MCQ ৫০ নম্বর

১. দুটি ভেক্টর রাশির বৃহত্তম লব্ধি 28 একক ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি 4 একক। রাশি দুটি পরস্পরের সাথে কীভাবে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান ক্ষুদ্রতম লব্ধির পাঁচগুণ হবে? (The maximum resultant of two vectors is 28 units and the minimum resultant is 4 units. At what angle should the vectors act so that their resultant is five times the minimum resultant?)

(A) 0° (B) 60° (C) 90° (D) 120°

উত্তর: C. 90°

ব্যাখ্যা: $P + Q = 28$ এবং $P - Q = 4$

যোগ করে $P = 16,\ Q = 12$।

কাঙ্ক্ষিত লব্ধি $R = 5 \times 4 = 20$।

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow 400 = 256 + 144 + 384\cos\alpha$

$\Rightarrow 384\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 90°$।

২. $(\hat{i} \times \hat{k}) \times (\hat{j} \times \hat{k})$ **=? (Find the value of** $(\hat{i} \times \hat{k}) \times (\hat{j} \times \hat{k})$**.)**

(A) 0 (B) $\hat{i}$ (C) $-\hat{k}$ (D) $\hat{k}$

উত্তর: D. $\hat{k}$

ব্যাখ্যা: $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$ এবং $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

রাশিটি দাঁড়ায় $(-\hat{j}) \times \hat{i} = -(\hat{j} \times \hat{i}) = -(-\hat{k}) = \hat{k}$

৩. ভেক্টর $2\hat{i} + 3\hat{j}$ **এবং y-অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ কত? (What is the angle between the vector** $2\hat{i} + 3\hat{j}$ **and the y-axis?)**

(A) $\tan^{-1}(\frac{3}{2})$ (B) $\tan^{-1}(\frac{2}{3})$
(C) $\sin^{-1}(\frac{2}{3})$ (D) $\cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{13}})$

উত্তর: B. $\tan^{-1}(\frac{2}{3})$

ব্যাখ্যা: $A_x = 2, A_y = 3$

y-অক্ষের সাথে কোণ θ হলে

$$\tan\theta = \frac{x\text{-component}}{y\text{-component}} = \frac{2}{3}$$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{2}{3})$

৪. $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ **ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর কোনটি? (Which of the following is a unit vector parallel to** $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ **?)**

(A) $\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}$ (B) $\frac{1}{2}(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$
(C) $\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ (D) $\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

উত্তর: C. $\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

ব্যাখ্যা: $|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

৫. A গাড়ি 10 m/s বেগে এবং B গাড়ি তার পেছনে 15 m/s বেগে যাচ্ছে। C গাড়ি 15 m/s বেগে A এর বিপরীত দিক হতে আসছে। যখন AC=AB=1 km, তখন B যদি C এর আগে A কে অতিক্রম করতে চায় তবে B কে ন্যূনতম কত ত্বরণে চলতে হবে? (Car A moves at 10 m/s and Car B follows it at 15 m/s. Car C approaches A from the opposite direction at 15 m/s. When AC=AB=1 km, what minimum acceleration is required for B to overtake A before C reaches A?)

(A) $0.25\,m/s^2$ (B) $1.0\,m/s^2$
(C) $0.50\,m/s^2$ (D) $0.10\,m/s^2$

উত্তর: B. $1.0\,m/s^2$

ব্যাখ্যা: C ও A-এর আপেক্ষিক বেগ

$v_{CA} = 15 + 10 = 25$ m/s

তাই C-এর A-কে অতিক্রম করতে সময়,

$$t = \frac{1000}{25} = 40\text{ s}$$

B ও A-এর আপেক্ষিক আদি বেগ,

$u_{BA} = 15 - 10 = 5$ m/s

এখন,

$$1000 = 5(40) + \frac{1}{2}a(40)^2$$

$\Rightarrow 1000 = 200 + 800a$

$\Rightarrow 800 = 800a$

$\Rightarrow a = 1$ m/s^2।

অতএব, B-এর ত্বরণ 1 m/s^2।

৬. একজন পুলিশ মোটরসাইকেলে 10 m/s বেগে 100 m দূরে থাকা একটি জিপ গাড়িকে তাড়া করছে যা 9 m/s বেগে পালাচ্ছে। পুলিশের চোরকে ধরতে কত সময় লাগবে? (A policeman on a motorcycle moving at 10 m/s chases a jeep 100 m away which is moving away at 9 m/s. How long will it take for the policeman to catch the thief?)

(A) $10\,s$ (B) $50\,s$ (C) $100\,s$ (D) $200\,s$

উত্তর: C. $100\,s$

ব্যাখ্যা: আপেক্ষিক বেগ $v_{rel} = 10 - 9 = 1\,m/s$

আপেক্ষিক দূরত্ব $= 100\,m$

$t = 100/1 = 100\,s$

৭. একটি কণার সরণ $\vec{s} = (3t^3)\hat{i} - (4t^2)\hat{j} + (2t)\hat{k}$। $t = 2\,s$ এ কণাটির বেগের দিকে ত্বরণের লম্ব অভিক্ষেপ কত? (The displacement of a particle is given by $\vec{s} = (3t^3)\hat{i} - (4t^2)\hat{j} + (2t)\hat{k}$. Find the scalar projection of acceleration onto the velocity vector at $t = 2\,s$.)

