের সাথে এর কোণ $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$।
লম্ব আকারের সমীকরণ: $x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ = p \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} = p \Rightarrow \frac{x}{2p} + \frac{y}{\frac{2p}{\sqrt{3}}} = 1$
সুতরাং $a = 2p, b = \frac{2p}{\sqrt{3}}$।
ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(2p)\left(\frac{2p}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2p^2}{\sqrt{3}} = \frac{98}{\sqrt{3}} \Rightarrow p^2 = 49$
$a^2 - b^2 = 4p^2 - \frac{4p^2}{3} = \frac{8p^2}{3} = \frac{8\times 49}{3} = \frac{392}{3}$

৪৫. খ. $(2,2)$
ব্যাখ্যা: বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দু মূলবিন্দু $(0,0)$ একটি শীর্ষ। কর্ণ $11x + 7y = 9$ মূলবিন্দুগামী নয়, তাই এটি অপর দুই শীর্ষের সংযোগ।
১ম শীর্ষ: $4x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4x}{5} \Rightarrow 11x - \frac{28x}{5} = 9 \Rightarrow 27x = 45 \Rightarrow x = \frac{5}{3}, y = -\frac{4}{3}$। $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ।
২য় শীর্ষ: $7x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{7x}{2} \Rightarrow 11x - \frac{49x}{2} =$

$9 \Rightarrow -27x = 18 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}, y = \frac{7}{3}$। $\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$।
কর্ণের মধ্যবিন্দু $M = \left(\frac{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}}{2}, \frac{-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$।
অপর কর্ণটি $(0,0)$ ও $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ গামী, যার সমীকরণ $y = x$। এটি $(2,2)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

৪৬. গ. **B only**
ব্যাখ্যা: রেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$।
শর্তমতে, $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$।
2 দ্বারা গুণ করলে, $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$।
এটি নির্দেশ করে যে রেখাটি সর্বদা $(2,2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে।
$\therefore$ শুধুমাত্র B বিন্দুটি সর্বদা রেখাটির উপর থাকবে।

৪৭. খ. $1 + 2\sqrt{5}$
ব্যাখ্যা: $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$
ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB \times AC = 5\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5} \times AC = 5\sqrt{5} \Rightarrow AC = 10$
AB এর ঢাল $= -\frac{1}{2}$, তাই AC এর ঢাল $= 2$
ঢাল 2 হওয়ায় দিকটি হলো $(1,2)$। এর একক ভেক্টর $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$
$C = A + 10\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (1 + 2\sqrt{5}, 2 + 4\sqrt{5})$ (১ম চতুর্ভাগে ধনাত্মক দিক নেওয়া হলো)
C এর ভুজ $= 1 + 2\sqrt{5}$

৪৮. খ. 3
ব্যাখ্যা: AB এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$
ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times h = 5 \Rightarrow h = \sqrt{10}$
AB এর সমীকরণ: $y - 2 = \frac{-1-2}{1-0}(x - 0) \Rightarrow 3x + y - 2 = 0$
P বিন্দুর সঞ্চারপথ $3x + y - 4\lambda = 0$ রেখাটি AB এর সমান্তরাল এবং এর দূরত্ব $\sqrt{10}$
$\frac{|4\lambda - 2|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \sqrt{10} \Rightarrow |4\lambda - 2| = 10 \Rightarrow 4\lambda - 2 = 10 \Rightarrow \lambda = 3$ (অথবা -2, যা অপশনে নেই)

৪৯. খ. $4x - 3y + 24 = 0$
ব্যাখ্যা: রেখাটি x-অক্ষকে $A(a,0)$ এবং y-অক্ষকে $B(0,b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
মধ্যবিন্দু $P(-3,4) \Rightarrow \frac{a}{2} = -3 \Rightarrow a = -6$ এবং $\frac{b}{2} = 4 \Rightarrow b = 8$
রেখাটির সমীকরণ: $\frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1 \Rightarrow -4x + 3y = 24 \Rightarrow 4x - 3y + 24 = 0$

৫০. খ. $(-3,0) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)$
ব্যাখ্যা: $L_1 \equiv 3x - y + 1 = 0$। মূলবিন্দু $(0,0)$ বসালে মান $1 > 0$।
$\therefore 3(a^2) - (a+1) + 1 > 0 \Rightarrow a(3a-1) > 0 \Rightarrow a < 0$ অথবা $a > \frac{1}{3}$
$L_2 \equiv x + 2y - 5 = 0$। মূলবিন্দু বসালে মান $-5 < 0$।
$\therefore a^2 + 2(a+1) - 5 < 0 \Rightarrow a^2 + 2a - 3 < 0 \Rightarrow (a+3)(a-1) < 0 \Rightarrow -3 < a < 1$
উভয় শর্তের ছেদক (intersection): $a \in (-3,0) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)$