Ⓐ 36.10 Ⓑ 32.05 Ⓒ 40.15 Ⓓ 28.90

উত্তর: A. 36.10

ব্যাখ্যা: $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = 9t^2\hat{i} - 8t\hat{j} + 2\hat{k}$;

$t = 2$-এ $\vec{v} = 36\hat{i} - 16\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 18t\hat{i} - 8\hat{j}; t = 2$-এ

$\vec{a} = 36\hat{i} - 8\hat{j}$

$\vec{a} \cdot \vec{v} = 1296 + 128 = 1424$;

$|\vec{v}| = \sqrt{1556} \approx 39.446$

অভিক্ষেপ = $1424/39.446 \approx 36.10$

৮. $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$ এবং $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ দুটি ভেক্টর। যদি একটি ভেক্টর $\vec{c}$ এমন হয় যে $\vec{a} \times \vec{c} = -\vec{b}$ এবং $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4$, তবে $|\vec{c}|^2$ এর মান কত? (Given $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$ and $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$. If a vector $\vec{c}$ satisfies $\vec{a} \times \vec{c} = -\vec{b}$ and $\vec{a} \cdot \vec{c} = 4$, find the value of $|\vec{c}|^2$.)

Ⓐ 8.5 Ⓑ 9.5 Ⓒ 10.5 Ⓓ 11.5

উত্তর: B. 9.5

ব্যাখ্যা: ধরি $\vec{c} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 4 \Rightarrow x - y = 4$ (1)

$\vec{a} \times \vec{c} = -z\hat{i} - z\hat{j} + (x + y)\hat{k} = -\vec{b} \Rightarrow z = 1, x + y = -1$ (2)

(1),(2) সমাধানে $x = 1.5, y = -2.5$

$|\vec{c}|^2 = 1.5^2 + (-2.5)^2 + 1^2 = 9.5$

৯. একজন মোটর আরোহী একটি মাঠে 500 m দূরত্ব সরলরেখায় গিয়ে আদি দিকের সাথে 60° কোণে বাঁক নিচ্ছে এবং একই প্রক্রিয়া বারবার করছে। তৃতীয় বার বাঁক নেওয়ার মুহূর্তে সরণ কত? (A motorcyclist travels 500 m straight in a field and then takes a 60° turn. He repeats this process. Find his displacement at the moment he takes the 3rd turn.)

Ⓐ $500\,m$ Ⓑ $1000\,m$ Ⓒ $1500\,m$ Ⓓ $866\,m$

উত্তর: B. $1000\,m$

ব্যাখ্যা: প্রতিটি বাঁক 60° হওয়ায় পথটি একটি সুষম ষড়ভুজ তৈরি করে

$\vec{S} = 500\angle 0° + 500\angle 60° + 500\angle 120°$

x-উপাংশ = $500(1 + 0.5 - 0.5) = 500$;

y-উপাংশ = $500(0 + 0.866 + 0.866) = 866$

$|\vec{S}| = \sqrt{500^2 + 866^2} = 1000\,m$

১০. দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মানের n গুণ। লব্ধির মান ভেক্টর দুটির মানের সমষ্টির অর্ধেক হলে, মধ্যবর্তী কোণ θ এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক? (The maximum resultant of two vectors is n times the minimum resultant. If the resultant magnitude is half the sum of the magnitudes of the two vectors, which of the following is correct for the angle θ?)

Ⓐ $\cos\theta = \frac{n^2 + 2}{2(1 - n^2)}$ Ⓑ $\cos\theta = \frac{n^2 + 3}{1 - n^2}$

Ⓒ $\cos\theta = \frac{n^2 - 2}{n^2 + 1}$ Ⓓ $\cos\theta = \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1}$

উত্তর: A. $\cos\theta = \frac{n^2 + 2}{2(1 - n^2)}$

ব্যাখ্যা: $P + Q = n(P - Q)$

$\Rightarrow P = \frac{n + 1}{n - 1}Q$

$R = \frac{P + Q}{2}$

$\cos\theta = \frac{R^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}$

বীজগাণিতিক সরলীকরণে,

$\cos\theta = \frac{n^2 + 2}{2(1 - n^2)}$।

১১. দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের অনুপাত 5 : 3 হলে ভেক্টর দুটির মানের অনুপাত কত? (The ratio of the maximum and minimum resultant of two vectors is 5 : 3. What is the ratio of the magnitudes of the vectors?)

Ⓐ 4 : 1 Ⓑ 5 : 2 Ⓒ 7 : 3 Ⓓ 10 : 7

উত্তর: A. 4 : 1

ব্যাখ্যা: $\frac{P + Q}{P - Q} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow 3P + 3Q = 5P - 5Q$

$\Rightarrow 2P = 8Q$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = 4$

অতএব, অনুপাত 4 : 1।

১২. একটি পাথরকে 50 m/s বেগে খাড়া উপরে এবং অপর একটি পাথরকে একই স্থান হতে একই সময়ে 50 m/s বেগে খাড়া নিচে নিক্ষেপ করা হলো। প্রথম পাথরটি সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছালে ২য় পাথরের সাপেক্ষে ১ম পাথরের আপেক্ষিক বেগ কত? (A stone is thrown upwards at 50 m/s and another stone is simultaneously thrown downwards from the same spot at 50 m/s. What is the relative velocity of the first stone w.r.t. the second when the first stone reaches its highest point?)

Ⓐ শূন্য Ⓑ $50\,m/s$ Ⓒ $100\,m/s$ Ⓓ $150\,m/s$

উত্তর: C. $100\,m/s$

ব্যাখ্যা: ১ম পাথরের সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছাতে সময়

$$t = \frac{u}{g} = \frac{50}{10} = 5, \text{s।}$$

সেই মুহূর্তে $v_1 = 0$।

এই সময়ে ২য় পাথরের বেগ (নিচের দিকে)

$$v_2 = 50 + 10 \times 5 = 100, \text{m/s।}$$

আপেক্ষিক বেগ

$$= |v_1 - v_2|$$

$$= |0 - 100|$$

$$= 100, \text{m/s।}$$

১৩. একটি ভেক্টর ধনাত্মক X ও Y অক্ষের সাথে যথাক্রমে 30° ও 60° কোণ উৎপন্ন করলে Z অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করবে? (If a vector makes angles of 30° and 60° with the positive X and Y axes respectively, what angle does it make with the Z axis?)

Ⓐ 0° Ⓑ 45° Ⓒ 90° Ⓓ 180°

উত্তর: C. 90°

ব্যাখ্যা: দিক কোসাইনের বর্গের সমষ্টি

$$1: \cos^2 30° + \cos^2 60° + \cos^2 \gamma = 1$$
$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 90°$$

১৪. 10 m/s বেগে খাড়া নিচে বৃষ্টি পড়ছে। উত্তর দিকে 10 m/s বেগে বাতাস বইতে শুরু করলে এবং একজন আরোহী উত্তর দিকেই 10 m/s বেগে মোটরসাইকেল চালালে বৃষ্টি তার গায়ে কত কোণে পড়বে? (Rain is falling vertically at 10 m/s. Wind starts blowing North at 10 m/s and a motorcyclist moves North at 10 m/s. At what angle will the rain hit him?)

Ⓐ 0° (খাড়াভাবে) Ⓑ 45°
Ⓒ 30° Ⓓ 60°

উত্তর: A. 0° (খাড়াভাবে)

ব্যাখ্যা: বাতাস ও আরোহী একই বেগে একই দিকে চলায় আরোহীর সাপেক্ষে বাতাসের প্রভাব শূন্য ফলে বৃষ্টির প্রকৃত (খাড়া নিচের) বেগই আরোহী অনুভব করবেন, অর্থাৎ 0°

১৫. $\varphi = 2x^2yz + 2xyz + 2xz^3$ হলে $(1, -1, 1)$ বিন্দুতে $\nabla\varphi$ (গ্রেডিয়েন্ট) এর মান কত? (If $\varphi = 2x^2yz + 2xyz + 2xz^3$, find the value of $\nabla\varphi$ at $(1, -1, 1)$.)

Ⓐ $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ Ⓑ $-4\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$
Ⓒ $-6\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$ Ⓓ $4\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k}$

উত্তর: A. $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

ব্যাখ্যা: $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 4xyz + 2yz + 2z^3;$

$(1, -1, 1)$-এ $= -4 - 2 + 2 = -4$

$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^2z + 2xz;$

$(1, -1, 1)$-এ $= 2 + 2 = 4$

$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2x^2y + 2xy + 6xz^2;$

$(1, -1, 1)$-এ $= -2 - 2 + 6 = 2$

$\nabla\varphi = -4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

১৬. নদীতে স্রোতের বেগ 5 km/h এবং একজন সাঁতারুর বেগ 3 km/h। নদী পার হওয়ার সময় বিচ্যুতি (Drift) সর্বনিম্ন করতে হলে তাকে স্রোতের সাথে কত কোণে সাঁতার কাটতে হবে? (The stream velocity in a river is 5 km/h and a swimmer's speed is 3 km/h. At what angle with the stream should he swim to minimize drift?)

Ⓐ 120° Ⓑ 126.87°
Ⓒ 135° Ⓓ 150°

উত্তর: B. 126.87°

ব্যাখ্যা: স্রোতের বেগ সাঁতারুর বেগের চেয়ে বেশি হওয়ায় বিচ্যুতি সর্বনিম্ন করার শর্ত $\cos\alpha = -\frac{v}{u}$

$\alpha = \cos^{-1}(-\frac{3}{5}) = \cos^{-1}(-0.6) \approx 126.87°$

১৭. স্রোতযুক্ত একটি নদীতে সোজা ওপারে (ন্যূনতম দূরত্বে) পৌঁছানোর জন্য একজন মাঝি 138.59° কোণে নৌকা চালায়। নৌকার বেগ 4 km/h হলে স্রোতের বেগ কত? (To cross a river along the shortest path, a boatman steers the boat at an angle of 138.59° with the current. If the boat's speed is 4 km/h, what is the velocity of the stream?)

Ⓐ $2\,km/h$ Ⓑ $3\,km/h$
Ⓒ $1\,km/h$ Ⓓ $2.5\,km/h$

উত্তর: B. $3\,km/h$

ব্যাখ্যা: ন্যূনতম দূরত্বে পার হওয়ার শর্ত $\cos\alpha = -\frac{u}{v}$

$\cos(138.59°) = -\frac{u}{4} \Rightarrow -0.75 = -\frac{u}{4} \Rightarrow u = 3\,km/h$

১৮. 5 m/s বেগে দৌড়ে গেলে বৃষ্টি একজন আরোহীর গায়ে লম্বভাবে পড়ে। বেগ দ্বিগুণ করলে বৃষ্টি উলম্ব রেখার সাথে 30° কোণে পড়ে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ কত? (Rain hits a person vertically when he runs at 5 m/s. If he doubles his speed, the rain hits him at an angle of 30° with the vertical. Find the actual velocity of the rain.)

Ⓐ $10\,m/s$ Ⓑ $5\sqrt{3}\,m/s$
Ⓒ $8.66\,m/s$ Ⓓ $5\,m/s$

উত্তর: A. $10\,m/s$

ব্যাখ্যা: ১ম ক্ষেত্রে লম্বভাবে পড়ায় $v_x = 5\,m/s$

২য় ক্ষেত্রে $\tan 30° = \frac{5}{v_y} \Rightarrow v_y = 5\sqrt{3}\,m/s$

$v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{25 + 75} = 10\,m/s$

১৯. $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? (What is the angle between the vectors $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$?)

Ⓐ 79.02° Ⓑ 45.00°
Ⓒ 90.00° Ⓓ 120.00°

উত্তর: A. 79.02°

ব্যাখ্যা: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 12 - 6 - 2 = 4$;

$|\vec{A}| = 3, |\vec{B}| = 7$

$\cos\theta = \frac{4}{21} \approx 0.1905 \Rightarrow \theta \approx 79.02°$

২০. 36 m চওড়া একটি নদীতে স্রোতের বেগ 3 m/s। একটি নৌকাকে স্রোতের সাথে 37° কোণে 10 m/s বেগে ওপারে পৌঁছানোর জন্য যাত্রা শুরু করলে নদী পার হতে কত সময় লাগবে? (A river is 36 m wide and the current velocity is 3 m/s. If a boat is steered at 10 m/s at an angle of 37° with the current, how long will it take to cross the river?)

Ⓐ 12 s Ⓑ 3.6 s Ⓒ 5.98 s Ⓓ 8 s

উত্তর: C. 5.98 s

ব্যাখ্যা: নদী পার হওয়ার সময় $t = \frac{d}{v \sin\alpha}$

$t = \frac{36}{10 \times \sin 37°} = \frac{36}{6.018} \approx 5.98\ s$

২১. $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{j}$ এবং $\vec{C} = 5\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি দ্বারা গঠিত একটি সামান্তরিক ঘনবস্তুর (parallelepiped) আয়তন কত? (Find the volume of a parallelepiped formed by vectors $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{j}$, and $\vec{C} = 5\hat{j} + 3\hat{k}$.)

Ⓐ 24 cubic unit Ⓑ 12 cubic unit
Ⓒ 40 cubic unit Ⓓ 0 cubic unit

উত্তর: A. 24 cubic unit

ব্যাখ্যা: আয়তন $V = |\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$।

$\vec{B} \times \vec{C} = |\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k};\ 0\ 4\ 0;\ 0\ 5\ 3| = 12\hat{i}$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 2 \times 12 = 24$

২২. একটি ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{v} = 4xy^3z\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} - 3xyz\hat{k}$; $(1, -1, 1)$ বিন্দুতে div $\vec{v}$ (ডাইভারজেন্স) এর মান কত? (Given the vector field $\vec{v} = 4xy^3z\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} - 3xyz\hat{k}$, find the value of div $\vec{v}$ (divergence) at $(1, -1, 1)$.)

Ⓐ −4 Ⓑ 0 Ⓒ −1 Ⓓ 10

উত্তর: A. −4

ব্যাখ্যা: $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 4y^3z;\ (1,-1,1)$-এ $= -4$

$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -3x^2z;\ (1,-1,1)$-এ $= -3$

$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -3xy;\ (1,-1,1)$-এ $= 3$

যোগফল $= -4 - 3 + 3 = -4$

২৩. একজন মাঝি সর্বনিম্ন সময়ে নদী পাড়ি দিতে 10 মিনিটে 120 m পাড় বরাবর অতিক্রম করে। যদি সে সর্বনিম্ন পথে পাড়ি দিত তবে সময় লাগত 12.5 মিনিট। স্থির পানিতে নৌকার বেগ কত? (A boatman crosses a river in minimum time in 10 minutes, drifting 120 m along the bank. If he crosses along the shortest path, it takes 12.5 minutes. What is the boat's speed in still water?)

Ⓐ 15 m/min Ⓑ 20 m/min
Ⓒ 25 m/min Ⓓ 12 m/min

উত্তর: B. 20 m/min

ব্যাখ্যা: স্রোতের বেগ, $u = \frac{120}{10} = 12$, m/min।

সর্বনিম্ন সময়ে,

$d = 10v$।

সর্বনিম্ন পথে,

$\frac{10v}{\sqrt{v^2 - 144}} = 12.5$

বর্গ করে,

$100v^2 = 156.25(v^2 - 144)$

$\Rightarrow v^2 = 400$

$\Rightarrow v = 20$, m/min।

২৪. $\vec{P} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ এবং $\vec{Q} = 7\hat{i} + 24\hat{j}$ দুটি ভেক্টর। এমন একটি ভেক্টর নির্ণয় কর যার মান $\vec{Q}$ এর সমান এবং অভিমুখ $\vec{P}$ এর সমান্তরাল। (Given $\vec{P} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ and $\vec{Q} = 7\hat{i} + 24\hat{j}$. Find a vector which has the same magnitude as $\vec{Q}$ and is parallel to $\vec{P}$.)

Ⓐ $7\hat{i} + 24\hat{j}$ Ⓑ $15\hat{i} + 20\hat{j}$
Ⓒ $3\hat{i} + 4\hat{j}$ Ⓓ $21\hat{i} + 28\hat{j}$

উত্তর: B. $15\hat{i} + 20\hat{j}$

ব্যাখ্যা: $|\vec{Q}| = \sqrt{49 + 576} = 25$

$\vec{P}$-এর অভিমুখে একক ভেক্টর $= \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{5}$

নির্ণেয় ভেক্টর $= 25 \times \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{5} = 15\hat{i} + 20\hat{j}$

২৫. একটি ভেক্টর তিনটি ধনাত্মক স্থানাঙ্ক অক্ষের (X, Y, Z) সাথে সমান কোণ তৈরি করলে সেই কোণের মান কত? (If a vector makes equal angles with the three positive coordinate axes, what is the value of that angle?)

Ⓐ 45° Ⓑ 54.74° Ⓒ 60° Ⓓ 90°

উত্তর: B. 54.74°

ব্যাখ্যা: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

$\alpha = \beta = \gamma$

$3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54.74°$

২৬. যদি দুটি একক ভেক্টর $\hat{a}$ ও $\hat{b}$ এর লব্ধি $\sqrt{3}$ হয়, তবে তাদের মধ্যবর্তী কোণ কত? (If the resultant of two unit vectors $\hat{a}$ and $\hat{b}$ is $\sqrt{3}$, what is the angle between them?)

Ⓐ 0° Ⓑ 45° Ⓒ 60° Ⓓ 90°

উত্তর: C. 60°

ব্যাখ্যা: $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$;

$P = Q = 1, R = \sqrt{3}$

$3 = 1 + 1 + 2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60°$

২৭. 2 kg ভরের একটি কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং এর বেগ $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j}\ m/s$। মূলবিন্দুর সাপেক্ষে কণাটির কৌণিক ভরবেগ কত? (A particle of mass 2 kg has a position vector $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and velocity $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j}\ m/s$. What is its angular momentum relative to the origin?)

Ⓐ $-4\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$ Ⓑ $4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$

Ⓒ 10.77 unit Ⓓ (ক) এবং (গ) উভয়ই

উত্তর: A. $-4\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$

ব্যাখ্যা: কৌণিক ভরবেগ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$;

$\vec{p} = 2(2\hat{i} + \hat{j}) = 4\hat{i} + 2\hat{j}$

$\vec{L} = |\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k};\ 1\ 2\ 2;\ 4\ 2\ 0| = -4\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$

$|\vec{L}| = \sqrt{16 + 64 + 36} = \sqrt{116} \approx 10.77$; কৌণিক ভরবেগ ভেক্টর রাশি, তাই শুধু A সঠিক।

২৮. $\varphi = 2z - x^3y$ একটি স্কেলার ক্ষেত্র হলে $(1, -1, 1)$ বিন্দুতে $\vec{A} \cdot \nabla\varphi$ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $\vec{A} = 2x^2\hat{i} - 3yz\hat{j} + xz^2\hat{k}$। (If $\varphi = 2z - x^3y$ is a scalar field, find the value of $\vec{A} \cdot \nabla\varphi$ at $(1, -1, 1)$ where $\vec{A} = 2x^2\hat{i} - 3yz\hat{j} + xz^2\hat{k}$.)

Ⓐ 5 Ⓑ 0 Ⓒ −3 Ⓓ 10

উত্তর: A. 5

ব্যাখ্যা: $\nabla\varphi = -3x^2y\hat{i} - x^3\hat{j} + 2\hat{k}$;

$(1, -1, 1)$-এ $= 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{A}$ এই বিন্দুতে $= 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{A} \cdot \nabla\varphi = (2)(3) + (3)(-1) + (1)(2) = 6 - 3 + 2 = 5$

২৯. স্রোতযুক্ত একটি নদীতে (স্রোতের বেগ 3 km/h) 5 km চওড়া নদী পার হতে একজন মাঝি প্রথমে সোজা ওপারে পৌঁছানোর উদ্দেশ্যে 1 ঘণ্টা নৌকা চালায়। এরপর সে সর্বনিম্ন সময়ে পার হওয়ার উদ্দেশ্যে দিক পরিবর্তন করে। নৌকার বেগ 4 km/h হলে নদী পার হতে মোট কত সময় লাগবে? (In a river with a current of 3 km/h, a boatman steers to reach the opposite bank exactly for 1 hour. Then he changes direction to cross in minimum time. If the boat's speed is 4 km/h, find the total time taken to cross the 5 km wide river.)

Ⓐ $1.500\,h$ Ⓑ $1.588\,h$ Ⓒ $2.000\,h$ Ⓓ $1.250\,h$

উত্তর: B. $1.588\,h$

ব্যাখ্যা: সোজা ওপারে যাওয়ার কোণ

$\cos\alpha = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \approx 138.59°$

1 ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব $y_1 = 4\sin(138.59°) \approx 2.645\,km$

অবশিষ্ট দূরত্ব $y_2 = 2.355\,km$;

সময় $t_2 = 2.355/4 = 0.588\,h$

মোট সময় $= 1 + 0.588 = 1.588\,h$

৩০. A এর সাপেক্ষে C এর বেগ 25 m/s, B এর সাপেক্ষে A এর বেগ বিপরীত দিকে 5 m/s এবং তারা একই সরলরেখায় আছে (AB দূরত্ব 20 m)। C গাড়িটি B গাড়িটিকে অতিক্রম করতে কত সময় লাগবে? (If the velocity of C relative to A is 25 m/s and the velocity of A relative to B is 5 m/s in the opposite direction (assume they are on a straight line and the distance AB is 20 m), how long will it take for car C to pass car B?)

Ⓐ $1\,s$ Ⓑ $2\,s$ Ⓒ $3\,s$ Ⓓ $4\,s$

উত্তর: A. $1\,s$

ব্যাখ্যা: $v_{C/B} = v_{C/A} + v_{A/B} = 25 - 5 = 20\,m/s$

প্রয়োজনীয় দূরত্ব $= 20\,m$

$t = 20/20 = 1\,s$

৩১. যদি $\vec{v} = 4xy^3z\hat{i} - 3x^3yz\hat{j} + 5xyz^2\hat{k}$ হয়, তবে $\nabla \times \vec{v}$ (কার্ল) নির্ণয় কর। (If $\vec{v} = 4xy^3z\hat{i} - 3x^3yz\hat{j} + 5xyz^2\hat{k}$, find $\nabla \times \vec{v}$ (Curl).)

Ⓐ $4xy^2z\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} + 5xyz\hat{k}$

Ⓑ $12xy^2z - 9x^2yz + 10xyz$

Ⓒ $(5xz^2 + 3x^3y)\hat{i} + (4xy^3 - 5yz^2)\hat{j} - (9x^2yz + 12xy^2z)\hat{k}$

Ⓓ $(5xz^2 - 3x^3y)\hat{i} + (4xy^3 - 5yz^2)\hat{j} + \hat{k}$

C. $(5xz^2 + 3x^3y)\hat{i} + (4xy^3 - 5yz^2)\hat{j} -$ $(9x^2yz + 12xy^2z)\hat{k}$

উত্তর:

ব্যাখ্যা:

$\hat{i}$ উপাংশ: $\partial_y(5xyz^2) - \partial_z(-3x^3yz)$

$= 5xz^2 + 3x^3y$

$\hat{j}$ উপাংশ: $\partial_z(4xy^3z) - \partial_x(5xyz^2)$

$= 4xy^3 - 5yz^2$

$\hat{k}$ উপাংশ: $\partial_x(-3x^3yz) - \partial_y(4xy^3z) = -(9x^2yz + 12xy^2z)$

৩২. ভেক্টর $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $x\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে x এর মান কত? (If the vectors $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ and $x\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ are parallel to each other, find the value of x.)

Ⓐ −6 Ⓑ 6 Ⓒ 5 Ⓓ −5

উত্তর: B. 6

ব্যাখ্যা: সমান্তরাল হওয়ার শর্তে অনুরূপ উপাংশের অনুপাত সমান

$\frac{3}{x} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = 0.5$

$\frac{3}{x} = 0.5 \Rightarrow x = 6$

৩৩. একটি কণার ওপর $\vec{F}_1 = 4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{F}_2 = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ বলদ্বয় ক্রিয়া করায় কণাটির সরণ $(1,2,3)$ বিন্দু হতে $(5,4,1)$ বিন্দুতে হয়। কৃতকাজের মান কত? (A particle is acted upon by constant forces $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ which displace it from point $(1,2,3)$ to point $(5,4,1)$. Find the work done in standard units.)

Ⓐ 40 unit Ⓑ 30 unit
Ⓒ 25 unit Ⓓ 15 unit

উত্তর: A. 40 **unit**

ব্যাখ্যা: লব্ধি বল $\vec{F} = 7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$
সরণ ভেক্টর $\vec{s} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$
$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = 28 + 4 + 8 = 40$ unit

৩৪. তুমি প্রথমে 3 km পূর্বে, তারপর 4 km দক্ষিণে, 3 km পশ্চিমে, 2 km পশ্চিমে, 10 km উপরে, 4 km দক্ষিণে এবং সবশেষে 2 km উত্তরে গেলে। তোমার মোট সরণ কত? (You travel 3 km East, 4 km South, 3 km West, 2 km West, 10 km Up, 4 km South, and 2 km North. What is your total displacement?)

Ⓐ $32\,km$ Ⓑ $\sqrt{140}\,km$ Ⓒ $11\,km$ Ⓓ $15\,km$

উত্তর: B. $\sqrt{140}\,km$

ব্যাখ্যা: দিকগুলো ভেক্টর আকারে প্রকাশ করলে

$\vec{s} = -2\hat{i} - 6\hat{j} + 10\hat{k}$
$|\vec{s}| = \sqrt{4 + 36 + 100} = \sqrt{140}\,km$

৩৫. $A(1,-2,3)$, $B(0,1,2)$ এবং $C(2,1,4)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল কত? (Find the area of triangle ABC with vertices $A(1,-2,3)$, $B(0,1,2)$, and $C(2,1,4)$.)

Ⓐ 10.5 sq. unit Ⓑ $3\sqrt{2}$ sq. unit
Ⓒ 5.25 sq. unit Ⓓ 15 sq. unit

উত্তর: B. $3\sqrt{2}$ **sq. unit**

ব্যাখ্যা: $\vec{AB} = -\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$,

$\vec{AC} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$
$\vec{AB} \times \vec{AC} = 6\hat{i} - 6\hat{k}$;

$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 6\sqrt{2}$
ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(6\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$ sq. unit

৩৬. একটি ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{A} = (-4x - 3y + az)\hat{i} + (bx + 3y + 5z)\hat{j} + (4x + cy + 3z)\hat{k}$ অঘূর্ণনশীল (Irrotational) হলে a, b, c এর মান কত? (If the vector field $\vec{A} = (-4x - 3y + az)\hat{i} + (bx + 3y + 5z)\hat{j} + (4x + cy + 3z)\hat{k}$ is irrotational, find the values of a, b, c.)

Ⓐ $a = 4, b = -3, c = 5$ Ⓑ $a = 5, b = 3, c = -4$
Ⓒ $a = -4, b = 5, c = 3$ Ⓓ $a = 3, b = 4, c = 5$

উত্তর: A. $a = 4, b = -3, c = 5$

ব্যাখ্যা: $\nabla \times \vec{A} = 0$ শর্তে সহগ তুলনা করে:
$\hat{i}$: $c - 5 = 0 \Rightarrow c = 5$
$\hat{j}$: $a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$
$\hat{k}$: $b - (-3) = 0 \Rightarrow b = -3$

৩৭. বৃষ্টির বেগ 5 m/s (খাড়া নিচের দিকে) এবং বাতাসের বেগ 10 m/s (পূর্ব থেকে পশ্চিমে)। গাড়ি চালক 20 m/s বেগে পূর্ব দিকে চললে তার কাছে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ কত? (Rain velocity is 5 m/s (vertically down) and wind is 10 m/s (East to West). If a driver moves East at 20 m/s, find the magnitude of the relative velocity of rain.)

Ⓐ $3\sqrt{25}\,m/s$ Ⓑ $9\sqrt{25}\,m/s$
Ⓒ $\sqrt{925}\,m/s$ Ⓓ $25\,m/s$

উত্তর: C. $\sqrt{925}\,m/s$

ব্যাখ্যা: রেইন+বাতাসের প্রকৃত বেগ $= -10\hat{i} - 5\hat{k}$।

গাড়ির সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ
$= (-10\hat{i} - 5\hat{k}) - 20\hat{i}$
$= -30\hat{i} - 5\hat{k}$।
$|\vec{v}_{rc}| = \sqrt{(-30)^2 + (-5)^2}$
$= \sqrt{900 + 25}$
$= \sqrt{925}$, m/s।

৩৮. A ও B বিন্দু হতে দুইজন ব্যক্তি যথাক্রমে 10 m/s এবং 12 m/s বেগে যাত্রা করে একটি সংযোগ বিন্দু O তে মিলিত হয়। যদি $AB = 100\,m$ এবং $\angle OAB = 60°$, তবে তারা কত সময় পর মিলিত হবে? (Two persons start from points A and B with velocities 10 m/s and 12 m/s respectively and meet at a junction O. If $AB = 100\,m$ and angle $\angle OAB = 60°$, after how much time will they meet?)

Ⓐ $5.51\,s$ Ⓑ $7.51\,s$ Ⓒ $10.00\,s$ Ⓓ $12.45\,s$

উত্তর: B. $7.51\,s$

ব্যাখ্যা: সাইন সূত্রে, $\sin\theta = \dfrac{10\sin 60°}{12} \approx 0.7217$

$\Rightarrow \theta \approx 46.19°$।

$\angle AOB = 180° - 60° - 46.19°$

$= 73.81°$।

ফের সাইন সূত্রে,

$$12t = \frac{100 \times 0.866}{0.9603}$$

≈ 90.18

$\Rightarrow t \approx 7.51$, s।

৩৯. $\varphi = \dfrac{1}{|\vec{r}|}$ হলে (যেখানে $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর) $\nabla\varphi$ (গ্রেডিয়েন্ট) নির্ণয় কর। (If $\varphi = \dfrac{1}{|\vec{r}|}$ (where $\vec{r}$ is the position vector), find $\nabla\varphi$ (gradient).)

Ⓐ $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$ Ⓑ $-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$
Ⓒ $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ Ⓓ 0

উত্তর: B. $-\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

ব্যাখ্যা: $\varphi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$
$\nabla\varphi = \sum \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(2x) = -\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

৪০. যদি $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ হয় ($\vec{\omega}$ একটি ধ্রুব ভেক্টর), তবে নিচের কোনটি এই সম্পর্কের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ? (If $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (where $\vec{\omega}$ is a constant vector), which of the following is consistent with this relation?)

Ⓐ $\nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$ Ⓑ $\nabla \cdot \vec{v} = \vec{\omega}$
Ⓒ $\nabla\varphi = \vec{v}$ Ⓓ $\text{curl}\,\vec{v} = 0$

উত্তর: A. $\nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$

ব্যাখ্যা: ভেক্টর অভেদ থেকে জানা যায় $\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\omega}$
যেহেতু $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$,

তাই $\nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$

৪১. 5 m/s বেগে লম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছে এবং 2 m/s বেগে পূর্ব হতে পশ্চিমে বাতাস বইছে। একটি গাড়ি 3 m/s বেগে পূর্ব দিকে চললে গাড়ির কাঁচ ভেজার ক্ষেত্রে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ কত? (Rain falls vertically at 5 m/s and wind blows East to West at 2 m/s. If a car moves East at 3 m/s, what is the relative velocity of rain?)

Ⓐ $5\,m/s$ Ⓑ $5\sqrt{2}\,m/s$ Ⓒ $7\,m/s$ Ⓓ $10\,m/s$

উত্তর: B. $5\sqrt{2}\,m/s$

ব্যাখ্যা: বাতাসসহ বৃষ্টির প্রকৃত বেগ = $-2\hat{i} - 5\hat{k}$
গাড়ির সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ = $(-2\hat{i} - 5\hat{k}) - 3\hat{i} = -5\hat{i} - 5\hat{k}$
$|\vec{v}_{rel}| = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}\,m/s$

৪২. $\varphi = xy^2z$ এবং $\vec{A} = xz\hat{i} - xy^2\hat{j} + yz^2\hat{k}$ হলে $(2, -1, 0)$ বিন্দুতে $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\varphi\vec{A})$ এর মান কত? (If $\varphi = xy^2z$ and $\vec{A} = xz\hat{i} - xy^2\hat{j} + yz^2\hat{k}$, find $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\varphi\vec{A})$ at $(2, -1, 0)$.)

Ⓐ $-2\hat{j}$ Ⓑ $4\hat{i}$ Ⓒ $\hat{k}$ Ⓓ 0

উত্তর: A. $-2\hat{j}$

ব্যাখ্যা: $\varphi\vec{A} = x^2y^2z^2\hat{i} - x^2y^4z\hat{j} + xy^3z^3\hat{k}$
∂_z করে, পরে দুইবার ∂_x করে

$4y^2z\hat{i} - 2y^4\hat{j}$ পাওয়া যায়
$(2, -1, 0)$-এ $= 4(1)(0)\hat{i} - 2(1)\hat{j} = -2\hat{j}$

৪৩. $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের তলের ওপর লম্ব এমন একটি ভেক্টর নির্ণয় কর যার মান $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ এর মানের সমান। (Find a vector perpendicular to the plane of $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ having magnitude same as $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$.)

Ⓐ $\pm\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{122}}(-8\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$ Ⓑ $4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$
Ⓒ 0 Ⓓ $-8\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$

উত্তর: A. $\pm\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{122}}(-8\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$

ব্যাখ্যা: তলের লম্ব ভেক্টর
$\vec{n} = \vec{B} \times \vec{C} = -8\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$;

$|\vec{n}| = \sqrt{122}$
$|\vec{A}| = \sqrt{14}$
নির্ণেয় ভেক্টর $= \pm|\vec{A}|\hat{n} = \pm\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{122}}(-8\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$

৪৪. $\vec{c}$ ভেক্টরটি $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{j} + \hat{k}$ এর সমতলীয়। যদি $\vec{c}$ ভেক্টরটি $\vec{a}$ এর সাথে লম্ব হয় এবং $\vec{c} \cdot \vec{b} = 24$ হয়, তবে $|\vec{c}|$ এর মান কত? (Vector $\vec{c}$ is coplanar with $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{j} + \hat{k}$. If $\vec{c}$ is perpendicular to $\vec{a}$ and $\vec{c} \cdot \vec{b} = 24$, find $|\vec{c}|$.)

Ⓐ $4\sqrt{21}$ Ⓑ $\sqrt{116}$ Ⓒ 24 Ⓓ 10

উত্তর: A. $4\sqrt{21}$

ব্যাখ্যা: সমতলীয় শর্তে $2x - y + z = 0$ (1); $\vec{c} \perp \vec{a}$:

$2x + 3y - z = 0$ (2);
$\vec{c} \cdot \vec{b} = 24$:
$y + z = 24$ (3) (1),(2) থেকে $y = -2x, z = 2y$; (3)-এ বসিয়ে

$y = 8, z = 16, x = -4$
$|\vec{c}| = \sqrt{16 + 64 + 256} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$

৪৫. $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ একক ভেক্টর এবং $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 0$ হলে $\hat{a} \cdot \hat{b} + \hat{b} \cdot \hat{c} + \hat{c} \cdot \hat{a}$ এর মান কত? (Find $\hat{a} \cdot \hat{b} + \hat{b} \cdot \hat{c} + \hat{c} \cdot \hat{a}$ for unit vectors with zero sum.)

Ⓐ -1.5 Ⓑ 1 Ⓒ -3 Ⓓ 0

উত্তর: A. -1.5

ব্যাখ্যা: $(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c})^2 = 1 + 1 + 1 + 2(\hat{a} \cdot \hat{b} + \hat{b} \cdot \hat{c} + \hat{c} \cdot \hat{a}) = 0$

$3 + 2X = 0$

$\Rightarrow X = -\frac{3}{2}$

$= -1.5$।

৪৬. $\triangle ABC$ ত্রিভুজে $\vec{AB} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{AC} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে A শীর্ষ হতে মধ্যমার দৈর্ঘ্য কত? (In triangle ABC, $\vec{AB} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$ and $\vec{AC} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$. Find the length of the median through A.)

Ⓐ $\sqrt{33}$ Ⓑ $\sqrt{18}$ Ⓒ 5 Ⓓ $\sqrt{72}$

উত্তর: A. $\sqrt{33}$

ব্যাখ্যা: মধ্যমা ভেক্টর $\vec{AD} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = 4\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$
$|\vec{AD}| = \sqrt{16 + 1 + 16} = \sqrt{33}$

৪৭. নিচের কোন তিনটি বলের লব্ধি কখনো শূন্য হতে পারে না? (Which of these triplets cannot have a zero resultant?)

Ⓐ 5 N, 10 N, 20 N Ⓑ 5 N, 5 N, 5 N
Ⓒ 5 N, 10 N, 15 N Ⓓ 5 N, 10 N, 8 N

উত্তর: A. 5 N, 10 N, 20 N

ব্যাখ্যা: লব্ধি শূন্য হওয়ার শর্ত: বৃহত্তম বল ≤ বাকি দুটির সমষ্টি $20 > 5 + 10 = 15$, তাই এই তিনটির লব্ধি কখনো শূন্য হতে পারে না

৪৮. একটি গাড়ি আনুভূমিকের সাথে $30°$ কোণে আনত তল বরাবর 20 m/s বেগে উপরে উঠছে। এ সময় বৃষ্টির বেগ খাড়া নিচের দিকে 10 m/s এবং বাতাসের বেগ পশ্চিম দিকে 5 m/s হলে, গাড়িচালকের সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগের মান কত? (A car moves up an inclined plane ($30°$ with horizontal) at 20 m/s. If rain falls vertically down at 10 m/s and wind blows West at 5 m/s, find the magnitude of the relative velocity of rain with respect to the driver.)

Ⓐ $\sqrt{325}\,m/s$ Ⓑ $20\hat{j} - (5 + 10\sqrt{3})\hat{i}$

Ⓒ $29.97\,m/s$ Ⓓ $25.45\,m/s$

উত্তর: C. $29.97\,m/s$

ব্যাখ্যা: গাড়ির বেগ

$= 20\cos 30°\hat{i} + 20\sin 30°\hat{j}$

$= 10\sqrt{3}\hat{i} + 10\hat{j}$।

বৃষ্টি+বাতাসের লব্ধি বেগ

$= -5\hat{i} - 10\hat{j}$।

আপেক্ষিক বেগ

$= (-5 - 10\sqrt{3})\hat{i} - 20\hat{j}$।

মান

$= \sqrt{(-5 - 10\sqrt{3})^2 + (-20)^2}$

$\approx 29.97, \text{m/s}$।

৪৯. যদি $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ হয়, তবে $\vec{a}$ ভেক্টর-এর উপর $\vec{b}$-এর অভিক্ষেপ কোনটি?(If $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, then what is the projection of $\vec{b}$ on $\vec{a}$?)

Ⓐ $-\frac{2}{9}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ Ⓑ $-\frac{2}{3}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

Ⓒ $\frac{2}{9}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ Ⓓ $\frac{1}{9}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

উত্তর: A. $-\frac{2}{9}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

ব্যাখ্যা: $\vec{a}$-এর উপর $\vec{b}$-এর ভেক্টর অভিক্ষেপ, $\text{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2(1) + (-1)(2) + 2(-1)$

$= 2 - 2 - 2 = -2$

$|\vec{a}|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$

অতএব,

$\text{proj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = -\frac{2}{9}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$

৫০. একটি ভেক্টর $\vec{a}$-এর জন্য $\vec{a}\times(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{a}\cdot(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ হলে $\vec{a}$ ভেক্টরটি কোনটি?(If, for a vector $\vec{a}$, $\vec{a}\times(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{a}\cdot(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$, then which of the following is the vector $\vec{a}$?)

Ⓐ $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ Ⓑ $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

Ⓒ $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ Ⓓ $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

উত্তর: A. $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

ব্যাখ্যা: ধরি, $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

এখন, $\vec{a}\times(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$= (y - z)\hat{i} + (z - x)\hat{j} + (x - y)\hat{k}$

$= \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$।

সহগ সমীকৃত করে, $y - z = 1$, $z - x = -2$, $x - y = 1$।

আবার, $\vec{a}\cdot(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$

$\Rightarrow x + y + z = 6$।

এখন, $x = y + 1$, $z = y - 1$।

তাই, $(y + 1) + y + (y - 1) = 6$

$\Rightarrow 3y = 6$

$\Rightarrow y = 2$।

অতএব, $x = 3$, $z = 1$।

সুতরাং, $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$